

## 大學入學考試中心九十七學年度學科能力測驗試題數學科

第一部份：選擇題(佔 60 分)

壹、單選題(佔 25 分)

說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 對任意實數  $x$  而言， $27^{(x^2+\frac{2}{3})}$  的最小值為：(1) 3 (2)  $3\sqrt{3}$  (3) 9 (4) 27 (5)  $81\sqrt{3}$ 解：  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$ ，且  $27^x$  為一遞增函數， $27^{(x^2+\frac{2}{3})} \geq 27^{\frac{2}{3}} = 9$ 

答：(3)

2. 在職棒比賽中 ERA 值是了解一個投手表現的重要統計數值。其計算方式如下：若此投手共主投  $n$  局，其總責任失分為  $E$ ，則其 ERA 值為  $\frac{E}{n} \times 9$ 。有一位投手在之前的比賽中共主投了 90 局，且這 90 局中他的 ERA 值為 3.2。再最新的一場比賽中此投手主投 6 局無責任失分，則打完這一場比賽後，此投手的 ERA 值成為：(1) 2.9 (2) 3.0 (3) 3.1 (4) 3.2 (5) 3.3解：90 局：ERA =  $\frac{E}{90} \times 9 = 3.2$ ， $E = 32$ 90 局 + 6 局：ERA =  $\frac{32}{96} \times 9 = 3$ 

答：(2)

3. 有一個圓形跑道分內、外兩圈，半徑分別為 30、50 公尺。今甲在內圈以等速行走、乙在外圈以等速跑步，且知甲每走一圈，乙恰跑了兩圈。若甲走了 45 公尺，則同時段乙跑了 (1) 90 公尺 (2) 120 公尺 (3) 135 公尺 (4) 150 公尺 (5) 180 公尺

解：(1) 設甲的速度為  $V_{\text{甲}}$ ，乙的速度為  $V_{\text{乙}}$ 

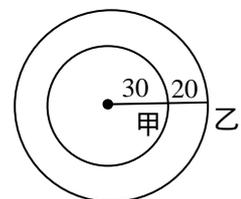
甲每走一圈，乙恰跑了兩圈，甲所花時間 = 乙所花時間

$$\Rightarrow T_{\text{甲}} = \frac{2\pi \cdot 30}{V_{\text{甲}}} = \frac{2(2\pi \cdot 50)}{V_{\text{乙}}} = T_{\text{乙}}, \text{ 得 } V_{\text{甲}} : V_{\text{乙}} = 3 : 10$$

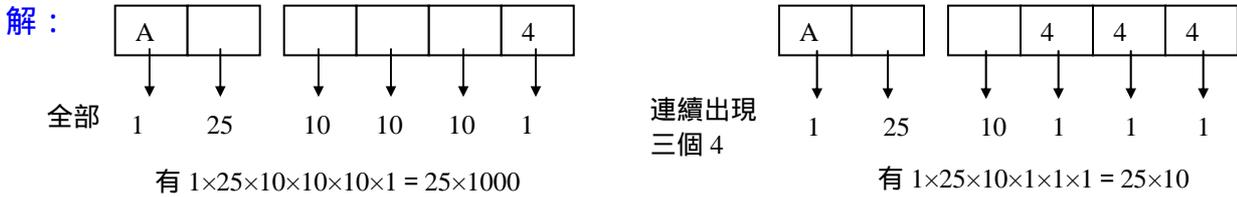
(2) 令  $V_{\text{甲}} = 3k$ ， $V_{\text{乙}} = 10k$ ， $k$  為正數，且同時段乙跑了  $x$  公尺

$$\text{甲走了 45 公尺甲所花時間} = \frac{45}{3k} = \frac{x}{10k}, \text{ 得 } x = 150$$

答：(4)



4.某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為 O 以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如：AA1234, AB4434 為可出現的車牌號碼；而 AO1234, AB3444 為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為 A 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為  
 (1)  $25 \times 9^3$       (2)  $25 \times 9^2 \times 10$       (3)  $25 \times 900$       (4)  $25 \times 990$       (5)  $25 \times 999$



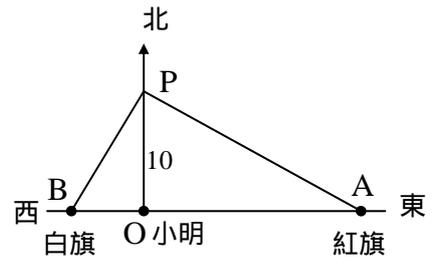
可能情形共有  $25 \times 1000 - 25 \times 10 = 25 \times 990$

答：(4)

5.廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩旗子之間。利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離為他與正西方白旗間距離的 6 倍；小明往正北方走了 10 公尺之後再測量一次，發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的 4 倍。試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪一個選項？(1) 60 公尺      (2) 65 公尺      (3) 70 公尺      (4) 75 公尺      (5) 80 公尺

解 1：根據題意作圖如右：

設  $\overline{OA} = 6a$ ， $\overline{OB} = a$ ； $\overline{PA} = 4b$ ， $\overline{PB} = b$ ， $a, b$  為正數  
 在  $\triangle BOP$  中， $b^2 = a^2 + 10^2 \dots 1$   
 在  $\triangle AOP$  中， $(4b)^2 = (6a)^2 + 10^2 \dots 2$   
 由 1 2 得知  $a = 5\sqrt{3}$ ， $b = 5\sqrt{7}$   
 紅白兩旗之間的距離 =  $7a = 35\sqrt{3} \approx 60.6$



解 2：如右圖，設  $\overline{OA} = 6a$ ， $\overline{OB} = a$ ； $\overline{PB} = \sqrt{a^2 + 10^2}$ ， $\overline{PA} = \sqrt{(6a)^2 + 10^2}$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\sqrt{(6a)^2 + 10^2}}{\sqrt{a^2 + 10^2}} = \frac{4}{1} \text{ , 平方解得 } a = 5\sqrt{3} \text{ ,}$$

紅白兩旗之間的距離 =  $7a = 35\sqrt{3} \approx 60.6$

答：(1)

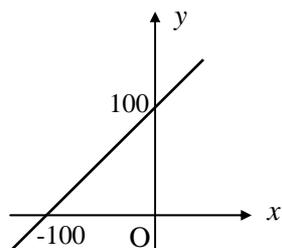
貳、多選題(佔 35 分)

說明：第 6 至 12 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項不給分。

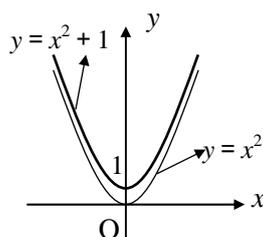
6.試問：在坐標平面上，下列哪些選項中的函數圖形完全落在 x 軸的上方？

- (1)  $y = x + 100$       (2)  $y = x^2 + 1$       (3)  $y = 2 + \sin x$       (4)  $y = 2^x$       (5)  $y = \log x$

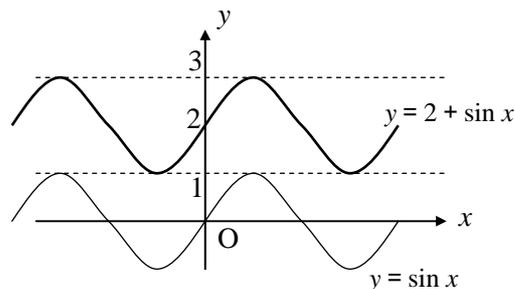
解：(1)



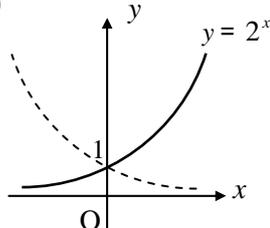
(2)



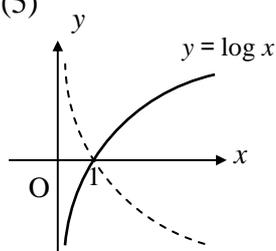
(3)



(4)



(5)



答：(2) (3) (4)

7. 某高中共有 20 個班級，每班各有 40 位學生，其中男生 25 人，女生 15 人。若從全校 800 人中以簡單隨機抽樣抽出 80 人，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 每班至少會有一人被抽中。
- (2) 抽出來的男生人數一定比女生人數多。
- (3) 已知小文是男生，小美是女生，則小文被抽中的機率大於小美被抽中的機率。
- (4) 若學生甲和學生乙在同一班，學生丙在另外一班，則甲、乙兩人同時被抽中的機率跟甲、丙兩人同時被抽中的機率一樣。
- (5) 學生 A 和學生 B 是兄弟，他們同時被抽中的機率小於  $\frac{1}{100}$ 。

解：(1) (2) (3) 不一定正確(因為每個人機會均等 =  $\frac{80}{800}$ ，且與性別無關)。

$$(4) \text{甲、乙兩人同時被抽中的機率} = \frac{C_2^2 C_{78}^{80-2}}{C_{80}^{80}} = \frac{80}{800} \times \frac{79}{799}$$

$$= \text{甲、丙兩人同時被抽中的機率。}$$

$$(5) \text{同時被抽中的機率} = \frac{80}{800} \times \frac{79}{799} < \frac{1}{100}。$$

答：(4) (5)

8. 已知  $a_1, a_2, a_3$  為一等差數列，而  $b_1, b_2, b_3$  為一等比數列，且此六數皆為實數。試問下列選項哪些是正確的？

- (1)  $a_1 < a_2$  與  $a_2 > a_3$  可能同時成立
- (2)  $b_1 < b_2$  與  $b_2 > b_3$  可能同時成立
- (3) 若  $a_1 + a_2 < 0$ ，則  $a_2 + a_3 < 0$
- (4) 若  $b_1 b_2 < 0$ ，則  $b_2 b_3 < 0$
- (5) 若  $b_1, b_2, b_3$  皆為正整數且  $b_1 < b_2$ ，則  $b_1$  整除  $b_2$

解：(1)公差  $d \geq 0$  時， $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ ；公差  $d < 0$  時， $a_1 < a_2 < a_3$

(2)當  $b_1 < 0$  且公比  $r < 0$  時， $b_1 < b_2$ ， $b_2 > b_3$

(3)當  $a_1 = -1$ ， $a_2 = 0$ ， $a_3 = 1$  不成立

(4)若  $b_1 b_2 < 0$ ，則  $b_1$ 、 $b_2$  異號， $b_2$ 、 $b_3$  也異號， $b_2 b_3 < 0$

(5)  $b_1 < b_2$ ，則  $1 < \frac{b_2}{b_1} =$  公比  $r$ ，但是  $r$  不一定為整數， $b_1$  不一定整除  $b_2$

答：(2) (4)

9. 已知在一容器中有 A, B 兩種菌，且在任何時刻 A, B 兩種菌的個數乘積為定值  $10^{10}$ 。為了簡單起見，科學家用  $P_A = \log(n_A)$  來記錄 A 菌個數的資料，其中  $n_A$  為 A 菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？

(1)  $1 \leq P_A \leq 10$ 。

(2) 當  $P_A = 5$  時，B 菌的個數與 A 菌的個數相同。

(3) 如果上週一測得  $P_A$  值為 4，而上週五測得  $P_A$  值為 8，表示上週五 A 菌的個數是上週一 A 菌個數的 2 倍。

(4) 若今天的  $P_A$  值比昨天增加 1，則今天的 A 菌比昨天多了 10 個。

(5) 假設科學家將 B 菌的個數控制為五萬個，則  $5 < P_A < 5.5$ 。

解：(1)  $1 \leq n_A < 10^{10}$ ， $0 \leq P_A < 10$ 。

(2)  $P_A = 5 = \log(n_A)$ ， $n_A = 10^5$ ；則 B 菌的個數 =  $\frac{10^{10}}{10^5} = 10^5$ 。

(3) 上週一  $P_A$  值為 4， $n_A = 10^4$ ；上週五  $P_A$  值為 8， $n_A = 10^8$ ； $\frac{10^8}{10^4} = 10^4$ 。

(4)  $P_A$  值增加 1，則增加 10 倍個，不是增加 10 個。

(5) B 菌的個數 = 五萬個， $n_A = 2 \times 10^5$ ， $P_A = \log(2 \times 10^5) = 5 + \log 2 \approx 5.301$

答：(2) (5)

10. 已知實係數多項式  $f(x)$  與  $g(x) = x^3 + x^2 - 2$  有次數大於 0 的公因式。

試問下列哪些選項是正確的？

(1)  $g(x) = 0$  恰有一實根。

(2)  $f(x) = 0$  必有實根。

(3) 若  $f(x) = 0$  與  $g(x) = 0$  有共同實根，則此實根必為 1。

(4) 若  $f(x) = 0$  與  $g(x) = 0$  有共同實根，則  $f(x)$  與  $g(x)$  的最高公因式為一次式。

(5) 若  $f(x) = 0$  與  $g(x) = 0$  沒有共同實根，則  $f(x)$  與  $g(x)$  的最高公因式為二次式。

解：  $g(x) = x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$

(1)  $g(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$  ,  $x = 1$  ,  $-1 \pm i$

(2)若公因式為  $x^2 + 2x + 2$  , 則  $f(x) = k(x)(x^2 + 2x + 2) = 0$  不一定有實根。

(3) $f(x) = 0$  與  $g(x) = 0$  有共同實根, 則公因式為  $x - 1$ 。

(4)若  $f(x) = g(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$ 時, 則最高公因式為三次式。

(5) $f(x)$ 與  $g(x)$ 的最高公因式為  $x^2 + 2x + 2$  , 為二次式。

答：(1)(3)(5)

11.設坐標空間中三直線  $L_1, L_2, L_3$  的方程式分別為  $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+4}{8}$  ,

$L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}$  ,  $L_3: \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$  , 試問下列哪些選項是正確的？

(1)  $L_1$  與  $L_2$  相交。

(2)  $L_2$  與  $L_3$  平行。

(3)點  $P(0, -3, -4)$  與  $Q(0, 0, 0)$  的距離即為點  $P$  到  $L_3$  的最短距離。

(4)直線  $L: \begin{cases} x=0 \\ \frac{y+3}{4} = \frac{z+4}{-3} \end{cases}$  與直線  $L_1, L_2$  皆垂直。

(5)三直線  $L_1, L_2, L_3$  共平面。

解：(1) 方向向量  $(1, 6, 8)$  與  $(1, 3, 4)$  不平行, 且  $(0, -3, -4)$  在  $L_1$  上, 也在  $L_2$  上。

$L_1$  與  $L_2$  相交。

(2) 方向向量  $(1, 3, 4)$  成比例, 且  $(0, -3, -4)$  在  $L_1$  上, 不在  $L_2$  上。

$L_1$  與  $L_2$  互相平行。

(3)  $\overline{PQ} = \sqrt{(0-0)^2 + (-3-0)^2 + (-4-0)^2} = 5$

設  $A(t, 3t, 4t) \in L_3, t \in \mathbb{R}$  ,

$$d(P, A) = \sqrt{(t-0)^2 + (3t+3)^2 + (4t+4)^2} = \sqrt{26t^2 + 50t + 25} > 5$$

意即  $d(P, A)$  的最小值 = 點  $P$  到  $L_3$  的最短距離  $> 5 = \overline{PQ}$

(4) 直線  $L$  的方向向量 =  $(0, 4, -3)$  ,

$$\text{又 } (0, 4, -3) \cdot (1, 6, 8) = 0, \quad L \perp L_1 \text{ 且 } (0, 4, -3) \cdot (1, 3, 4) = 0, \quad L \perp L_2$$

(5)包含  $L_2$  與  $L_3$  的平面為  $E: 0(x-0) + 4(y-0) - 3(z-0) = 0$  , 即  $4y - 3z = 0$

且點  $(k, 6k-3, 8k-4) \in L_1, k \in \mathbb{R}$  , 在  $E$  上(代入  $E$  成立), 得知  $L_1, L_2, L_3$  共平面。

答：(1)(2)(4)(5)

12.設  $\Gamma: x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$  為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？

(1)  $\Gamma$  的圓心坐標為  $(5, 0)$ 。

(2)  $\Gamma$  上的點與直線  $L: 3x + 4y - 15 = 0$  的最遠距離等於 4。

(3)直線  $L_1: 3x + 4y + 15 = 0$  與  $\Gamma$  相切。

(4)  $\Gamma$  上恰有兩個點與直線  $L_2: 3x + 4y = 0$  的距離等於 2。

(5)  $\Gamma$  上恰有四個點與直線  $L_3: 3x + 4y - 5 = 0$  的距離等於 2。

解：(1)利用配方法得 $\Gamma: (x - 5)^2 + y^2 = 16$ ，得知 $\Gamma$ 的圓心坐標為 $C(5, 0)$ ，其圓半徑 $r = 4$ 。

$$(2) \quad d(C, L) = \frac{|3(5) + 4(0) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0, \text{ 表示直線 } L \text{ 通過圓心。}$$

如圖一，最遠距離為點 $P$ 到 $L$ 的距離 = 圓半徑 = 4

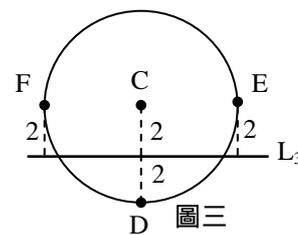
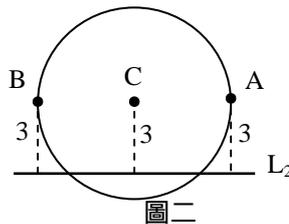
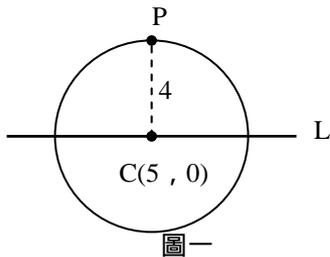
(3)  $d(C, L_1) = 6 \neq 4$ ，直線 $L_1$ 與 $\Gamma$ 不相切。

(4)  $d(C, L_1) = 3 < 4$ ，

如圖二，存在有 $A, B$ 兩點直線 $L_2: 3x + 4y = 0$ 的距離等於2。

(5)  $d(C, L_1) = 2 < 4$ ，

如圖三，存在有 $D, E, F$ 三點直線 $L_3: 3x + 4y - 5 = 0$ 的距離等於2。



答：(1) (2) (4)

第二部份：選填題(佔 40 分)

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13 - 43)。

2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 令 $A(-1, 6, 0)$ ， $B(3, -1, -2)$ ， $C(4, 4, 5)$ 為坐標空間中三點。若 $D$ 為空間中的一點且滿足 $3\overrightarrow{DA} - 4\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$ ，則點 $D$ 的坐標為(\_\_\_\_, \_\_\_\_ , \_\_\_\_ )。

解 1：利用代數方法解

設點 $D(x, y, z)$

$$3(-1-x, 6-y, 0-z) - 4(3-x, -1-y, -2-z) + 2(4-x, 4-y, 5-z) = \overrightarrow{0}$$

$$\text{得 } x = -7, y = 30, z = 18 \quad \text{即 } D(-7, 30, 18)$$

解 2：利用幾何方法解

$$\text{設 } O \text{ 為原點， } 3\overrightarrow{DA} - 4\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) - 4(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{0}$$

$$\text{得 } \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$$

$$= 3(-1, 6, 0) - 4(3, -1, -2) + 2(4, 4, 5) = (-7, 30, 18)$$

答： $D(-7, 30, 18)$

B. 在坐標平面上，設 A 為直線  $3x - y = 0$  上一點，B 為  $x$  軸上一點。若線段  $\overline{AB}$  中點的坐標為  $(\frac{7}{2}, 6)$ ，則點 A 的坐標為(\_\_\_\_, \_\_\_\_)，點 B 的坐標為(\_\_\_\_, \_\_\_\_)。

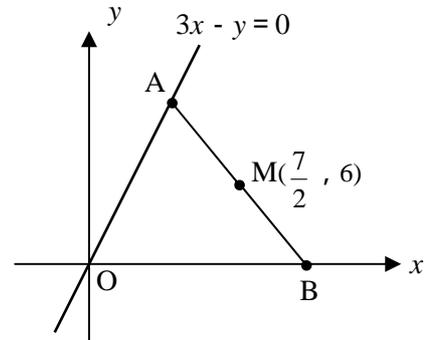
解 1：如圖，設  $A(a, b)$ ， $B(k, 0)$ ， $\overline{AB}$  中點  $M(\frac{7}{2}, 6)$

$A(a, b)$  在直線  $3x - y = 0$  上，得知  $3a - b = 0$

$$\text{又 } \frac{7}{2} = \frac{k+a}{2} \Rightarrow a = 7 - k \text{ 且 } 6 = \frac{b+0}{2} \Rightarrow b = 12$$

$$3(7 - k) - 12 = 0, k = 3, \Rightarrow B(3, 0)$$

$$a = 4, b = 12, \Rightarrow A(4, 12)$$



解 2：如圖，A 在直線  $3x - y = 0$  上，設  $A(t, 3t)$ ， $t \in \mathbb{R}$ ，  
B 為  $x$  軸上一點，設  $B(k, 0)$ ， $k \in \mathbb{R}$

$$\overline{AB} \text{ 中點的坐標為 } (\frac{7}{2}, 6) = (\frac{t+k}{2}, \frac{3t}{2}), \text{ 得知 } t = 4, k = 3$$

$$A(4, 12), B(3, 0)$$

答：A(4, 12)，B(3, 0)

C. 坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上有三個相異點  $A(1, 0)$ ， $B$ ， $C$ ，且  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 。已知銳角三角形 OAB 的面積為  $\frac{3}{10}$ ，則  $\Delta OAC$  的面積為\_\_\_\_。(化為最簡分數)

解：如右圖，不失為一般性

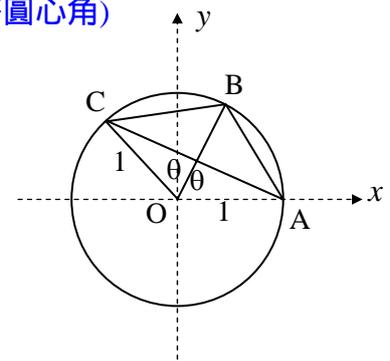
$\overline{AB} = \overline{BC}$ ，設  $\angle BOA = \angle BOC = \theta$  (等弦對等弧，等弧對等圓心角)

$$\Delta OAB = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \sin \theta = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5} \quad (\theta \text{ 為銳角})$$

$$\text{則 } \Delta OAC = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OC} \cdot \sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$$

答： $\frac{12}{25}$



D. 設  $F_1$  與  $F_2$  為坐標平面上雙曲線  $\Gamma: \frac{x^2}{8} - y^2 = 1$  的兩個焦點，且  $P(-4, 1)$  為上一點。

若  $\angle F_1 P F_2$  的角平分線與  $x$  軸交於點 D，則 D 的  $x$  坐標為\_\_\_\_。

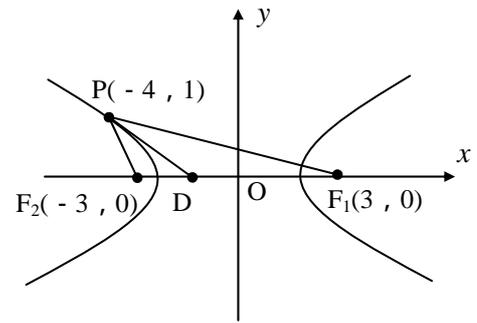
解 1：如圖，設  $a^2 = \sqrt{8}$ ， $b^2 = 1$ ， $c^2 = a^2 + b^2 = 9$ ，  
且令  $F_1(3, 0)$ ， $F_2(-3, 0)$ ， $D(x, 0)$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{2}，\overline{PF_1} = 5\sqrt{2}$$

$\overline{PD}$  平分  $\angle F_1PF_2$

$$\Rightarrow \overline{F_2D} : \overline{DF_1} = \overline{PF_2} : \overline{PF_1} = 1 : 5 \text{ (內分角線性質)}$$

$$D(x, 0) = \frac{1}{6}(3, 0) + \frac{5}{6}(-3, 0) = (-2, 0)$$



解 2：利用雙曲線的光學性質

$\overline{PD}$  平分  $\angle F_1PF_2$ ，得知直線  $PD$  為雙曲線  $\Gamma$  上過  $P(-4, 1)$  的切線。

代入切線公式，直線  $PD$  為  $\frac{(-4)x}{8} - 1 \cdot y^2 = 1 \Rightarrow$  切線  $PD : x + 2y + 2 = 0$

點  $D$  為切線  $PD$  與  $x$  軸之交點，令  $y = 0$ ，則  $x = -2$ ，即  $D(-2, 0)$

答： $(-2, 0)$

E. 設  $O(0, 0, 0)$  為坐標空間中某長方體的一個頂點，且知  $(2, 2, 1)$ ， $(2, -1, -2)$ ， $(3, -6, 6)$  為此長方體中與  $O$  相鄰的三頂點。若平面  $E : x + by + cz = d$  將此長方體截成兩部份，其中包含頂點  $O$  的那一部分是個正方體，則  $(b, c, d) = (\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad})$

解：(1) 設  $A(2, -1, -2)$ ， $B(2, 2, 1)$ ， $C(3, -6, 6)$

(2)  $\overline{OA} = \overline{OB} = 3$  且平面  $E$  將此長方體截成兩部份，

其中包含頂點  $O$  的那一部分是個正方體，  
則如圖不失為一般性

(3) 平面  $E$  的法向量  $= (1, b, c) // \overrightarrow{OC}(3, -6, 6)$

得知  $b = -2$ ， $c = 2$

(4) 如圖，設  $D$  在平面  $E$  上，也在  $\overrightarrow{OC}$  上，

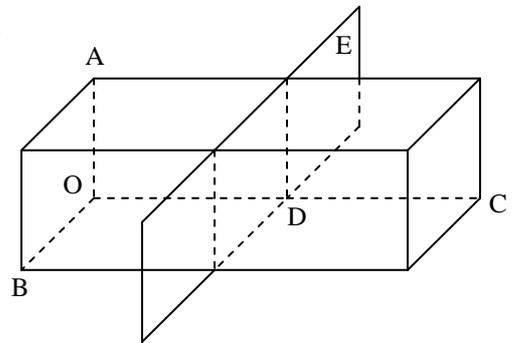
令  $D(k, -2k, 2k)$ ， $k > 0$  (與  $\overrightarrow{OC}$  同方向)

$$\overline{OD} = 3(\text{正方體}) = \sqrt{k^2 + (-2k)^2 + (2k)^2}，\text{得知 } k = 1，\quad D(1, -2, 1)$$

(5) 將  $D(1, -2, 1)$  代入平面  $E : x - 2y + 2z = d$ ，得  $d = 9$

故  $(b, c, d) = (-2, 2, 9)$

答： $(-2, 2, 9)$



F. 設  $a, b$  為正整數。若  $b^2 = 9a$ ，且  $a + 2b > 280$ ，則  $a$  的最小值為\_\_\_\_\_。

解：  $b^2 = 9a$ ，  $a = \frac{b^2}{9} = \left(\frac{b}{3}\right)^2$ ，且  $a, b$  為正整數，知  $a$  為完全平方數

將  $a = \frac{b^2}{9}$  代入  $a + 2b > 280$ ，得  $\frac{b^2}{9} + 2b > 280$ ，同乘 9， $\Rightarrow b^2 + 18b > 2520$ ，

由配方得  $(b + 9)^2 > 2520 + 81 = 3^2 \times 17^2$ ，

$\Rightarrow b + 9 > 3 \times 17 = 51$  或  $b + 9 < -51$ ，即  $b > 42$  或  $b < -60$  (與  $a, b$  為正整數不合)

$b^2 = 9a > 42^2$ ， $\Rightarrow a > 14^2$

$a$  為正整數，且為完全平方數，故  $a$  的最小值為  $15^2 = 225$

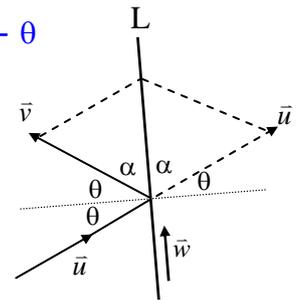
答：225

G. 坐標平面上有一質點沿方向  $\vec{u} = (1, 2)$  前進。現欲在此平面上置一直線  $L$ ，使得此質點碰到  $L$  時依光學原理(入射角等於反射角)反射，之後沿方向  $\vec{v} = (-2, 1)$  前進，則直線  $L$  的方向向量為  $\vec{w} = (1, \underline{\quad})$ 。

解：如圖，設入射角  $= \theta =$  反射角， 延伸  $\vec{u}$  後， $\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\theta) = 90^\circ - \theta$

且直線  $L$  的方向向量  $\vec{w}$  平行於  $\vec{u} + \vec{v}$   
 又  $\vec{u} + \vec{v} = (1, 2) + (-2, 1) = (-1, 3)$   
 故取  $\vec{w} = (-1) \cdot (-1, 3) = (1, -3)$

答：(1, -3)



H. 已知坐標平面上圓  $O_1: (x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 144$  與  $O_2: (x + 2)^2 + (y - 13)^2 = 9$  相切，且此兩圓均與直線  $L: x = -5$  相切。若  $\Gamma$  為以  $L$  為準線的拋物線，且同時通過  $O_1$  與  $O_2$  的圓心，則  $\Gamma$  的焦點坐標為(\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)。(化為最簡分數)

解：如右上圖，設拋物線  $\Gamma$  的焦點為  $F(x, y)$ ，且拋物線  $\Gamma$  通過  $O_1$  與  $O_2$

根據拋物線定義  $d(P, L) = d(P, F)$ ， $P \in \Gamma$

$d(O_1, L) = d(O_1, F)$ ， $\Rightarrow \overline{O_1B} = 12 = \overline{O_1F}$

$d(O_2, L) = d(O_2, F)$ ， $\Rightarrow \overline{O_2A} = 3 = \overline{O_2F}$

得知  $\overline{O_1F} : \overline{O_2F} = 12 : 3 = 4 : 1$

利用內分點公式(如右下圖)

$$(x, y) = \frac{4 \cdot (-2, 13) + 1 \cdot (7, 1)}{1 + 4} = \frac{(-8 + 7, 52 + 1)}{5} = \left(-\frac{1}{5}, \frac{53}{5}\right)$$

答： $\left(-\frac{1}{5}, \frac{53}{5}\right)$

