測驗卷 4 第一冊全

得分

____年____班____號 姓名________

答案欄									
1.	(5)	2.	(1)	3.	(2)	4.	(3)	5.	(2)(3)(5)
6.	(1)(4)	7.	(1)(2)(4)	8.	(1)(3)	9.	5	10.	7
11.	$\frac{1}{2}$	12.	(2，−1)						

（＊表示解析未完整，詳細解析請見小老師解答卷）

一、單選題（每題 7 分，共 28 分）

＊((5)) 1. 下列哪一個不等式的解在數線上所占的長度為 6？

(1) $|x|\leq 6$
(2) $x^2\geq 6$
(3) $|x+1|\leq 4$
(4) $x^2+x-6\leq 0$
(5) $|2x-1|\leq 6$

1. (1) $|x|\leq 6 \Rightarrow -6\leq x\leq 6$，長度為 $6-(-6)=12$
(2) $x^2\geq 6 \Rightarrow x\leq -\sqrt{6}$ 或 $x\geq \sqrt{6}$，長度為無限大
(3) $|x+1|\leq 4 \Rightarrow -4\leq x+1\leq 4 \Rightarrow -5\leq x\leq 3$，長度為 $3-(-5)=8$
(4) $x^2+x-6\leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+3)\leq 0 \Rightarrow -3\leq x\leq 2$，長度為 $2-(-3)=5$

((1)) 2. 已知三次函數 $f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)+2$，若點 $P(3，1)$ 為 $y=f(x)$ 的圖形上一點，且點 Q 為 $y=f(x)$ 的圖形之對稱中心，則下列哪一點為點 P 對於點 Q 的對稱點？

(1) $(-1，3)$
(2) $(1，3)$
(3) $(3，3)$
(4) $(-1，1)$
(5) $(2，1)$

2. $y=f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)+2$ 的圖形對稱中心為 $Q(1，2)$
設點 P 對於點 Q 之對稱點為 $R(x，y)$
則 $\left(\frac{3+x}{2}，\frac{1+y}{2}\right)=(1，2)$
$\Rightarrow x=-1，y=3$
因此點 P 對於點 Q 的對稱點為 $R(-1，3)$
故選(1)

＊((2)) 3. 若 $(x-1)^2$ 除多項式 $x^4+ax^3-3x^2+bx+3$ 所得餘式為 $x+1$，則 $a+b$ 之值為下列何者？

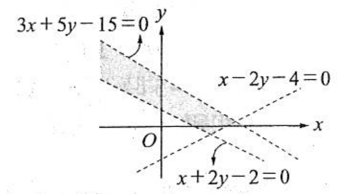
(1) 9
(2) 1
(3) 0
(4) −3
(5) −5

3. 設 $x^4+ax^3-3x^2+bx+3=(x-1)^2\cdot Q(x)+(x+1)$
$\Rightarrow x^4+ax^3-3x^2+(b-1)x+2=(x-1)^2\cdot Q(x)=(x^2-2x+1)\cdot Q(x)$
即 $x^4+ax^3-3x^2+(b-1)x+2$ 被 (x^2-2x+1) 整除

((3)) 4. 請問聯立不等式 $\begin{cases} x+2y-2>0 \\ 3x+5y-15<0 \\ x-2y-4<0 \end{cases}$ 的解不可能在下列哪一個象限？

(1)第一象限
(2)第二象限
(3)第三象限
(4)第四象限
(5)以上皆非，即四個象限都可能

4. 聯立不等式（＊）$\begin{cases} x+2y-2>0 \\ 3x+5y-15<0 \\ x-2y-4<0 \end{cases}$ 的解如下圖陰影區域
即聯立不等式（＊）的解不可能在第三象限
故選(3)



二、多選題（所有選項均答對者，得 7 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算，共 28 分）

((2)(3)(5)) 5. 下列有關循環小數的敘述，請選出正確的選項。(已知 $\sqrt{2}\approx 1.414$)

(1) $0.\overline{12}>0.1\overline{2}$
(2) $0.\overline{7}+0.\overline{3}=1.\overline{1}$
(3) $\frac{4}{9}>\sqrt{2}-1$
(4) $(0.\overline{2})^2=0.\overline{4}$
(5) $\frac{1}{0.\overline{5}}-1$ 為有限小數

5. (1) ×：$0.\overline{12}=0.121212\cdots\cdots$，$0.1\overline{2}=0.122222\cdots\cdots \Rightarrow 0.\overline{12}<0.1\overline{2}$
(2) ○：$0.\overline{7}+0.\overline{3}=\frac{7}{9}+\frac{3}{9}=\frac{10}{9}$，$1.\overline{1}=1+0.\overline{1}=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9} \Rightarrow 0.\overline{7}+0.\overline{3}=1.\overline{1}$
(3) ○：$\frac{4}{9}+1=\frac{13}{9}\approx 1.44>\sqrt{2}\approx 1.414 \Rightarrow \frac{4}{9}>\sqrt{2}-1$
(4) ×：$(0.\overline{2})^2=\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{4}{81}$，$0.\overline{4}=\frac{4}{9}=\frac{36}{81} \Rightarrow (0.\overline{2})^2\neq 0.\overline{4}$
(5) ○：$\frac{1}{0.\overline{5}}-1=\frac{1}{\frac{5}{9}}-1=\frac{9}{5}-1=0.8$ 為有限小數，故選(2)(3)(5)

((1)(4)) 6. 已知 $p=\frac{b}{a}$，且 a，b 皆為整數，則下列哪些數不可能為 p？

(1) $\sqrt{2}$
(2) 0
(3) $3.\overline{14}$
(4) π(圓周率)
(5) 1.234

6. 因為 $p=\frac{b}{a}$，且 a，b 皆為整數
所以 p 為有理數
又 $\sqrt{2}$，π 皆為無理數
所以 p 不可能為 $\sqrt{2}$ 或 π
故選(1)(4)

＊((1)(2)(4)) 7. 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，已知 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(-4，0)$ 與 $(0，0)$，且 $f(x)$ 有最小值。請選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 的最高次項係數為正數
(2) $f(x)$ 的最小值發生於 $x=-2$
(3) $f(x)=x^2+4x$
(4) $f(3)<f(4)$
(5) $f(3)>f(-8)$

＊((1)(3)) 8. 已知 a，b，p 為正實數，$1\leq p<10$，若 $a^2=b^3=p\times 10^{12}$，請選出正確的選項。

(1) $a>b$
(2) a 的整數部分為 6 位數
(3) b 的整數部分為 5 位數
(4) a^4 的整數部分為 25 位數
(5) ab 的整數部分可能為 12 位數

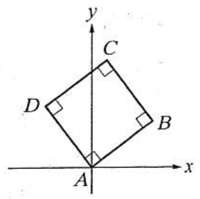
8. (1) ○：因為 $a^2=b^3=p\times 10^{12}>1$
所以 $a=b^{\frac{3}{2}}>b$
(2) ×：$a=\sqrt{p}\times 10^6$，其中 $1\leq\sqrt{p}<\sqrt{10}<4$
$\Rightarrow a$ 為 7 位數
(3) ○：$b=\sqrt[3]{p}\times 10^4$，其中 $1\leq\sqrt[3]{p}<\sqrt[3]{10}<3$
$\Rightarrow b$ 為 5 位數

三、選填題（每格完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分，共 28 分）

9. 某高中研究學生平均每日讀數學的時間 t（小時）與段考數學成績 S 的關係恰為一個二次函數 $S=-3t^2+30t+15$，若 $0\le t\le 6$，則學生每日讀數學的時間為 $\underline{\quad 9 \quad}$ 小時時，數學成績會最高。

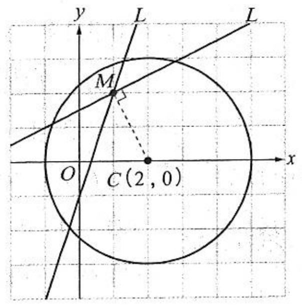
9. $S=-3t^2+30t+15=-3(t^2-10t)+15=-3(t-5)^2+90$
當 $t=5$ 時，S 有最大值 90
即學生每日讀數學 5 小時時，數學成績會最高

10. 坐標平面上 $ABCD$ 為一正方形，若 $\overline{AB}$ 的斜率為 $\dfrac{3}{4}$ 且 $\overline{AC}$ 的斜率大於 0，則 $\overline{AC}$ 的斜率為 $\underline{\quad 10 \quad}$。



10. 將正方形 $ABCD$ 平移，使得 A 之坐標為 $(0,0)$
因為平移不改變 $\overline{AB}$ 之斜率，所以 $\overline{AB}$ 斜率為 $\dfrac{3}{4}$
可令 $B(4a,3a)$，$a>0$，則 $\overline{AB}=\sqrt{(4a)^2+(3a)^2}=5a$
因為 $\angle DAB=90°$，所以 $m_{AD}\cdot m_{AB}=-1 \Rightarrow m_{AD}=-\dfrac{4}{3}$
可令 $D(-3t,4t)$，$t>0$，因為 $\overline{AB}=\overline{AD}$，所以 $\sqrt{(-3t)^2+(4t)^2}=5a \Rightarrow t=a \Rightarrow D(-3a,4a)$
設 $C(x,y)$，因為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相平分，所以 $\left(\dfrac{0+x}{2},\dfrac{0+y}{2}\right)=\left(\dfrac{4a+(-3a)}{2},\dfrac{3a+4a}{2}\right)$
$\Rightarrow (x,y)=(a,7a)$，故 $\overline{AC}$ 的斜率為 $\dfrac{7a-0}{a-0}=7$

11. 過點 $M(1,2)$ 的直線 L 將圓 Γ：$(x-2)^2+y^2=9$ 分成兩段弧，當其中的劣弧最短時，直線 L 的斜率為 $\dfrac{\text{11-1}}{\text{11-2}}$。（化為最簡分數）

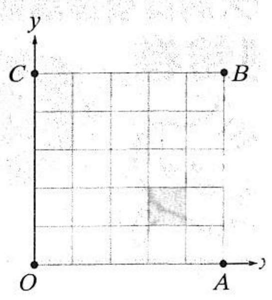


11. 設圓 Γ 之圓心為 C
直線 L 過 M 將圓 Γ 分成兩段弧，其中劣弧欲最短
$\Rightarrow$ 直線 L 過 M 與圓 Γ 所截之弦最短，此時 M 為該弦之中點
又圓心 C 與 M 之連線段與該弦垂直
$\Rightarrow m_{CM}\cdot m_L=-1 \Rightarrow \dfrac{0-2}{2-1}\cdot m_L=-1 \Rightarrow m_L=\dfrac{1}{2}$

12. 設 $f(x)$ 為實係數多項式，已知 $xf(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 6，$f(x)+x$ 除以 $x-3$ 的餘式為 8，若 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $ax+b$，則數對 (a,b) 為 $\underline{(\text{12-1},\ \text{12-2}\ \text{12-3})}$。

12. 由餘式定理
$xf(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 6 $\Rightarrow 2\cdot f(2)=6 \Rightarrow f(2)=3$
$f(x)+x$ 除以 $x-3$ 的餘式為 8 $\Rightarrow f(3)+3=8 \Rightarrow f(3)=5$
設 $f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$
又 $f(2)=2a+b=3$
$f(3)=3a+b=5$
$\Rightarrow a=2$，$b=-1$
即數對 $(a,b)=(2,-1)$

四、混合題（共 16 分）



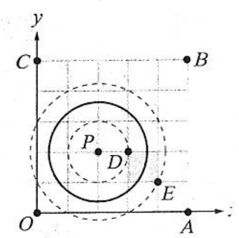
有一種草地上的灑水器，其澆水的方式是以設置點為圓心，向 r 公尺遠處噴水且繞著圓心旋轉一周，即水噴到的地方恰為一個半徑長 r 公尺的圓。如右圖，今有一片規畫為 5×5 正方格的草地，其每一個方格皆為邊長 1 公尺的正方形區域，若以 O 為原點，$\overrightarrow{OA}$ 為 x 軸正向，$\overrightarrow{OC}$ 為 y 軸正向，設立一平面坐標系，請回答下列問題：

1. 規定水有澆到一個小正方形方格內（不含邊界），就算那塊方格有澆到水。若將一個灑水器設置在坐標 $(2,2)$ 處，澆水半徑 r 可任意調整，則當 r 為下列哪些選項中的值時，可以讓圖中的陰影區域方格被澆到水？（多選，全對得 6 分，答錯 1 個選項得 4 分，答錯 2 個選項得 2 分，答錯多於 2 個選項或未作答者得 0 分）

(1) $\sqrt{2}$　　(2) $\dfrac{3}{2}$　　(3) 2　　(4) $\sqrt{5}$　　(5) 3

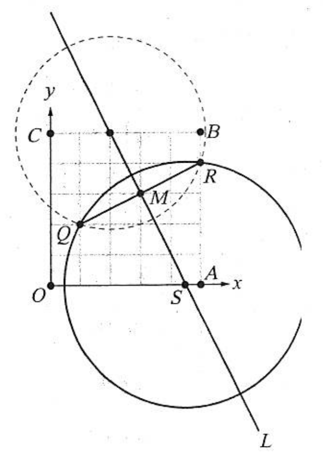
答：$\underline{\text{(1)(2)(3)}}$。

2. 若點 $(1,2)$ 與 $(5,4)$ 皆會被水澆到，且灑水器設置在此正方形草地（含邊界）上，則澆水半徑的最大值為何？（10 分）



解：1. 設 $P(2,2)$，$D(3,2)$，$E(4,1)$
當 $\overline{PD}<r<\overline{PE}$ 時，可以讓圖中的陰影區域方格被澆到水
又 $\overline{PD}=1$，$\overline{PE}=\sqrt{(4-2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$，所以 $1<r<\sqrt{5}$
故選(1)(2)(3)

2. 設 $Q(1,2)$，$R(5,4)$，$\overline{QR}$ 的中點為 M，$\overline{QR}$ 的斜率為 m_{QR}，L 的斜率為 m_L
因為點 Q 與 R 皆會被水澆到，所以圓心落在 $\overline{QR}$ 的中垂線 L 上
$\Rightarrow m_{QR}\cdot m_L=-1$ 且 L 過點 M
$m_{QR}=\dfrac{4-2}{5-1}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow m_L=-2$
又 $M\left(\dfrac{1+5}{2},\dfrac{2+4}{2}\right)=M(3,3)$，所以 L：$y-3=-2(x-3) \Rightarrow L$：$y=-2x+9$



由右圖可知，
欲使澆水半徑最大，灑水器應置於 L 與 x 軸的交點 S 處
$\begin{cases} y=-2x+9 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{9}{2}$，$y=0$
即 $S\left(\dfrac{9}{2},0\right)$
故澆水半徑的最大值為
$\overline{SQ}=\sqrt{\left(\dfrac{9}{2}-1\right)^2+(0-2)^2}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$（公尺）