大學入學考試中心九十四學年度學科能力測驗試題數學科

第一部份：選擇題(佔 55 分)

壹、單選題(佔 25 分)

說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1.試問整數 43659 共有多少個不同的質因數？

(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 5 個

解：將 43659 作質因數分解如右表

$\therefore 43659 = 3^4 \times 7^2 \times 11$

$\Rightarrow$ 有 3，7，11 等 3 個不同的質因數。

答：(3)

$$\begin{array}{r|l} 3 & 43653 \\ \hline 3 & 14551 \\ \hline 3 & 4851 \\ \hline 3 & 1617 \\ \hline 7 & 539 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array}$$

2.利用公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$，可計算出$(11)^3+(12)^3+\cdots+(20)^3$之值為

(1) 41075　(2) 41095　(3) 41115　(4) 41135　(5) 41155

解：$(11)^3+(12)^3+\cdots+(20)^3$

$=[1^3+2^3+\cdots+(10)^3+\cdots+(20)^3]-[1^3+2^3+\cdots+(10)^3]=\sum_{k=1}^{20}k^3-\sum_{k=1}^{10}k^3$

$=(\frac{20\times21}{2})^2-(\frac{10\times11}{2})^2=210^2-55^2=41075$

答：(1)

3.台北銀行最早發行的樂透彩(俗稱小樂透)的玩法是「42 選 6」：購買者從 01~42 中任選六個號碼，當這六個號碼與開出的六個號碼完全相同(不計次序)時即得頭獎；台北銀行曾考慮改發行「39 選 5」的小小樂透；購買者從 01~39 中任選五個號碼，如果這五個號碼與開出的五個號碼完全相同(不計次序)則得頭獎。假設原來的小樂透中頭獎的機率是 R，而曾考慮發行的小小樂透中頭獎的機率是 r，試問比值 $\frac{r}{R}$ 最接近下列哪個選項？

(1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9　(5) 11

解：小樂透機率 R$=\frac{1}{C_6^{42}}=\frac{6!\times(42-6)!}{42!}=\frac{6!\times36!}{42!}$

小小樂透 $r=\frac{1}{C_5^{39}}=\frac{5!\times(39-5)!}{39!}=\frac{5!\times34!}{39!}$

$\therefore \frac{r}{R}=\frac{C_6^{42}}{C_5^{39}}=\frac{42!}{6!\times36!}\times\frac{5!\times34!}{39!}=\frac{5!\times34!\times42!}{39!\times6!\times36!}=\frac{42\times41\times40}{6\times36\times35}=\frac{82}{9}\doteqdot 9.11$。

答：(4)

4.設 a，b 為正實數，已知 $\log_7 a = 11$，$\log_7 b = 13$：試問 $\log_7(a+b)$ 之值最接近下列哪個選項？

(1) 12 (2) 13 (3) 14 (4) 23 (5) 24

解 1：$\because \log_7 a = 11$，得 $a = 7^{11}$；$\because \log_7 b = 13$，得 $b = 7^{13}$

$$\therefore \log_7(a+b) = \log_7(7^{11}+7^{13}) = \log_7 7^{11}(1+7^2)$$

$$= \log_7 7^{11} \times 50 = \log_7 7^{11} + \log_7 50$$

$$= 11 + \frac{\log 50}{\log 7} \fallingdotseq 11 + 2.1 = 13.1$$

解 2：(1) $\because \log_7 a = 11 \Rightarrow a = 7^{11}$ ；$\log_7 b = 13 \Rightarrow b = 7^{13}$

(2) $\because a$，b 為正實數且 $a \neq b$，根據算幾不等式，$\therefore a + b > 2\sqrt{ab} = 2 \times 7^{12}$

又 $\because \log_7(a+b)$ 是遞增函數

$$\therefore \log_7(a+b) > \log_7(2\times 7^{12}) = 12 + \log_7 2 = 12 + \frac{\log 2}{\log 7} = 12 + \frac{0.3010}{0.8451} \quad 12.36$$

(3) $\because a < b$，得知 $a + b < 2b$ 且 $\log_7 x$ 是遞增函數

$$\therefore \log_7(a+b) < \log_7 2b = \log_7 2\times 7^{13} = 13 + \log_7 2 \fallingdotseq 13.36$$

故 $12.36 < \log_7(a+b) < 13.36$，即 $\log_7(a+b)$ 最接近 13

答：(2)

5.某校高一第一次段考數學成績不太理想，多數同學成績偏低；考慮到可能是同學們適應不良所致，數學老師決定將每人的原始成績取平方根後再乘以 10 作為正式紀錄的成績。今隨機抽選 100 位同學，發現調整後的成績其平均為 65 分，標準差為 15 分；試問這 100 位同學未調整前的成績之平均 M 介於哪兩個連續正整數之間？

(1) 40≦M＜41 (2) 41≦M＜42 (3) 42≦M＜43 (4) 43≦M＜44 (5) 44≦M＜45

解 1：(1)設這 100 位同學原來成績分別為 x_1，x_2，…，x_{99}，x_{100}

依據題意，調整後的成績為 $y_i = 10\sqrt{x_i}$，即 $y_i^2 = 100x_i$，$i = 1$，2，…，100

(2)調整後成績的平均 $\bar{y} = 65$

調整後成績的標準差 $S_y = \sqrt{\dfrac{1}{100-1}\{\sum_{i=1}^{100}(10\sqrt{x_i})^2 - 100\times 65^2\}} = 15$

平方整理得 $\sum_{i=1}^{100}(10\sqrt{x_i})^2 = 100\sum_{i=1}^{100}(\sqrt{x_i})^2 = 99\times 15^2 + 100\times 65^2 = 444775$

$$\therefore \sum_{i=1}^{100}(\sqrt{x_i})^2 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{99} + x_{100} = 4447.75$$

(3)故這 100 位同學原來成績的平均 $M = \dfrac{1}{100}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{99} + x_{100}) = 44.4775$

解 2：利用平均數與標準差的定義解題

設原來成績為 x 分，平均數為 M；調整後的成績為 y，平均數為 $\bar{y}$

依題意得知：$y = 10\sqrt{x}$，即 $x = \dfrac{y^2}{100}$ (表示 $y_i^2 = 100x_i$，$i = 1$，2，…，100)

$\because$ 調整後的標準差 $S_y = \sqrt{\dfrac{1}{100-1}(\sum_{i=1}^{100} y_i^2 - 100\cdot \bar{y}^2)} = 15$ 且 $\bar{y} = 65$

平方整理得 $\sum_{i=1}^{100} y_i^{\ 2}$ ＝$(100-1)\times15^2+100\times65^2=444725$

∴調整前的平均數 M＝$\dfrac{1}{100}(x_1+x_2+\ldots+x_{99}+x_{100})$

$$=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_i=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\frac{y_i^{\ 2}}{100}=\frac{1}{10000}\sum_{i=1}^{100}y_i^{\ 2}=\frac{1}{10000}\times444725=44.4725$$

答：(5)

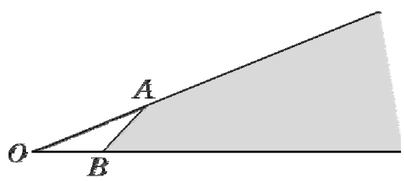
貳、多選題(佔 30 分)

說明：第 6 至 11 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項不給分。

6.如右圖所示，兩射線 OA 與 OB 交於 O 點，
試問下列選項中哪些向量的終點會落在陰影區域內？

(1) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ (2) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ (3) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(4) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ (5) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}$



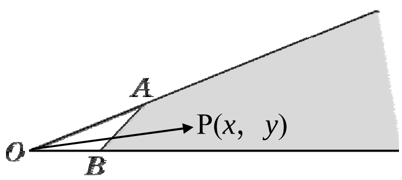
解 1：設陰影區域內一點 P(x，y)，如右圖，且 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，$m+n\geq1$，$m\geq0$，$n\geq0$

(1) $m+n=1+2=3\geq1$

(2) $m+n=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{12}\geq1$

(3) (5) $n<0$，(不合)

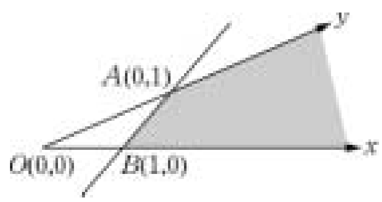
(4) $m+n=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{19}{20}<1$，(不合)



解 2：如右圖，建立圖形坐標化，設 O(0，0)，A(0，1)，B(1，0)

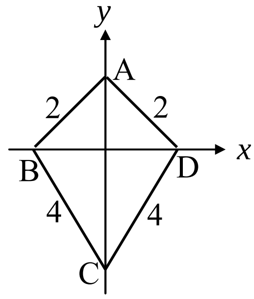
則直線 AB 之方程式為 $x+y=1$

陰影區域＝$\{P\mid\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，$m+n\geq1$，$m\geq0$，$n\geq0\}$



答：(1)(2)

7.如右圖所示，坐標平面上一鳶形 ABCD，其中 A、C 在 y 軸上，
B、D 在 x 軸上，且 $\overline{AB}=\overline{AD}=2$，$\overline{BC}=\overline{CD}=4$，$\overline{AC}=5$。
令 m_{AB}、m_{BC}、m_{CD}、m_{DA} 分別表示直線 AB、BC、CD、DA 之斜率。
試問以下哪些敘述是正確的？



(1)此四數值中以 m_{AB} 最大。　(2)此四數值中以 m_{BC} 最小。
(3) $m_{BC}=-m_{CD}$　(4) $m_{AB}\times m_{BC}=-1$　(5) $m_{CD}+m_{DA}>0$

解：(1)斜率大小依序為 $m_{CD}>m_{AB}>0>m_{DA}>m_{BC}$

(2)在ΔABC 中，$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2^2+4^2\neq\overline{AC}^2=5^2$，∴∠ABC $\neq 90^0$，故 $m_{AB}\times m_{BC}\neq -1$

(3)∵ $m_{CD}>0$，$m_{DA}<0$ 且$|m_{CD}|>|m_{DA}|$，∴ $m_{CD}+m_{DA}>0$

答：(2)(3)(5)

8.假設坐標空間中三相異平面 E_1、E_2、E_3 皆通過(－1，2，0)與(3，0，2)兩點，試問以下哪些點也同時在此三平面上？
(1) (2，2，2)　(2) (1，1，1)　(3) (4，－2，2)
(4) (－2，4，0)　(5) (－5，－4，－2)

解 1：(1)令 P(－1，2，0)，Q(3，0，2)，∵ $\overrightarrow{PQ}=(4,\ -2,\ 2)=2(2,\ -1,\ 1)$，
取直線 PQ 的方向向量為 $\overrightarrow{d}(2,\ -1,\ 1)$，∴直線 PQ：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$

(2)若點同時在此三平面 E_1，E_2，E_3 上，則此點必在直線 PQ 上，代入直線 PQ 檢查

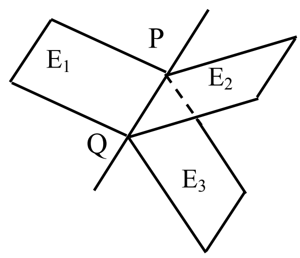
點(2，2，2)代入，$\dfrac{2+1}{2}\neq\dfrac{2-2}{-1}$，∴不正確

點(1，1，1)代入，$\dfrac{1+1}{2}=\dfrac{1-2}{-1}=\dfrac{1}{1}$，∴正確

點(4，－2，2)代入，$\dfrac{4+1}{2}\neq\dfrac{-2-2}{-1}$，∴ 不正確

點(－2，4，0)代入，$\dfrac{-2+1}{2}\neq\dfrac{4-2}{-1}$，∴ 不正確

點(－5，－4，－2)代入，$\dfrac{-5+1}{2}\neq\dfrac{-4-2}{-1}$，∴ 不正確



解 2：(1)令 P(－1，2，0)與 Q(3，0，2)，則三相異平面 E_1，E_2，E_3 相交於直線 PQ
∴若點同時在此三平面 E_1，E_2，E_3 上的充要條件是此點在直線 PQ 上
亦即由其方向向量是否平行直線 PQ 的方向向量為 $\overrightarrow{d}(2,\ -1,\ 1)$

(2)令 A(2，2，2)，B(1，1，1)，C(4，－2，2)，D(－2，4，0)，E(－5，－4，－2)
∴ $\overrightarrow{PA}=(3,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{PB}=(2,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{PC}=(5,\ -4,\ 2)$
$\overrightarrow{PD}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{PE}=(-4,\ -6,\ -2)$
∵只有 $\overrightarrow{PB}$ 與 $\overrightarrow{d}$ 平行，∴只有點(1，1，1)在直線 PQ 上，也就是在此三平面上

答：(2)

9.若 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，試問以下哪些選項恆成立？

(1) $\sin\theta<\cos\theta$　(2) $\tan\theta<\sin\theta$　(3) $\cos\theta<\tan\theta$

(4) $\sin 2\theta<\cos 2\theta$　(5) $\tan\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}\tan\theta$

解：(1) $\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}$，$0<\sin\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$；$\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<1$，$\therefore \sin\theta<\cos\theta$

(2) $\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}$，$\cos\theta<1 \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta}>1$，同乘 $\sin\theta>0$，$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta}>\sin\theta$，$\Rightarrow \tan\theta>\sin\theta$

(3)當 $\theta=30^0$ 時，$\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}<\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\Rightarrow \cos\theta>\tan\theta$

(4) $\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}$，$\therefore 0<2\theta<\frac{\pi}{2}$，則

(i)當 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 時，$\sin 2\theta<\cos 2\theta$；

(ii)當 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 時，$\sin 2\theta>\cos 2\theta$

故 $\sin 2\theta<\cos 2\theta$ 不一定成立

(5)(法 1) $\tan\theta=\tan(2\times\frac{\theta}{2})=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}>\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1}=2\tan\frac{\theta}{2}$　($\because 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{8}$，$1-\tan^2\frac{\theta}{2}<1$)

(法 1) $\frac{1}{2}\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}-\tan\frac{\theta}{2}=\dfrac{\tan^3\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}>0$

($\because 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{8}$，$1-\tan^2\frac{\theta}{2}>0$ 且 $\tan^3\frac{\theta}{2}>0$)

故 $\tan\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}\tan\theta$

答：(1)(5)

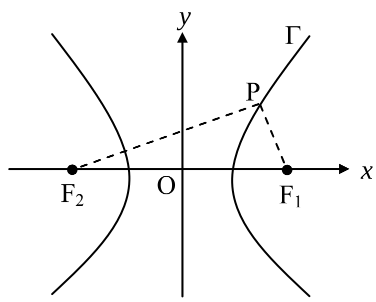
10.設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的兩個焦點，P 為 Γ 上一點，使得此三點構成一等腰三角形，試問以下哪些值可能是這些等腰三角形的周長？

(1) 20　(2) 24　(3) 28　(4) 32　(5) 36

解：(1)設 P 在第一象限不失為一般性，如右圖

由雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，得知 $a^2=9$，$b^2=16$，

$\therefore$ 取 $a=3$，$b=4$，則 $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$



(2)$\because \overline{F_1F_2}=2c=10$ 且根據定義$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=6$，則

(i)等腰ΔPF_1F_2中，$\overline{PF_1}=\overline{F_1F_2}=10$

$\therefore |10-\overline{PF_2}|=6$，得知$\overline{PF_2}=4$ 或 16

當$\overline{PF_2}=4$，ΔPF_1F_2的周長$=10+10+4=24$

當$\overline{PF_2}=16$，ΔPF_1F_2的周長$=10+10+16=36$

(ii)等腰ΔPF_1F_2中，$\overline{PF_2}=\overline{F_1F_2}=10$

$\therefore |\overline{PF_1}-10|=6$，得知$\overline{PF_1}=4$ 或 16

當$\overline{PF_1}=4$，ΔPF_1F_2的周長$=10+10+4=24$

當$\overline{PF_1}=16$，ΔPF_1F_2的周長$=10+10+16=36$

故周長可能為 24 或 36

答：(2)(5)

11.設 S 為空間中一球面，$\overline{AB}$為其一直徑，且$\overline{AB}=10$，若 P 為空間中一點，使得 $\overline{PA}+\overline{PB}=14$，則 P 點的位置可能落在哪裡？

(1)線段$\overline{AB}$上。 (2)直線 AB 上，但不在線段$\overline{AB}$上。

(3)球面 S 上。 (4)球 S 的內部，但不在線段$\overline{AB}$上。

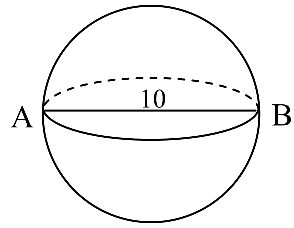
(5)球 S 的外部，但不在直線 AB 上。

解 1：如圖一：

(1)若 P 點在線段$\overline{AB}$上，則$\overline{PA}+\overline{PB}=10\neq 14$

(2)若 P 點在直線 AB 上，不在線段$\overline{AB}$上，則$\overline{PA}+\overline{PB}>10$

(3)(4)(5)則$\overline{PA}+\overline{PB}>10$ ($\because$三角形中，兩邊和大於第三邊)



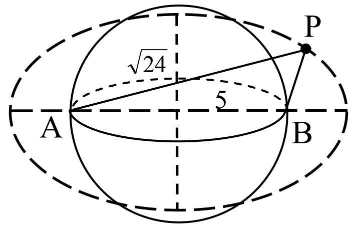
圖一

解 2：設滿足$\overline{PA}+\overline{PB}=14$ 的點 P 之圖形是以 A、B 為焦點，長軸長 $2a=14$ 的橢圓

則 $2c=10$，其短軸半長 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{7^2-5^2}=\sqrt{24}<5$

$\Rightarrow$ 如圖二，橢圓上的點 P 可能在圓外、或在圓上、或在圓內。

答：(2)(3)(4)(5)



圖二

第二部份：選填題(佔 45 分)

說明：1.第 A 至 I 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(12－34)。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.若多項式 x^2+x+2 能整除 $x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q$，則 $p=$_____，$q=$_____。

解：利用綜合除法

$$\begin{array}{cccccc|c} 1+ & 1+ & 1+ & p\ + & 2\ + & q & -1-2 \\ & -1- & 2+ & 0\ + & 2\ + & (-2p-2) & \\ & & +0+ & 1\ + & (-p-1) & & \\ \hline 1+ & 0- & 1+ & (p+1)+ & (3-p)+ & (-2p+q-2) & \end{array}$$

∵整除，∴餘式 $(3-p)x+(-2p+q-2)=0$，得 $p=3$，$q=8$

答：$p=3$，$q=8$

B.在坐標平面上，正方形 ABCD 的四個頂點坐標分別為 A(0, 1)，B(0, 0)，C(1, 0)，D(1, 1)。設 P 為正方形 ABCD 內部的一點，若ΔPDA 與ΔPBC 的面積比為 1：2，且ΔPAB 與ΔPCD 的面積比為 2：3，則 P 點的坐標為________。(化成最簡分數)

解：根據題意，如右圖，設 P(x, y)

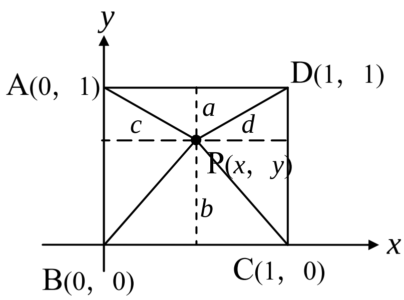
(1)∵ΔPDA：ΔPBC＝1：2，且 $\overline{AD}=\overline{BC}$(底等長)

∴$a：b=1：2$，又 $a+b=1$，得 P 點之 y 分量為 $\frac{2}{3}$

(2)∵ΔPAB：ΔPCD＝2：3，且 $\overline{AB}=\overline{CD}$(底等長)

∴$c：d=2：3$，又 $c+d=1$，得 P 點之 x 分量 $\frac{2}{5}$

∴P 點坐標為$(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$



答：$(\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$

C.在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任何一點。若經過 6 次跳動後運動物體落在點＋4 處，則此運動物體共有________種不同的跳動方法。

解：設向右(正方向)跳 x 次，向左(負方向)跳 y 次

∴經過 6 次跳動後，運動物體落在＋4 處，則

∴$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$，解得 $x=5$，$y=1$，即向右跳動 5 次＋1，向左 1 次－1

共有 $\frac{6!}{5!\,1!}=6$ 種不同的跳動方法

答：6 種

D.設複數 $z=1-i$；若 $1+z+z^2+\ldots+z^9=a+bi$，其中 a，b 為實數，則 $a=$＿＿，$b=$＿＿。

解：$1+z+z^2+\ldots+z^9=\dfrac{1\cdot(1-z^{10})}{1-z}=\dfrac{1+32i}{i}=32-i$

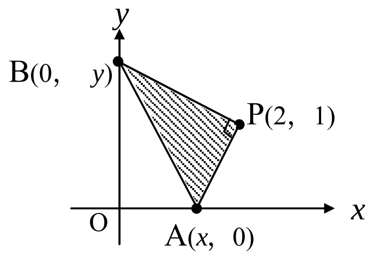
其中 $z=1-i=\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{\pi}{4}))$

根據棣美弗定理 $z^{10}=[\sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{\pi}{4}))]^{10}=\sqrt{2}^{10}(\cos(-\dfrac{10\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{10\pi}{4}))=-32i$

答：$a=32$，$b=-1$

E.設 O 為坐標平面上的原點，P 點坐標為(2，1)；若 A、B 分別是正 x-軸及正 y-軸上的點，使得 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$，則ΔOAB 面積的最大可能值為＿＿＿＿。(化成最簡分數)

解：如圖，設 A(x，0)，B(0，y)，$x>0$，$y>0$，∴ΔOAB 面積＝$\dfrac{1}{2}xy$



∵ $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，∴ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

即$(x-2，-1)\cdot(-2，y-1)=0$，得 $2x+y=5$

(法 1)利用配方法，求最大值

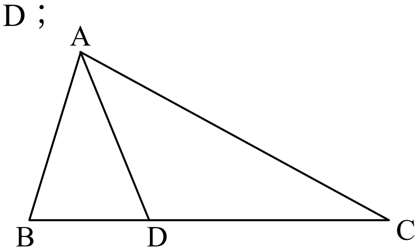
$$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x(-2x+5)=-(x-\frac{5}{4})^2+\frac{25}{16}\le\frac{25}{16}$$

(法 2)利用算幾不等式，求最大值

∵$x>0$，$y>0$，∴$2x+y\ge 2\sqrt{(2x)y}$，∴$5\ge 2\sqrt{(2x)y}$，平方得 $\dfrac{1}{2}xy\le\dfrac{25}{16}$

答：面積的最大值為 $\dfrac{25}{16}$

F.如右圖所示，在ΔABC 中，∠BAC 的平分線 AD 交對邊 $\overline{BC}$ 於 D；已知 $\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$，且 $\overline{AB}=\overline{AD}$，則 cos∠BAD 之值為＿＿＿＿。(化成最簡分數)



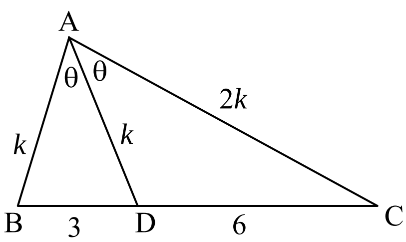
解：(1)如圖，∵ $\overline{AD}$ 平分∠BAC，根據內角平分線性質：

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:6=1:2$

∴設 $\overline{AB}=\overline{AD}=k$，則 $\overline{AC}=2k$

(2)又∵ $\overline{AD}$ 平分∠BAC，設∠BAD＝∠CAD＝θ

法 1：利用餘弦定理



在ΔABD 中，cos∠BAD＝$\dfrac{k^2+k^2-3^2}{2\cdot k\cdot k}$＝cosθ

在ΔCAD 中，cos∠CAD＝$\dfrac{k^2+(2k)^2-6^2}{2\cdot k\cdot 2k}$＝cosθ

∴ $\dfrac{k^2+k^2-3^2}{2\cdot k\cdot k}=\dfrac{k^2+(2k)^2-6^2}{2\cdot k\cdot 2k}$，得 $k^2=18$

故 cos∠BAD＝$\dfrac{k^2+k^2-3^2}{2\cdot k\cdot k}=\dfrac{18+18-3^2}{2\cdot 18}=\dfrac{3}{4}$

法 2：利用面積和與正弦定理

∵ΔABC 面積＝ΔABD 面積＋ΔACD 面積

$\therefore \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\theta$

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}k\cdot 2k\cdot 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}k\cdot k\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}k\cdot 2k\cdot\sin\theta$，得 $\cos\theta=\cos\angle BAD=\frac{3}{4}$

答：$\frac{3}{4}$

G.在坐標平面上，過 F(1，0)的直線交拋物線 $\Gamma：y^2=4x$ 於 P、Q 兩點，其中 P 在上半平面，且知 $2\overline{PF}=3\overline{QF}$，則 P 點的 x 坐標為________。(化成最簡分數)

解 1：(1)如右圖，作 $\overline{PA}\perp x$ 軸，$\overline{QB}\perp x$ 軸，則ΔAPF 相似於ΔBQF(根據 AA 相似性質)

(2)∵$2\overline{PF}=3\overline{QF}$，∴$\overline{PF}：\overline{QF}=3：2$

令 $\overline{AF}=3k$，$\overline{BF}=2k$；$\overline{PA}=3h$，$\overline{QB}=2h$，h，$k>0$

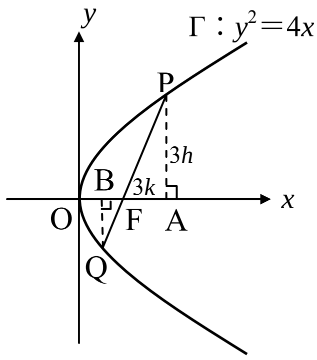
則得知 P$(1+3k，3h)$，Q$(1-2k，-2h)$

(3)∵P，Q 皆在 Γ 上，分別代入 $\Gamma：y^2=4x$

$(3h)^2=4(1+3k)$ ‥‥ ①

$(-2h)^2=4(1-2k)$ ‥‥ ②

由①除②，得 $k=\frac{1}{6}$，∴P 點的 x 坐標為 $1+3k=\frac{3}{2}$



解 2：(1)如右圖，∵P，Q 皆在 Γ 上，設 P$(t^2，2t)$，Q$(k^2，2k)$

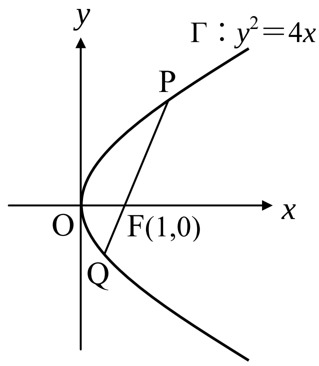
(2)∵P，F，Q 三點共線，且 $\overline{PF}：\overline{QF}=3：2$

根據內分比性質：$5(1，0)=3(k^2，2k)+2(t^2，2t)$

x 分量：$5=3k^2+2t^2$

y 分量：$0=6k+4t$

解得 $k^2=\frac{2}{3}$，$t^2=\frac{3}{2}$，故 P 點的 x 坐標為 $\frac{3}{2}$



答：$\frac{3}{2}$

H.設 x 為一正實數且滿足 $x.\ 3^x=3^{18}$；若 x 落在連續正整數 k 與 $k+1$ 之間，則 $k=$____。

解：(1)∵$x.\ 3^x=3^{18}$，得知 $x<18$ 且 $x=3^a$ 型式

(2)若 $a=2$，則 $x=9$，$x.\ 3^x=9.\ 3^9<3^{18}$

若 $a=3$，則 $x=27$(與 $x<18$ 不合)，得知 $9<x<18$

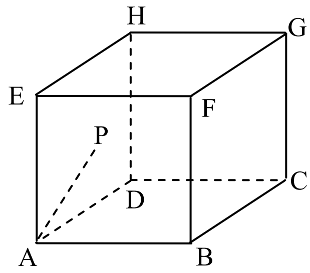
(3)當 $x=15$ 時，$x.\ 3^x=15.\ 3^{15}<3^{18}$

當 $x=16$ 時，$x.\ 3^x=16.\ 3^{16}>3^{18}$

故 $15<x<16$，取 $k=15$

答：15

I.如右圖所示，ABCD－EFGH 等邊長等於 1 之正立方體。



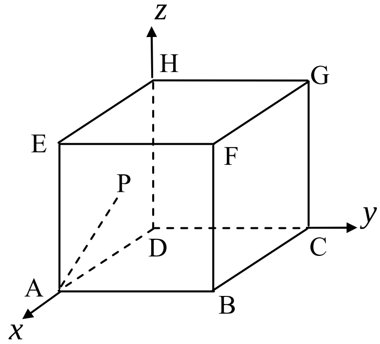
若 P 點在立方體之內部且滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，

則 P 點至直線 AB 之距離為________。(化成最簡分數)

解 1：(1)如右圖，建立一坐標，取單位長為 1，P(x，y，z)

A(1，0，0)，B(1，1，0)， D(0，0，0)，E(1，0，1)

(2)$\because \overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}(0,\ 1,\ 0)+\frac{1}{2}(-1,\ 0,\ 0)+\frac{2}{3}(0,\ 0,\ 1)$



$\Rightarrow (x-1,\ y,\ z)=(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3})$

$\therefore$P$(x,\ y,\ z)=$P$(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3})$

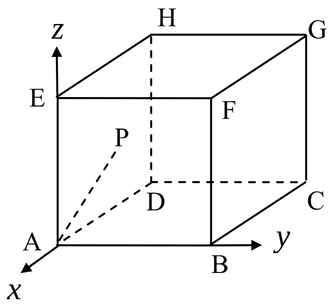
(3)取直線 AB 的方向向量 $\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ 0)$

$\therefore$直線 AB 參數式：$\begin{cases} x=1+0t \\ y=0+t \\ z=0+0t \end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$，$t$ 為實數

(4)d(P，直線 AB)$=\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(\frac{4}{3}-t)^2+(\frac{2}{3}-0)^2}=\sqrt{(t-\frac{4}{3})^2+\frac{25}{36}}\geq\frac{5}{6}$

解 2：(1)如右圖，建立一坐標，取單位長為 1，P(x，y，z)

A(0，0，0)，B(0，1，0)，D(－1，0，0)，E(0，0，1)



(2)$\because \overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

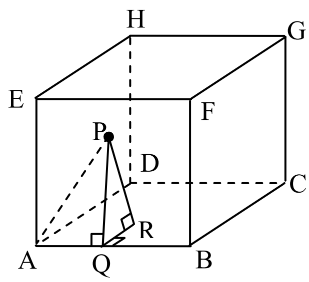
$\therefore (x,\ y,\ z)=\frac{3}{4}(0,\ 1,\ 0)+\frac{1}{2}(-1,\ 0,\ 0)+\frac{2}{3}(0,\ 0,\ 1)$

$=(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3})$

(3)故 P$(\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3})$到直線 AB($y$ 軸)之距離為$\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{2}{3})^2}=\frac{5}{6}$

解 3：(1)如右圖，過點 P 作$\overline{PR}\perp$平面 ABCD 於 R，又過點 R 作$\overline{RQ}\perp\overline{AB}$於 Q

(2)$\because \overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，



$\therefore \overline{PR}=\frac{2}{3}\overline{AE}=\frac{2}{3}$，$\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}$

在ΔPQR 中，$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PR}^2+\overline{QR}^2}=\sqrt{(\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{5}{6}$

答：$\frac{5}{6}$