大學入學考試中心九十八學年度學科能力測驗試題數學科

第一部份：選擇題(佔 55 分)

壹、單選題(佔 30 分)

說明：第 1 至 6 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1.數列 a_1+2，…，a_k+2k，…，$a_{10}+20$ 共有十項，且其和為 240，則 $a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_{10}$ 之值為(1) 31 (2) 120 (3) 130 (4) 185 (5) 218

解 1：$(a_1+2)+\cdots+(a_k+2k)+\cdots+(a_{10}+20)=(a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots+a_{10})+(2+4+\cdots+2k+\cdots+20)$

$\Rightarrow 240=(a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots+a_{10})+2(1+2+\cdots+k+\cdots+10)$

$\Rightarrow 240=(a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots+a_{10})+110$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots+a_{10}=240-110=130$

解 2：$(a_1+2)+\cdots(a_k+2k)+\cdots+(a_{10}+20)=\sum_{k=1}^{10}(a_k+2k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}k$

$\Rightarrow 240=\sum_{k=1}^{10}a_k+2(1+2+\cdots+10)=\sum_{k=1}^{10}a_k+110$

$\therefore a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k=130$

答：(3)

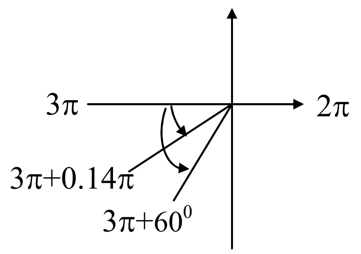
2.令 $a=\cos(\pi^2)$，試問下列哪一個選項是對的？

(1) $a=-1$ (2) $-1<a\le-\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}<a\le 0$ (4) $0<a\le\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}<a\le 1$

解：$\because \pi^2=(3.14\cdots)^2\doteqdot 9.86=6.28+3.48\doteqdot 3.14\pi$

$\therefore \pi^2$ 在第三象限內，$\Rightarrow 3\pi<\pi^2\le\frac{10}{3}\pi$，如右圖

$\therefore -1=\cos 3\pi<\cos\pi^2\le\cos\frac{10}{3}\pi=-\frac{1}{2}$



答：(2)

3.已知 $f(x)$，$g(x)$是兩個實係數多項式，且知 $f(x)$除以 $g(x)$的餘式為 x^4-1。試問下列哪一個選項不可能是 $f(x)$與 $g(x)$的公因式？

(1) 5 (2) $x-1$ (3) x^2-1 (4) x^3-1 (5) x^4-1

解：設 $f(x)=g(x)Q(x)+(x^4-1)$

根據輾轉除法原理：$(f(x),\ g(x))=(g(x),\ (x^4-1))$

又 $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

$\Rightarrow f(x)$，$g(x)$的最大公因式可能為：1，$x-1$，$x+1$，x^2+1，x^2-1，$(x+1)(x^2+1)$，$(x-1)(x^2+1)$，$(x^2-1)(x^2+1)$及其非零的倍數

得知 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$不可能為其公因式

答：(4)

4.甲、乙、丙三所高中的一年級分別有 3、4、5 個班級。從這 12 個班級中隨機選取一班參加國文抽考，再從未被抽中的 11 個班級中隨機選取一班參加英文抽考。則參加抽考的兩個班級在同一所學校的機率最接近以下哪個選項？

(1) 21%　(2) 23%　(3) 25%　(4) 27%　(5) 29%

解：根據題意，此兩個班級可能同屬於甲或乙或丙高中，則

若在甲高中，機率＝$\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}$

若在乙高中，機率＝$\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}$

若在丙高中，機率＝$\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}$

$\therefore \frac{3}{12}\times\frac{2}{11}+\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}+\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{38}{132}=0.28787878\cdots\doteqdot 28.78\%\doteqdot 29\%$

答：(5)

5.假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里。兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為 45^0，則丙、丁兩鎮間的距離約為

(1) 24.5 公里　(2) 25 公里　(3) 25.5 公里　(4) 26 公里　(5) 26.5 公里

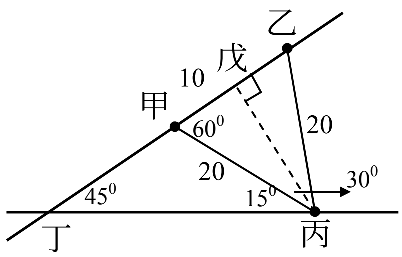
解 1：(1)如右圖，取甲、乙兩鎮的中點戊，連接線段丙戊

$\because \Delta$甲乙丙為正三角形，$\therefore \overline{丙戊}$垂直$\overline{甲乙}$

(2)在直角Δ甲丙戊中，得知$\overline{丙戊}=10\sqrt{3}$

(3)在等腰直角Δ丁丙戊中，

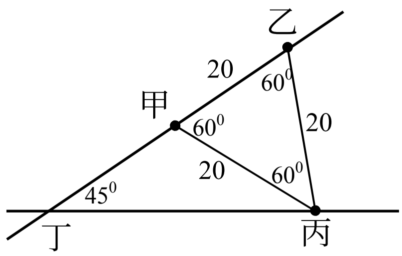
$\overline{丙丁}=\sqrt{2}\,\overline{丙戊}=10\sqrt{6}\doteqdot 24.5$



解 2：(1)如右圖，$\because \Delta$甲乙丙為正三角形，$\therefore \angle 乙=60^0$

(2)在Δ乙丙丁中，根據正弦定理：$\frac{\overline{乙丙}}{\sin 45^0}=\frac{\overline{丙丁}}{\sin 60^0}$

$\Rightarrow \frac{20}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\overline{丙丁}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，$\therefore \overline{丙丁}=10\sqrt{6}\doteqdot 24.5$



解 3：(1)如右圖，過甲作$\overline{甲戊}$垂直$\overline{丙丁}$於戊

在Δ甲丁戊中，設$\overline{丁戊}=\overline{甲戊}=x$

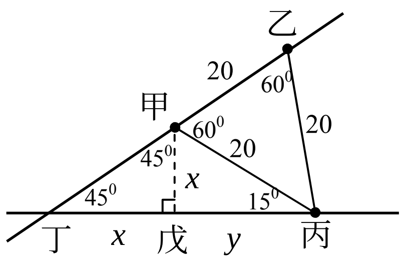
在Δ甲丙戊中，設$\overline{丙戊}=y$

(2)在Δ甲丙戊中，

$\overline{丁戊}=x=20\sin 15^0=20\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{6}-5\sqrt{2}$

$\overline{丙戊}=y=20\cos 15^0=20\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{6}+5\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overline{丙丁}=x+y=(5\sqrt{6}-5\sqrt{2})+(5\sqrt{6}+5\sqrt{2})=10\sqrt{6}\doteqdot 24.5$



答：(1)

6.試問坐標平面上共有幾條直線，會使得點 O(0，0)到此直線之距離為 1，且點 A(3，0)到此直線之距離為 2？

(1) 1 條　(2) 2 條　(3) 3 條　(4) 4 條　(5)無窮多條

解 1：設此直線為 L：$ax+by+c=0$

$\therefore d(O, L)=\dfrac{|0+0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$，$\therefore c=\pm\sqrt{a^2+b^2}$，即 $c^2=a^2+b^2$

$d(A, L)=\dfrac{|3a+0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，$\therefore |3a+c|=2\sqrt{a^2+b^2}=2c$，得知 $3a=c$ 或 $a=-c$

(i)當 $3a=c$ 時，代入 $c^2=a^2+b^2$，得 $b=\pm2\sqrt{2}\,a$

$\therefore(a, b, c)=(a, \pm2\sqrt{2}\,a, 3a)$，有 2 組解，即有 2 條直線

(ii)當 $a=-c$ 時，代入 $c^2=a^2+b^2$，得 $b=0$

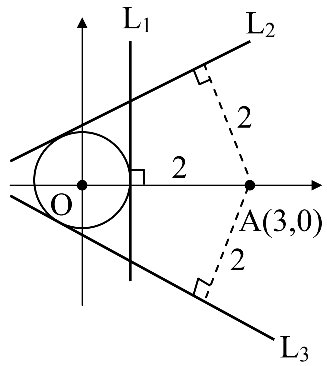
$\therefore(a, b, c)=(a, 0, -a)$，有 1 組解，即有 1 條直線

$\therefore$共有 3 條直線

解 2：$\because$點 O(0，0)到此直線之距離為 1

即此直線為以 O 為圓心之單位圓的切線

$\therefore$如右圖，知共有 L_1，L_2，L_3 等 3 條直線滿足



答：(3)

貳、多選題(佔 25 分)

說明：第 7 至 11 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項者可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項者不給分。

7.試問下列哪些選項中的數是有理數？

(1) 3.1416　(2) $\sqrt{3}$　(3) $\log_{10}\sqrt{5}+\log_{10}\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{\sin15^0}{\cos15^0}+\dfrac{\cos15^0}{\sin15^0}$　(5)方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$ 的唯一實根

解：根據題意，即哪些數可以表示為 $\dfrac{q}{p}$ 之型式

(1) $3.1416=\dfrac{31416}{10000}$ 是有理數

(2) $\sqrt{3}$ 為無理數，不可以表示成 $\dfrac{q}{p}$ 之型式

(3) $\log_{10}\sqrt{5}+\log_{10}\sqrt{2}=\log_{10}\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$ 是有理數

(4) $\dfrac{\sin 15^0}{\cos 15^0}+\dfrac{\cos 15^0}{\sin 15^0}=\dfrac{2(\sin^2 15^0+\cos^2 15^0)}{2\sin 15^0\cos 15^0}=\dfrac{2}{\sin 30^0}=4$ 是有理數

或 $\dfrac{\sin 15^0}{\cos 15^0}+\dfrac{\cos 15^0}{\sin 15^0}=\tan 15^0+\cot 15^0=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$

(5)根據實係數多項式方程式有理根檢驗法(牛頓法)得之，方程式可能之有理根為±1

當 $x=1$ 時，不滿足方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$

當 $x=-1$ 時，不滿足方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$

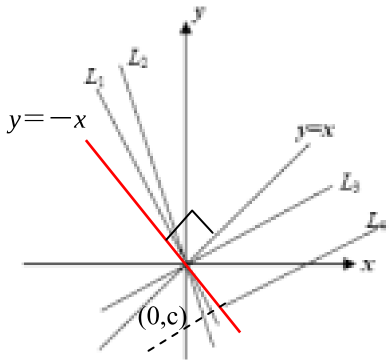
∴方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$ 的唯一實根，不是有理數

答：(1)(3)(4)

8.坐標平面上四條直線 L_1，L_2，L_3，L_4 與 x 軸、y 軸及直線 $y=x$ 的相關位置如圖所示，其中 L_1 與 L_3 垂直，而 L_3 與 L_4 平行。設 L_1，L_2，L_3，L_4 的方程式分別為 $y=m_1x$，$y=m_2x$，$y=m_3x$ 以及 $y=m_4x+c$。試問下列哪些選項式正確的？

(1) $m_3>m_2>m_1$　(2) $m_1\cdot m_4=-1$　(3) $m_1<-1$

(4) $m_2\cdot m_3<-1$　(5) $c>0$



解：(1)斜率大小為 $m_3>m_1>m_2$

(2)∵直線 L_1 與 L_4 垂直，∴ $m_1\cdot m_4=-1$

(3)∵ $m_1\cdot m_3=-1$，且 $m_3<1$

∴ $m_1=-\dfrac{1}{m_3}<-\dfrac{1}{1}=-1$

(4)由(1)知 $m_2<m_1$，∵ $m_2\,m_3<m_1\,m_3=-1$

(5)當 $x=0$ 時，L_4：$y=c<0$

答：(2)(3)(4)

9.某廠商委託民調機構在甲、乙兩地調查聽過某項產品的居民佔當地居民的百分比(以下簡稱為「知名度」)。結果如下：在 95%信心水準之下，該產品在甲、乙兩地的知名度之信賴區間分別為[0.50，0.58]、[0.08，0.16]。試問下列哪些選項是正確的？

(1)甲地本次的參訪者中，54%的人聽過該產品

(2)此次民調在乙地的參訪人數少於甲地的參訪人數

(3)此次民調結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於 95%

(4)若在乙地以同樣方式進行多次民調，所得知名度有 95% 的機會落在區間[0.08，0.16]

(5)經密集廣告宣傳後，在乙地再進行民調，並增加參訪人數達原人數的四倍，則在 95%信心水準之下該產品的知名度之信賴區間寬度會減半(即 0.04)

解：(1)甲地：0.54±0.04；乙地：0.12±0.04

(2)$\because \sqrt{\dfrac{0.54\times(1-0.54)}{n_{甲}}}=\sqrt{\dfrac{0.12\times(1-0.12)}{n_{乙}}}$

$\Rightarrow\ n_{甲}:n_{乙}=(0.54\times0.46):(0.12\times0.88)\fallingdotseq 2.35:1$

(3)樣本機率大於 95%，但是母群體不一定

(4)∵95%信心水準是設定值，而甲、乙兩地為不同的樣本，結果(知名度之信賴區間)不一定相同

(5)改變前的知名度之信賴區間：$\sqrt{\dfrac{p_1\times(1-p_1)}{n}}$

改變後的知名度之信賴區間：$\sqrt{\dfrac{p_2\times(1-p_2)}{4n}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{p_2\times(1-p_2)}{n}}$

∵p_1 與 p_2 不一定相同，∴信賴區間寬度不一定減半

答：(1)(2)

10.設 a，b，c 為實數，下列有關線性方程組 $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$ 的敘述哪些是正確的？

(1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解

(2)若此線性方程組有解，則 $11a-3b\neq7$

(3)若此線性方程組有解，則 $c=14$

(4)若此線性方程組無解，則 $11a-3b=7$

(5)若此線性方程組無解，則 $c\neq14$

解 1：(1)∵方程組的方程式均為空間中的平面，

∴令 E_1：$x+2y+az=1$，E_2：$3x+4y+bz=-1$，E_3：$2x+10y+7z=c$

⇒若方程組有解，可能有一組解、無限多組解、無解

(2)$\because \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & b \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix}=22a-6b-14$，則

(i)若方程組有一組解時，$\Delta=22a-6b-14\neq0$，$\therefore 11a-3b\neq7$

(ii)若方程組有無限多組解、無解時，$\Delta=22a-6b-14=0$，$\therefore 11a-3b=7$

(3) (i)若方程組有一組解，$\Delta=22a-6b-14\neq0$，$\therefore 11a-3b\neq7$

(ii)若方程組有無限多組解，則$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & c \end{vmatrix}=28-2c=0$，$\therefore c=14$

(4)由(2)知方程組有無解時，$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&a\\3&4&b\\2&10&7\end{vmatrix}=22a-6b-14=0$，$\therefore 11a-3b=7$

(5)若方程組有無限多組解時，$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&4&-1\\2&10&c\end{vmatrix}=28-2c=0$，$\therefore c=14$

解 2：利用增廣矩陣列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&a&1\\3&4&b&-1\\2&10&7&c\end{array}\right]\begin{array}{c}\\-3\\-2\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&a&1\\0&-2&b-3a&-4\\0&6&7-2a&c-2\end{array}\right]\begin{array}{c}\\\\3\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc}1&2&a&1\\0&-2&b-3a&-4\\0&0&7-11a+3b&c-14\end{array}\right]$$

(1)若方程組有解，可能有一組解、無限多組解、無解

(2)若方程組有解，則

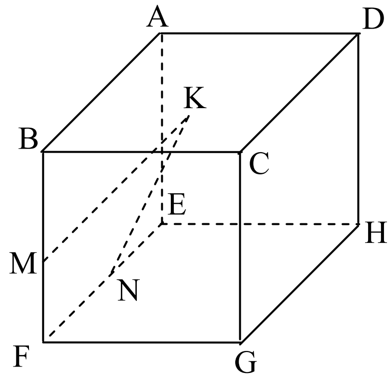
(i)有一組解時，則 $7-11a+3b\neq 0$，$\therefore 11a-3b\neq 7$

(ii)無限多組解時，則 $7-11a+3b=0$，且 $c-14=0$，$\therefore 11a-3b=7$ 且 $c=14$

(3)若方程組無解，則 $7-11a+3b=0$，且 $c-14\neq 0$，$\therefore 11a-3b=7$ 且 $c\neq 14$

答：(4)(5)

11.如圖所示，正立方體 ABCD－EFGH 的稜長等於 2(即 $\overline{AB}=2$)，K 為正方形 ABCD 的中心，M、N 分別為線段 BF、EF 的中點。試問下列哪些選項是正確的？



(1) $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

(2)(內積) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$

(3) $\overline{KM}=3$

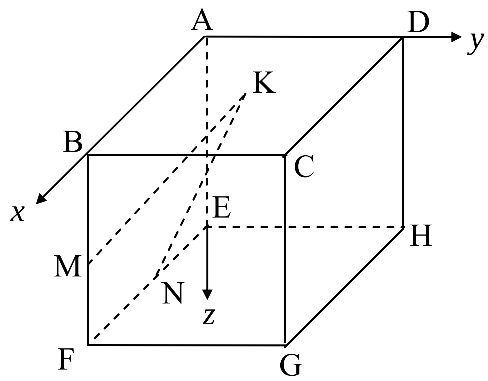
(4) ΔKMN 為一直角三角形

(5) ΔKMN 的面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

解：建立一坐標系，如右圖

取 A(0, 0, 0)，B(2, 0, 0)，D(0, 2, 0)，E(0, 0, 2)

$\therefore$ M(2, 0, 1)，N(1, 0, 2)，K(1, 1, 0)



(1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$=\frac{1}{2}(2, 0, 0)-\frac{1}{2}(0, 2, 0)+\frac{1}{2}(0, 0, 2)$

$=(1, -1, 1)=\overrightarrow{KM}$

(2) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=(1, -1, 1)\cdot(2, 0, 0)=2$

(3) $\overline{KM}=|\overrightarrow{KM}|=|(1,\ -1,\ 1)|=\sqrt{3}$

(4) $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{MN}=(1,\ -1,\ 1)\cdot(-1,\ 0,\ 1)=0$，$\therefore\angle KMN=90^0$，

$\Rightarrow \Delta$KMN 為一直角三角形

(5) ΔKMN 的面積$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{KM}||\overrightarrow{MN}|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

答：(1)(4)

第二部份：選填題(佔 45 分)

說明：1.第 A 至 I 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(12－33)。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.從 1 到 100 的正整數中刪去所有的質數、2 的倍數及 3 的倍數之後，剩下最大的數為____。

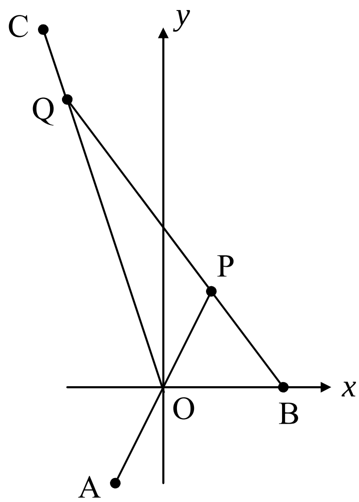
解：∵100 為 2 的倍數；99 為 3 的倍數；98 為 2 的倍數；97 為質數；96 為 2、3 的倍數，

∴95 不是質數、2 的倍數及 3 的倍數，∴95 為所求

答：95

B.坐標平面上有四點 O(0, 0)，A(－3, －5)，B(6, 0)，C(x, y)。今有一質點在 O 點沿 $\overline{AO}$ 方向前進 $\overline{AO}$ 距離後停在 P，再沿 $\overline{BP}$ 方向前進 $2\overline{BP}$ 距離後停在 Q。假設此質點繼續沿 $\overline{CQ}$ 方向前進 $3\overline{CQ}$ 距離後回到原點 O，則(x, y)＝(___, ___)。

解：如右圖，



(1) ∵$\overrightarrow{AO}=(3,\ 5)$，$\therefore(0,\ 0)+(3,\ 5)=(3,\ 5)$，$\Rightarrow$ P(3, 5)

(2) ∵$\overrightarrow{BP}=(-3,\ 5)$，

$\therefore(3,\ 5)+2(-3,\ 5)=(-3,\ 15)$，$\Rightarrow$ Q(－3, 15)

(3) ∵$\overrightarrow{QO}=3\overrightarrow{CQ}$，$\therefore(3,\ -15)=3(-3-x,\ 15-y)$

$\Rightarrow(-3-x,\ 15-y)=(1,\ -5)$，得知$(x,\ y)=(-4,\ 20)$

答：(－4, 20)

C.抽獎遊戲中，參加者自相中抽出一球，確定顏色後放回。只有抽得藍色或紅色球者可得消費券，其金額分別為(抽得藍色球者)2000 元、(抽得紅色球者)1000 元。箱中已置有 2 顆藍色球及 5 顆紅色球。在抽出任一球之機率相等的條件下，主辦單位希望參加者所得消費券的期望值為 300 元，則主辦單位應於箱內再置入____顆其他顏色的球。

解：設再置入 x 顆其他顏色的球，根據題意列表如下：

事件	抽得藍色	抽得紅色	抽得其他顏色
數值	2000 元	1000 元	0 元
機率	$\frac{2}{x+7}$	$\frac{5}{x+7}$	$\frac{x}{x+7}$

期望值$=2000\times\frac{2}{x+7}+1000\times\frac{5}{x+7}+0\times\frac{x}{x+7}=300$，解得 $x=23$

答：23

D.坐標平面上有兩條平行直線。它們的 x 截距相差 20，y 截距相差 15。則這兩條平行直線的距離為_____。

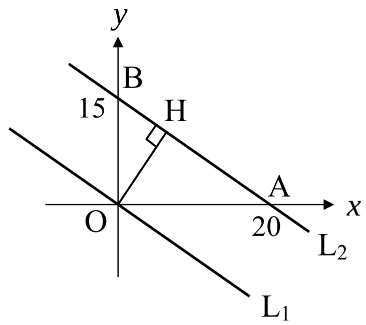
解：設 L_1 與 L_2 如右圖不失為題意的一般性，且 A(20，0)，B(0，15)，則

在ΔAOB 中，$\overline{AB}=\sqrt{20^2+15^2}=25$

ΔAOB 面積$=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times20\times15=\frac{1}{2}\times25\times\overline{OH}$，得 $\overline{OH}=12$

$\Rightarrow L_1$ 與 L_2 的距離為 $\overline{OH}=12$



答：12

E.假設Γ_1為坐標平面上一開口向上的拋物線，其對稱軸為 $x=-\frac{3}{4}$ 且焦距(交點到頂點的距離)為$\frac{1}{8}$。若Γ_1與另一拋物線Γ_2：$y=x^2$ 恰交於一點，則Γ_1的頂點之 y 座標為_______。(化成最簡分數)

解：(1)根據題意，設Γ_1：$(x+\frac{3}{4})^2=4(\frac{1}{8})(y-k)=\frac{1}{2}(y-k)$，即$\Gamma_1$的頂點座標為$(-\frac{3}{4}，k)$

$\therefore$交點$\begin{cases}\Gamma_1:(x+\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}(y-k)\\ \Gamma_2:y=x^2\end{cases}$，由 $y=x^2$ 代入$(x+\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}(y-k)$

$\Rightarrow (x+\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}(x^2-k)$，$\therefore$整理得 $x^2+3x+\frac{9}{8}+k=0$

(2)$\because\Gamma_1$與Γ_2恰交於一點，$\therefore x^2+3x+\frac{9}{8}+k=0$ 有二重根

$\Rightarrow$ 判別式$=3^2-4(\frac{9}{8}+k)=0$，得 $k=\frac{9}{8}$，亦即Γ_1的頂點之 y 座標為$\frac{9}{8}$

答：$\frac{9}{8}$

F.某公司為了響應節能減碳政策，決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 75% 。公司希望每年依固定的比率(當年和前一年排放量的比)逐年減少二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少_____%的二氧化碳的排放量。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)

解：設當年和前一年排放量的比為 x，則根據題意得知 $x^5=75\%=\dfrac{3}{4}$

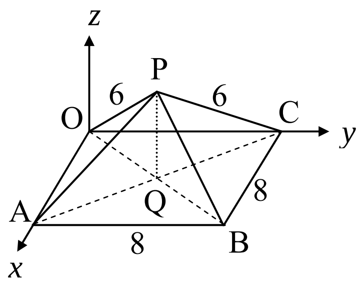
取 $\log x^5=\log\dfrac{3}{4}$，$\Rightarrow 5\log x=\log 3-\log 4 \doteqdot 0.4771-0.6020=-0.1249$

$\therefore \log x \doteqdot -0.02498$，$\Rightarrow$ $\log\dfrac{1}{x}=0.02498=\log 1.059$，得知 $x=\dfrac{1}{1.059}\doteqdot 0.9442$

$\Rightarrow$ 遞減率$=1-x=0.0558\doteqdot 5.6\%$

答：5.6%

G.坐標空間中 xy 平面上有一正方形，其頂點為 O(0, 0, 0)，A(8, 0, 0)，B(8, 8, 0)，C(0, 8, 0)。另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O，A，B，C 四點的距離皆等於 6。若 $x+by+cz=d$ 為通過 A，B，P 三點的平面，則$(b, c, d)=($___，___，___$)$。



解：(1)如右圖，設正方形 OABC 的中心為 Q(4, 4, 0)

根據題意，P 點必在 Q 的正上方，$\therefore$設 P(4, 4, k)，$k>0$

(2)$\because \overline{OP}=\sqrt{4^2+4^2+k^2}=6$，得知 $k=2$，$\therefore$P(4, 4, 2)

(3)$\because \overrightarrow{AP}=(-4,\ 4,\ 2)=-2(2,\ -2,\ -1)$

$\overrightarrow{AB}=(0,\ 8,\ 0)=9=8(0,\ 1,\ 0)$

$\Rightarrow$此平面之法向量：$(2,\ -2,\ -1)\times(0,\ 1,\ 0)=(1,\ 0,\ 2)$

$\Rightarrow$設通過 A，B，P 三點的平面為 $x+0y+2z=t$

A(8, 0, 0)代入，得 $t=8$，即平面為 $x+0y+2z=8$

$\therefore(b,\ c,\ d)=(0,\ 2,\ 8)$

答：(0, 2, 8)

H.有一橢圓與一雙曲線有共同的焦點 F_1、F_2，且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等。設 P 為此橢圓與雙曲線的一個交點，且 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$，則 $\overline{F_1F_2}=$_____。

解 1：設 $\overline{PF_1}=2a$，$\overline{PF_2}=2b$，$\overline{F_1F_2}=2c$，則 $4ab=64$

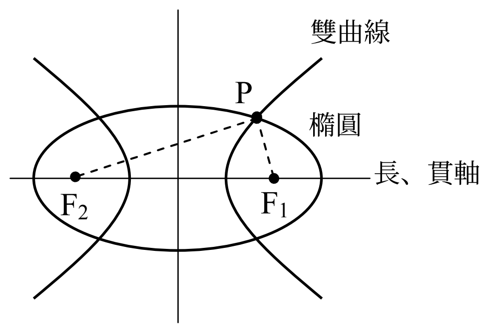
$\therefore$橢圓的長軸長$=2a+2b=2(a+b)$，短軸長$=2a-2b=2(a-b)$

又雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等，

$\therefore c^2=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab=64$，得 $c=8$，$\therefore \overline{F_1F_2}=2c=16$

解 2：(1)設 $\overline{F_1F_2}=2c$，雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長為 $2b$，且橢圓的長軸長為 $2a$

$\therefore$橢圓方程式：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，且 $c^2=a^2-b^2$



(2)如右圖，根據題意，$\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$

橢圓定義：$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

雙曲線定義：$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2b$

$\Rightarrow$由$(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})^2-(|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|)^2=4\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}$

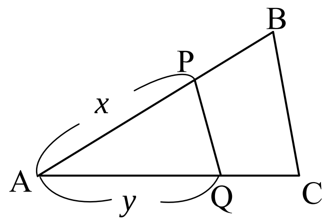
$\Rightarrow\therefore 4a^2-4b^2=4\times 64$

$\Rightarrow c^2=64$，$\therefore c=8$，得知$\overline{F_1F_2}=2c=16$

答：16

I.在ΔABC 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{8}$。設點 P，Q 分別在邊 AB、AC 上使得ΔAPQ 之面積為ΔABC 面積之一半，則$\overline{PQ}$之最小可能值為______。(化成最簡分數)

解：(1)如右圖，設$\overline{AP}=x$，$\overline{AQ}=y$



$\because\Delta$APQ 面積$=\dfrac{1}{2}\Delta$ABC 面積

$\therefore\dfrac{1}{2}\times x\times y\times\sin A=\dfrac{1}{2}\times 10\times 9\times\sin A\times\dfrac{1}{2}$，得知 $xy=45$

(2)根據餘弦定理$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos A=x^2+y^2-2\times 45\times\dfrac{3}{8}=x^2+y^2-\dfrac{135}{4}$

又由算幾不等式得 $x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy=90$

$\Rightarrow\overline{PQ}^2=x^2+y^2-\dfrac{135}{4}\geq 90-\dfrac{135}{4}=\dfrac{225}{4}$，$\therefore\overline{PQ}\geq\dfrac{15}{2}$

答：$\dfrac{15}{2}$

大學入學考試中心 98 學年度學力測驗試題分布一覽表

冊別	單元名稱	單選題	多選題	選填題	佔分
第一冊	Ch1 數與坐標系		8	A, D	15
	Ch2 數列與級數	1			5
	Ch3 多項式	3	7		10
第二冊	Ch1 指數與對數			F	5
	Ch2 三角函數 I	5		I	10
	Ch3 三角函數 II	2			5
第三冊	Ch1 平面向量			B	5
	Ch2 空間		10, 11	G	15
	Ch3 圓與球	6			5
第四冊	Ch1 圓錐曲線			E, H	10
	Ch2 排列組合				0
	Ch3 機率與統計	4	9	C	15