大學入學考試中心九十六學年度學科能力測驗試題數學科

第一部份：選擇題(佔 55 分)

壹、單選題(佔 25 分)

說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1.設 $f(x)=ax^6-bx^4+3x-\sqrt{2}$，其中 a，b 為非零實數，則 $f(5)-f(-5)$之值為

(1) -30　(2) 0　(3) $2\sqrt{2}$　(4) 30　(5)無法確定(與 a，b 有關)

解：$f(5)=a\times5^6-b\times5^4+3\times5-\sqrt{2}=a\times5^6-b\times5^4+15-\sqrt{2}$ ·····①

$f(-5)=a\times(-5)^6-b\times(-5)^4+3\times(-5)-\sqrt{2}=a\times5^6-b\times5^4-15-\sqrt{2}$ ·····②

∴由①－②得 $f(5)-f(-5)=30$

答：(4)

2.試問共有多少個正整數 n 使得坐標平面上通過點 A($-n$，0)與點 B(0，2)的直線亦通過點 P(7，k)，其中 k 為某一正整數？

(1) 2 個　(2) 4 個　(3) 6 個　(4) 8 個　(5)無窮多個

解 1：根據題意得知 A($-n$，0)、B(0，2)與 P(7，k)三點共線

$\therefore \begin{vmatrix} -n & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & k & 1 \end{vmatrix}=0$，即 $-2n-14+nk=0$，得 $n(k-2)=14$，$\Rightarrow$ 正整數 k 共有 4 個

n	1	2	7	14
$k-2$	14	7	2	1
k	16	9	4	3

解 2：根據題意得知 A($-n$，0)、B(0，2)與 P(7，k)三點共線，∴斜率 $m_{AB}=m_{BP}$

$\Rightarrow \dfrac{2-0}{0-(-n)}=\dfrac{k-2}{7-0}$，得 $n(k-2)=14$，$\Rightarrow$ 由解 1 知正整數 k 共有 4 個

答：(2)

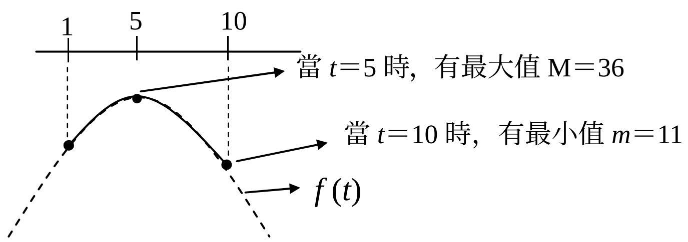
3.設某沙漠地區某一時間的溫度函數為 $f(t)=-t^2+10t+11$，其中 $1\le t\le 10$，則這段時間內該地區的最大溫差為(1) 9　(2) 16　(3) 20　(4) 25　(5) 36

解：$f(t)=-t^2+10t+11=-(t-5)^2+36$，為一開口向下之拋物線，如下圖：

在 $1\le t\le 10$ 範圍內

最大值為 M＝36，最小值 $m=11$，

∴溫差 M－m＝25



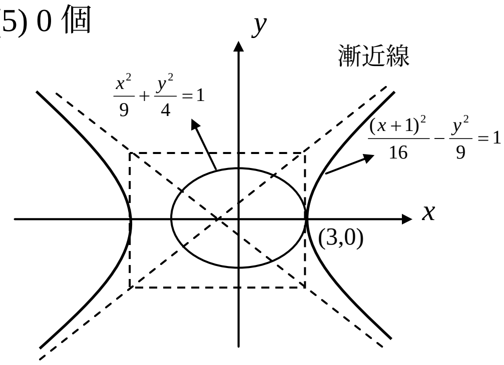
答：(4)

4.坐標平面上方程式$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的圖形與$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的圖形共有幾個交點？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

解：如右圖得知兩圖形只有 1 個交點，其坐標為(3，0)

答：(1)

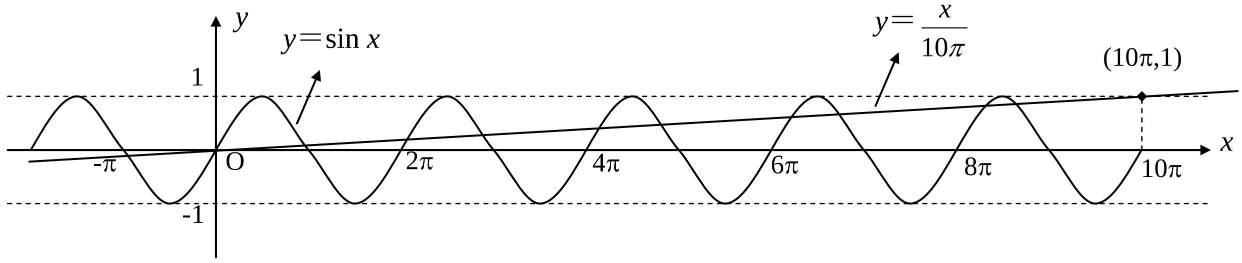


5.關於坐標平面上函數 $y=\sin x$ 的圖形和 $y=\frac{x}{10\pi}$ 的圖形之交點個數，下列哪一個選項是正確的？

(1)交點的個數是無窮多
(2)交點的個數是奇數且大於 20
(3)交點的個數是奇數且小於 20
(4)交點的個數是偶數且大於或等於 20
(5)交點的個數是偶數且小於 20

解：如下圖，∵$y=\sin x$ 的圖形與 $y=\frac{x}{10\pi}$ 的圖形均對稱於原點，且在 x 軸右方有 9 個交點

$\Rightarrow$ 共有 $2\times9+1=19$ 個交點



答：(3)

貳、多選題(佔 30 分)

說明：第 6 至 11 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項不給分。

6.若$\Gamma=\{z\mid z$ 為複數且$|z-1|=1\}$，則下列哪些點會落在圖形$\Omega=\{w\mid w=iz,\ z\in\Gamma\}$上？

(1) $2i$ (2) $-2i$ (3) $1+i$ (4) $1-i$ (5) $-1+i$

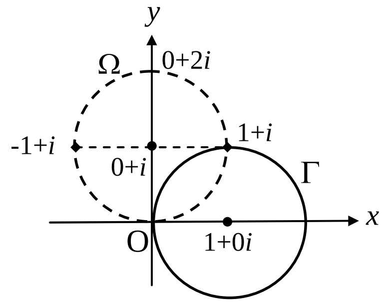
解 1：如圖，Γ：$|z-1|=1$ 表示複數平面上，以$(1+0i)$為圓心，半徑＝1 的圓

Ω：$w=iz=(\cos 90^0+i\sin 90^0)\,z$

表示將點 z 依逆時針旋轉 90^0 得到點 w

其圖形為以$(0+i)$為圓心，半徑＝1 的圓

得知 $2i$，$1+i$，$-1+i$ 在圖形Ω上



解 2：∵Ω：$w=iz$ $\Rightarrow z=\dfrac{w}{i}$，即將各選項之 w 除以 i，判定是否在 Γ之圖形上

(1) $\dfrac{w}{i}=\dfrac{2i}{i}=2\in\Gamma$　　(2) $\dfrac{w}{i}=\dfrac{-2i}{i}=-2\notin\Gamma$

(3) $\dfrac{w}{i}=\dfrac{1+i}{i}=1-i\in\Gamma$　　(4) $\dfrac{w}{i}=\dfrac{1-i}{i}=-1-i\notin\Gamma$

(5) $\dfrac{w}{i}=\dfrac{-1+i}{i}=1+i\in\Gamma$

答：(1)(3)(5)

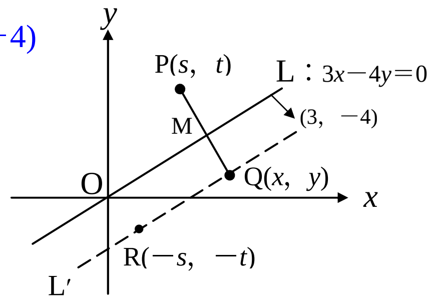
7.坐標平面上有相異兩點 P，Q，其中 P 點坐標為$(s,\ t)$。已知線段$\overline{PQ}$的中垂線 L 的方程式為 $3x-4y=0$，試問下列哪些選項是正確的？

(1)向量$\overrightarrow{PQ}$與向量$(3,\ -4)$平行　　(2)線段$\overline{PQ}$的長度等於$\dfrac{|6s-8t|}{5}$

(3)Q 點坐標為$(t,\ s)$　　(4)過 Q 點與直線 L 平行之直線必過點$(-s,\ -t)$

(5)以 O 表示原點，則向量$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$與向量$\overrightarrow{PQ}$的內積必為零

解：∵直線 L：$3x-4y=0$，通過原點，且斜率為正，如圖不失一般性



(1)∵$\overline{PQ}\perp$ L，且 L 的法向量為$(3,\ -4)$，∴$\overrightarrow{PQ}$平行$(3,\ -4)$

(2)$\overline{PQ}=2\overline{PM}=2d(\mathrm{P},\ \mathrm{L})=2\dfrac{|3s-2t|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|6s-8t|}{5}$

(3)若 Q$(t,\ s)$，$t\neq s$ (∵P 點為任一點坐標)

檢查 $d(\mathrm{Q},\ \mathrm{L})=\dfrac{|3t-4s|}{5}\neq\dfrac{|3s-4t|}{5}$

∴Q 點坐標不為$(t,\ s)$

(4)設過 Q 點與直線 L 平行之直線 L′上一點 R$(-s,\ -t)$，∵ L′ // L

∴檢查 $d(\mathrm{R},\ \mathrm{L})=\overline{PM}=\dfrac{|-3s+4t|}{5}=\dfrac{|3s-4t|}{5}$，∴R$(-s,\ -t)\in$ L′

(5)如圖，∵$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OM}$，且$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{PQ}$，∴$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，意即$(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

答：(1)(2)(4)(5)

8.下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$？

(1)$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{bmatrix}$

(4)$\begin{bmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{bmatrix}$ (5)$\begin{bmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$

解 1：根據題意，$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+2y+3z=7\\ y+z=2\\ z=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$

(1)$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+2y+3z=7\\ y+z=2\\ 2y+3z=5\end{cases}$，將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入，∴正確

(2)$\begin{bmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}-x+3y-z=0\\-x+y+z=0\\3x+y-7z=0\end{cases}$，將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入，∴不正確

(3)$\begin{bmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+y+2z=5\\x-y+z=2\\x+y+2z=5\end{cases}$，將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入，∴不正確

(4)$\begin{bmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}2x+y+3z=6\\-x+y+z=0\\-2x+2y+2z=1\end{cases}$，將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入，∴不正確

(5)$\begin{bmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+3y+2z=7\\ y+z=2\\ y=1\end{cases}$，將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入，∴正確

解 2：根據題意，$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+2y+3z=7\\ y+z=2\\ z=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$ (1 解)

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，∴正確

(2) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases} -x+3y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ 3x+y-7z=0 \end{cases}$，必有$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$解，∴不正確

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y+z=2 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$，1，3 列成比例，為無限多解，

∴不正確

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases} 2x+y+3z=6 \\ -x+y+z=0 \\ -2x+2y+2z=1 \end{cases}$，1，3 列不成比例，∴無解，

∴不正確

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases} x+3y+2z=7 \\ y+z=2 \\ y=1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$，∴正確

解 3：利用矩陣列運算比較之。

答：(1)(5)

9.座標空間中，在 xy 平面上置有三個半徑為 1 的球兩兩相切，設其球心分別為 A，B，C。今將第四個半徑為 1 的球置於這三個球的上方，且與這三個球都相切，並保持穩定。設第四個球的球心為 P，試問下列哪些選項是正確的？

(1)點 A，B，C 所在的平面和 xy 平面平行。

(2)三角形 ABC 是一個正三角形。

(3)三角形 PAB 有一邊長為 $\sqrt{2}$。

(4)點 P 到直線 AB 的距離為 $\sqrt{3}$。

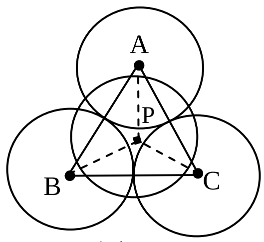
(5)點 P 到 xy 平面的距離為 $1+\sqrt{3}$

解：(1)A，B，C 三點與 xy 平面的距離均為 1，且三球大小相同又相切

∴ABC 所成之平面在 $z=1$ 的平面上，故與 xy 平面平行

(2)如圖一，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=2$，∴ΔABC 為一個正三角形

(3)∴ΔPAB 為一正三角形，$\overline{PA}=\overline{AB}=\overline{PB}=2$



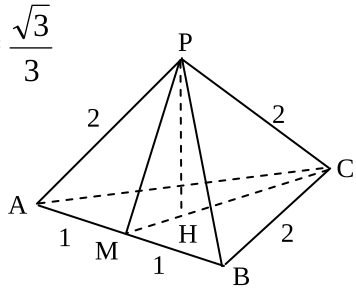
圖一

(4)如圖二，點 P 到直線 AB 的距離＝$\overline{PM}$ (ΔPAB 底邊 $\overline{BC}$ 的高)＝$\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

(5)如圖二，∵H 為正ΔABC 的重心，∴ $\overline{MH}=\frac{1}{3}\overline{CM}=\frac{1}{3}\overline{PM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

在ΔPMH 中，$\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

∴點 P 到 xy 平面的距離＝1＋$\overline{PH}$＝1＋$\frac{2\sqrt{6}}{3}$



圖二

答：(1)(2)(4)

10.設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$，試問下列哪些選項是正確的？

(1)若 $f(3)=6$，則 $g(36)=6$

(2) $\frac{f(238)}{f(219)}=\frac{f(38)}{f(19)}$

(3) $g(238)-g(219)=g(38)-g(19)$

(4)若 P，Q 為 $y=g(x)$的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數

(5)若直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$的圖形有兩個交點，則直線 $y=\frac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$的圖形也有兩個交點

解：(1)若 $f(3)=6$，得 $a^3=6$，兩邊取對數 $\Rightarrow$ $\log_a 6=3$，而 $g(36)=\log_a 36=2\log_a 6=6$

(2) $\frac{f(238)}{f(219)}=\frac{a^{238}}{a^{219}}=a^{238-219}=a^{19}$；$\frac{f(38)}{f(19)}=\frac{a^{38}}{a^{19}}=a^{38-19}=a^{19}$，$\Rightarrow\therefore \frac{f(238)}{f(219)}=\frac{f(38)}{f(19)}$

(3) $g(238)-g(219)=\log_a 238-\log_a 219=\log_a\frac{238}{219}$

$g(38)-g(19)=\log_a 38-\log_a 19=\log_a\frac{38}{19}$

$\because \log_a\frac{238}{219}\neq\log_a\frac{38}{19}$，$\Rightarrow$ $\therefore g(238)-g(219)\neq g(38)-g(19)$

(4)∵ $\log_a x$ 的底數為 $a>1$，∴$y=g(x)=\log_a x$ 是一嚴格遞增之對數函數

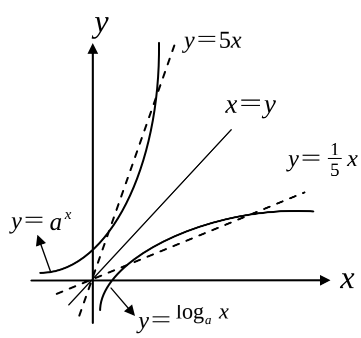
$\Rightarrow$ 直線 PQ 之斜率大於 0，故必為正數

(5)如右圖，函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$ 互為反函數，且圖形對稱於直線 $y=x$

而 $y=5x$ 與 $y=\frac{1}{5}x$ 之圖形對稱於直線 $y=x$

∴直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$的圖形有兩個交點

則直線 $y=\frac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$的圖形也有兩個交點



答：(1)(2)(4)(5)

11.設 $f(x)$為一實數係三次多項式且其最高次數係數為 1，已知 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(5)=5$，則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？

(1) $(-\infty,\ 0)$ (2) $(0,\ 1)$ (3) $(1,\ 2)$ (4) $(2,\ 5)$ (5) $(5,\ \infty)$

解：先求多項式 $f(x)$

(法 1)設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，則 $\begin{cases} f(1)=1+a+b+c=1 \\ f(2)=8+4a+2b+c=2 \\ f(5)=125+25a+5b+c=5 \end{cases}$

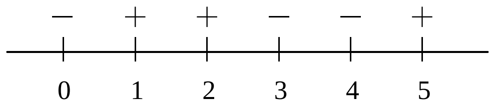
得 $f(x)=x^3-8x^2+18x-10$

(法 2)由已知得 $f(x)=x$，∴設 $f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-5)$,

意即 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-5)+x$

根據勘根定理，如下圖所示，得知在(0，1)，(2，3)，(4，5)區間各有一實數根。

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	–10	1	2	–1	–2	5



答：(2)(4)

第二部份：選填題(佔 45 分)

說明：1.第 A 至 I 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13－43)。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4-\log_2 x=1$，則 $x=$_____。

解：$\log_x 4-\log_2 x=2\log_x 2-\log_2 x=1$

∵ $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$，∴原式為 $2(\dfrac{1}{\log_2 x})-\log_2 x=1$,

化簡得 $(\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0$，因式分解，$\Rightarrow (\log_2 x+2)(\log_2 x-1)=0$

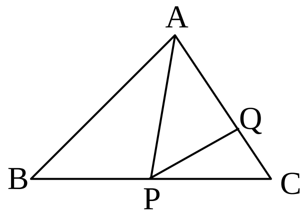
∵ $\log_2 x=-2$ 或 $\log_2 x=1$ (不合，∵$0<x<1$ 時，$\log_2 x<0$)

得知 $x=\dfrac{1}{4}$

答：$\dfrac{1}{4}$

B.在坐標平面上的ΔABC 中，P 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，Q 在 $\overline{AC}$ 邊上且 $\overline{AQ}=2\overline{QC}$。已知 $\overrightarrow{PA}=(4,\ 3)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,\ 5)$，則 $\overrightarrow{BC}=$_____。

解 1：(1)如圖，∵P 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，∴$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{PC}$



(2)在ΔAPC 中，根據比例點公式，∴$\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$

∴$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA}=3(4,\ 3)-(1,\ 5)=(-1,\ 12)$

解 2：∵$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PA}=(1,\ 5)-(4,\ 3)=(-3,\ 2)$

∴$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AQ}=(-\frac{9}{2},\ 3)$

則$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{PC}=2(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})=2[(-3,\ 2)+(-\frac{9}{2},\ 3)]=(-1,\ 12)$

答：(－1，12)

C.在某項才藝競賽中，為了避免評審個人主觀影響參賽者成績太大，主辦單位規定：先將 15 位評審給同一位參賽者的成績求得算術平均數，再將與平均數相差超過 15 分的評審成績剔除後重新計算平均值做為此參賽者的比賽成績。現在有一位參賽者所獲 15 位評審的平均成績為 76 分，其中有三位評審給的成績 92、45、55 應剔除，則這個參賽者的比賽成績為__分。

解：$\frac{76\times15-(92+45+55)}{12}=79$

答：79 分

D.某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排(即第 13 排)，發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有______個座位。

解 1：設第 1 排有 a 個座位，則

球場 E 區各排座位數：a，$a+2$，····，64，····，成一公差為 2 的等差數列

∴第 13 排人數＝$a+12\times2=64$，得知第 1 排 $a=40$ 個座位

球場 E 區共有 $S_{25}=\frac{25(2\times40+24\times2)}{2}$＝1600 個座位

解 2：設第 n 排有 a_n 個座位，則 a_1，a_2，····，a_{12}，a_{13}，a_{14}，····，a_{24}，a_{25} 成一等差數列

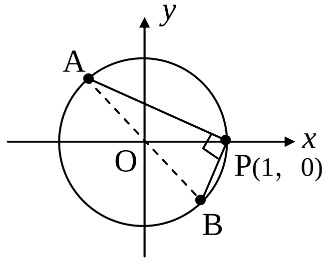
依題意得知 a_{13} 為此數列之等差中項，則 $2a_{13}=a_{12}+a_{14}=\cdots=a_2+a_{24}=a_1+a_{25}$

∴ $a_1+a_2+\cdots+a_{12}+a_{13}+a_{14}+\cdots+a_{24}+a_{25}=25a_{13}==25\times64=1600$

故球場 E 區共有 1600 個座位

E.設 P，A，B 為坐標平面上以原點為圓心的單位圓上三點，其中 P 點坐標為(1，0)，A 點坐標為$(-\frac{12}{13},\ \frac{5}{13})$，且∠APB 為直角，則 B 點坐標為_______。(化為最簡分數)

解 1：∵∠APB＝90^0，即 $\overline{AB}$ 為圓之直徑(圓周角性質)，如右圖



又必通過圓心 O，得知 A，B 兩點對稱於原點 O

故 B 點坐標為$(\frac{12}{13},\ -\frac{5}{13})$

解 2：(1)$\because \overline{PA}$的斜率$=\dfrac{0-\frac{5}{13}}{1-(-\frac{13}{12})}=-\dfrac{1}{5}$且$\angle APB=90^0$， ⇒ $\overline{PB}$的斜率＝5

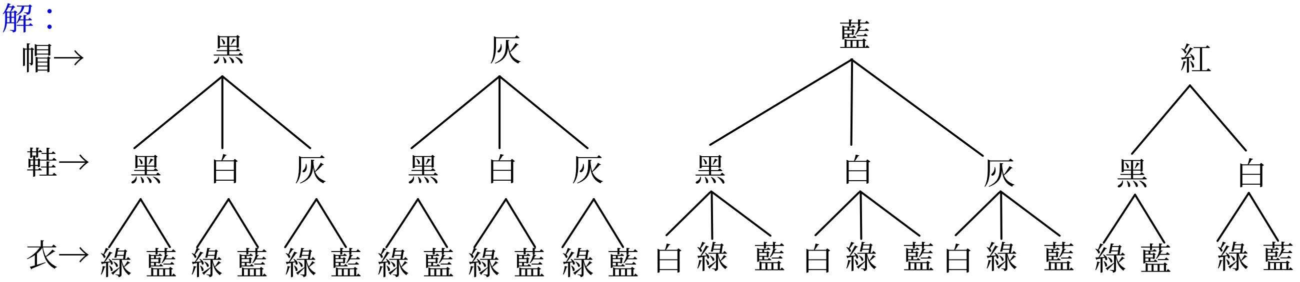
(2)$\because$直線 PB 通過(1，0)，$\therefore$直線 PB：$y-0=5(x-1)$，即 $y=5x-5$

(3) B 點$\begin{cases}直線PB: y=5x-5\\ 圓: x^2+y^2=1\end{cases}$，得 $x=1$，$y=0$ 或 $x=\dfrac{12}{13}$，$y=-\dfrac{5}{13}$

答：B$(\dfrac{12}{13}, -\dfrac{5}{13})$

F.某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有____種不同款式的「阿民」公仔。

解：



共有 6＋6＋9＋4＝25 種

答：25 種

G.摸彩箱裝有若干編號為 1，2，⋯，10 的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。現有甲、乙兩案：甲案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬同為 k；乙案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬為 $11-k$ ($k=1, 2, \cdots, 10$)。已知依甲案每摸取一球的期望值為$\dfrac{67}{14}$，則依乙案每摸取一球的期望值為____。(化成最簡分數)。

解 1：設摸取編號為 n 的彩球，機率為 p_n，$n=1, 2, 3, \cdots, 10$ 且 $p_1+p_2+\cdots+p_{10}=1$

甲案：

樣本 $n=k$	1	2	⋯	9	10	合計
報酬 $x=k$	1	2	⋯	9	10	
機率 $p=p_n$	p_1	p_2	⋯	p_9	p_{10}	1

期望值 $E(k)=1\cdot p_1+2\cdot p_2+\cdots+9\cdot p_9+10\cdot p_{10}=\dfrac{67}{14}$ ⋯①

乙案：

樣本 $n=k$	1	2	....	9	10	合計
報酬 $x=11-k$	10	9	....	2	1	
機率 $p=p_n$	p_1	p_2	....	p_9	p_{10}	1

令期望值 $E(11-k)=10\cdot p_1+9\cdot p_2+\cdots+2\cdot p_9+1\cdot p_{10}=m$ ....②

由①＋②：$11(p_1+p_2+\cdots+p_{10})=\frac{67}{14}+m$

得知 $m=11-\frac{67}{14}=\frac{87}{14}$

解 2：∵甲案期望值 $E(k)=\frac{67}{14}$

∴乙案期望值 $E(11-k)=11-E(k)=11-\frac{67}{14}=\frac{87}{14}$

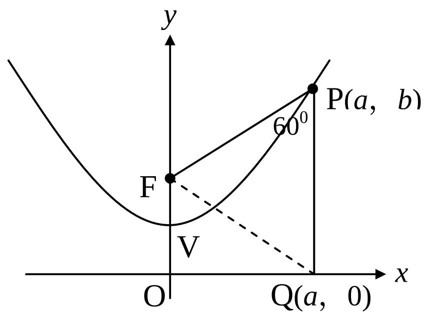
答：$\frac{87}{14}$

H.坐標平面上有一以點 V(0, 3)為頂點、F(0, 6)為焦點的拋物線。設 P(a, b)為此拋物線上一點，Q(a, 0)為 P 在 x 軸上的投影，滿足∠FPQ＝60°，則 b＝_____。

解 1：(1)如右圖，依題意不失一般性

∵頂點 V(0, 3)，焦點 F(0, 6)，∴準線 L：x 軸

(2) P(a, b)在拋物線上



根據定義 $d(P, F)=d(P, L)$，$\Rightarrow \overline{PF}=\overline{PQ}$

又∵∠FPQ＝60°，得知ΔPFQ 是正三角形

(3) $\overline{PF}=\overline{FQ} \Rightarrow \sqrt{(a-0)^2+(b-6)^2}=\sqrt{(a-0)^2+(0-6)^2}$

∴b＝12 或 0(不合)

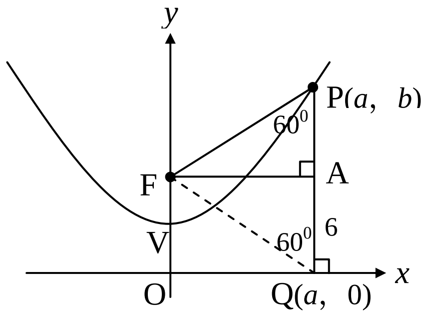
解 2：(1)如右圖，依題意不失一般性

∵頂點 V(0, 3)，焦點 F(0, 6)，∴準線 L：x 軸

(2) P(a, b)在拋物線上

根據定義 $d(P, F)=d(P, L)$，$\Rightarrow \overline{PF}=\overline{PQ}$

又∵∠FPQ＝60°，得知ΔPFQ 是正三角形



(3)過 F 作 $\overline{FA}\perp\overline{PQ}$ 於 A 點，∴ $\overline{AQ}=6$

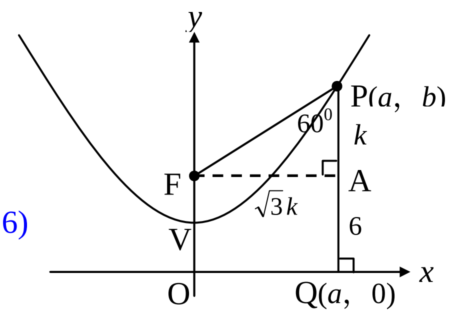
∴在ΔAFQ 中，∵∠FAQ＝60°

$\overline{FQ}=\overline{PQ}=b=2\times\overline{AQ}=2\times6=12$

解 3：(1)如右圖，依題意不失一般性

∵頂點 V(0，3)，焦點 F(0，6)，∴準線 L：x 軸

得知拋物線方程式 $\Gamma：x^2=12(y-3)$



(2)過 F 作 $\overline{FA}\perp\overline{PQ}$ 於 A 點，∴ $\overline{AQ}=6$

(3)在ΔAFP 中，∵∠FPA＝60°

令 $\overline{AP}=k$，則 $\overline{FA}=\sqrt{3}k$，∴P(a，b)＝P($\sqrt{3}k$，$k+6$)

代入拋物線方程式 $\Gamma：x^2=12(y-3)$

$\Rightarrow(\sqrt{3}k)^2=12(k+6-3)$，得 $k=6$

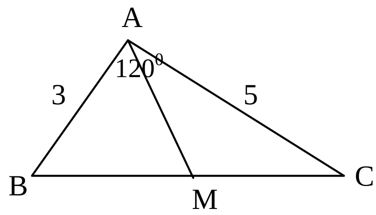
$\Rightarrow b=k+6=12$

答：$b=12$

I.在ΔABC 中，M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且∠BAC＝120^0，

則 tan∠BAM ______。(化成最簡根式)

解 1：如右圖



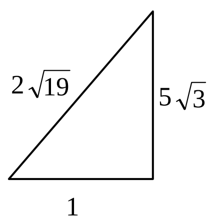
(1)在ΔABC 中，根據餘弦定理

$\overline{BC}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^0=49$，$\Rightarrow\overline{BC}=7$

(2)在ΔABC 中，∵M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，$\overline{BM}=\dfrac{7}{2}$

根據中線定理，$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$

得 $3^2+5^2=2[(\dfrac{7}{2})^2+\overline{AM}^2]$，$\Rightarrow\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$



(3)在ΔABM 中，根據餘弦定理

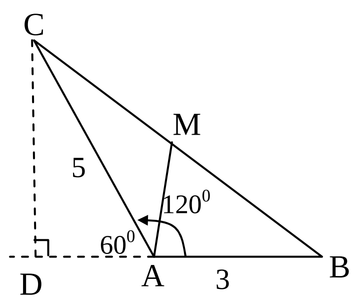
$$\cos(\angle BAM)=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-\overline{BM}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AM}}=\frac{3^2+(\frac{\sqrt{19}}{2})^2-(\frac{7}{2})^2}{2\times3\times\frac{\sqrt{19}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{19}}$$

(4)∴tan (∠BAM)＝$5\sqrt{3}$

解 2：(1)如右圖，建立一坐標：定 A(0，0)，B(3，0)，且過 C 作 $\overline{CD}\perp\overline{AD}$ 於 D

(2)在ΔACD 中，$\overline{AD}=5\cos60^0=\dfrac{5}{2}$，$\overline{CD}=5\sin60^0=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

∴C($-\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$)



(3)∵M 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，$\Rightarrow$ M($\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$)

$$\therefore\tan(\angle BAM)=\frac{y\text{分量}}{x\text{分量}}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=5\sqrt{3}$$

答：$5\sqrt{3}$