大學入學考試中心九十三學年度學科能力測驗試題數學科

第一部份：選擇題(佔 55 分)

壹、單選題(佔 30 分)

說明：第 1 至 6 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1.已知一等差數列共有十項，且知其奇數項之和為 15，偶數項之和為 30，則下列哪一選項為此數列之公差？ (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

解 1：設首項為 a，公差為 d，由題意知：

$$\begin{cases} a+(a+2d)+(a+4d)+(a+6d)+(a+8d)=15 \\ (a+d)+(a+3d)+(a+5d)+(a+7d)+(a+9d)=30 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} 5a+20d=15 & \cdots(1) \\ 5a+25d=30 & \cdots(2) \end{cases}$$

由(2)－(1)得 $5d=15$，∴公差 $d=3$

解 2：設公差為 d，由題意知：$\begin{cases} a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=15 & \cdots(1) \\ a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=30 & \cdots(2) \end{cases}$

由(2)－(1)：$(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)+(a_8-a_7)+(a_{10}-a_9)=15$

$\Rightarrow d+d+d+d+d=15$，∴公差 $d=3$

答：(3)

2.下列選項的數，何者最大？(其中 $n!=n\times(n-1)\times\cdots\cdots\times2\times1$)

(1) 100^{10} (2) 10^{100} (3) 50^{50} (4) $50!$ (5) $\dfrac{100!}{50!}$

解：(1) $100^{10}=(10^2)^{10}=10^{20}<$(2)

(2) $10^{100}=(10^2)^{50}=100^{50}>$(3)

(4) $50!=50\times49\times\cdots\cdots\times2\times1<50\times50\times\cdots\cdots\times50=$(3)

(5) $\dfrac{100!}{50!}=\dfrac{100\times99\times\cdots\times51\times50!}{50!}=100\times99\times\cdots\cdots\times51<100\times100\times\cdots\cdots\times100=$(2)

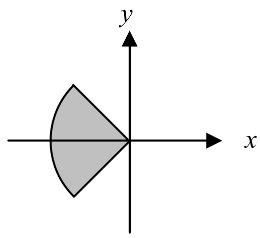
∴(2)最大

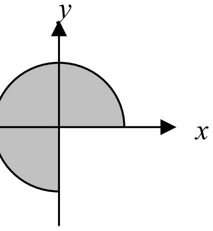
答：(2)

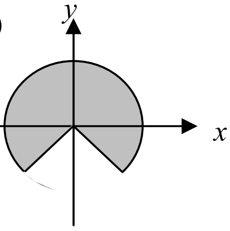
3.右圖陰影部分所示為複數平面上區域

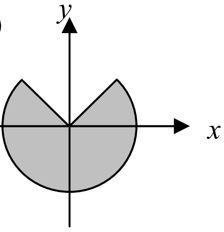
$A=\{z：z=r(\cos\theta+i\sin\theta)，0\le r\le1，\dfrac{3\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{5\pi}{4}\}$之略圖。

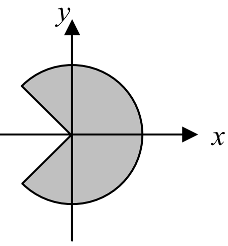
令 $D=\{w：w=z^3，z\in A\}$，試問下列選項中之略圖，何者之陰影部分與區域 D 最接近？

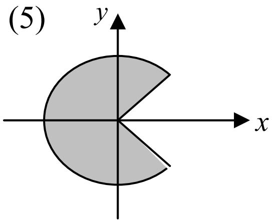


(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


解：由 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $w=z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$

(i)半徑：$0\le r\le 1$，$\therefore 0\le r^3\le 1$

(ii)角度：$\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}$，$\frac{9\pi}{4}\le 3\theta\le\frac{15\pi}{4}$，

故(5)與區域 D 最接近

答：(5)

4.在坐標空間中給定兩點 A(1，2，3)與 B(7，6，5)。令 S 為 xy-平面上所有使得向量 $\overrightarrow{PA}$ 垂直於向量 $\overrightarrow{PB}$ 的 P 點所成的集合，則

(1) S 為空集合　(2) S 恰含一點　(3) S 恰含兩點　(4) S 為一線段　(5) S 為一圓

解：∵P 點在 xy-平面上，∴設點 P 的坐標為$(x, y, 0)$

則 $\overrightarrow{PA}=(1-x, 2-y, 3)$，$\overrightarrow{PB}=(7-x, 6-y, 5)$

$\because \overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，即$(1-x, 2-y, 3)\cdot(7-x, 6-y, 5)=0$

得 $x^2+y^2-8x-8y+34=0$

但判別式 $D=(-8)^2+(-8)^2-4\times 34<0$ 或 配方為$(x-4)^2+(y-4)^2+2=0$

皆得知 S 為空集合。

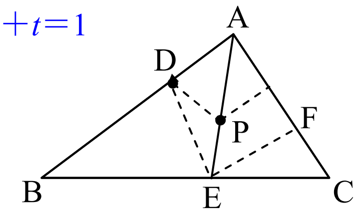
答：(1)

5.設ΔABC 為平面上的一個三角形，P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，其中 t 為一實數。試問下列哪一選項為 t 的最大範圍，使得 P 落在ΔABC 的內部？

(1) $0<t<\frac{1}{4}$　(2) $0<t<\frac{1}{3}$　(3) $0<t<\frac{1}{2}$　(4) $0<t<\frac{2}{3}$　(5) $0<t<\frac{3}{4}$

解：如圖，點 D、E 與 F 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 與 $\overline{CA}$ 邊的三等分點，

根據共線性質：若 $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，且 P，B，C 共線，則 $s+t=1$



當 $t=0$ 時，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，即 P＝D

當 $t=\frac{2}{3}$ 時，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，即 P＝E

故 P 落在 ΔABC 的內部，則 $0<t<\frac{2}{3}$

(此時，點 P 的圖形為線段 $\overline{DE}$ 去掉兩個端點 D 與 E)

答：(4)

6.台灣證券交易市場規定股票成交價格只能在前一個交易日的收盤價(即最後一筆的成交價)的漲、跌 7%範圍內變動。例如：某支股票前一個交易日的收盤價是每股 100 元，則今天該支股票每股的買賣價格必須在 93 元至 107 元之間。假設有某支股票的價格起伏很大，某一天的收盤價是每股 40 元，次日起連續五個交易日以跌停板收盤(也就是每天跌 7%)，緊接著卻連續五個交易日以漲停板收盤(也就是每天漲 7%)。請問經過這十個交易日後，該支股票每股的收盤價最接近下列哪一個選項中的價格？

(1) 39 元　(2) 39.5 元　(3) 40 元　(4) 40.5 元　(5) 41 元

解：根據題意，經過十個交易日後，該支股票每股的收盤價為：

$40\times(1-7\%)^5(1+7\%)^5=40\times[(1-7\%)(1+7\%)]^5$

$=40\times(1-0.0049)^5$　　(利用二項式定理展開)

$=40\times[C_0^5 1^5-C_1^5 1^4(0.0049)+C_2^5 1^3(0.0049)^2-C_3^5 1^2(0.0049)^3+C_4^5 1(0.0049)^4-C_5^5(0.0049)^5]$

$\fallingdotseq 40\times(1-5\times0.0049)=39$

註：二項式定理：$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^{n-k}y^k=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+\cdots+C_{n-1}^n x y^{n-1}+C_n^n y^n$

答：(1)

貳、多選題(佔 25 分)

說明：第 7 至 11 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項不給分。

7.中山高速公路重慶北路交流道南下入口匝道分成內、外兩線車道，路旁立有標誌「外側車道大客車專用」。請選出**不違反**此規定的選項：

(1)小型車行駛內側車道　(2)小型車行駛外側車道　(3)大客車行駛內側車道

(4)大客車行駛外側車道　(5)大貨車行駛外側車道

解：依題意「外側車道大客車專用」，表示

(i)「除了大客車外，其他車輛不可行駛外側車道」。

(ii)表示大客車可行駛外側車道，也可行駛內側車道。

答：(1)(3)(4)

8.在坐標平面上，下列哪些方程式的圖形可以放進一個夠大的圓裡面？

(1) $3x=2y^2$ (2) $3x^2+2y^2=1$ (3) $3x^2-2y^2=1$ (4) $|x+y|=1$ (5) $|x|+|y|=1$

解：依題意，只要是「封閉曲線」就可以放進一個夠大的圓裡面。

(1) $3x=2y^2$ 圖形為開口向右的拋物線，不是「封閉曲線」

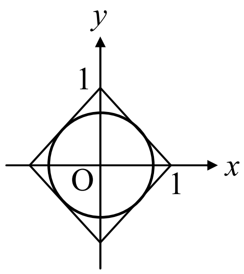
(2) $3x^2+2y^2=1$ 圖形為一橢圓，是「封閉曲線」

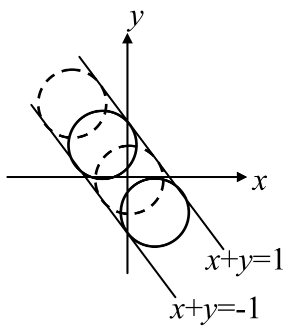
(3) $3x^2-2y^2=1$ 圖形為一雙曲線，不是「封閉曲線」

(4) $|x+y|=1$，即 $x+y=\pm1$，圖形為兩平行直線，不是「封閉曲線」

如下右圖，可以可以放進很多個夠大的圓

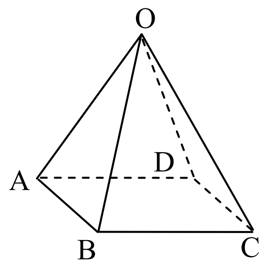
(5) $|x|+|y|=1$ 圖形為一菱形區域(如下左圖)，是「封閉曲線」





答：(2)(5)

9.如右圖 $O-ABCD$ 為一金字塔，底是邊長為 1 的正方形，頂點 O 與 A、B、C、D 之距離均為 2。試問下列哪些式子是正確的？

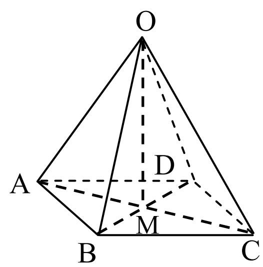


(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$ (2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$

(3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$ (4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$

(5) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2$

解：連接 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 且交點為 M，連接 $\overline{OM}$，如右圖



得知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}\neq\overrightarrow{O}$

(2)(3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$

(4)(法 1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$

$$=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-\overline{AB}^{\,2}=\frac{7}{2}$$

同理 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OD}|^2-\overline{CD}^{\,2}=\frac{7}{2}$，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$

(法 2) $\because\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\times2\times\cos\angle AOB$ 且 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=2\times2\times\cos\angle COD$

其中 $\Delta OAB\cong\Delta OCD$ (根據 SSS 全等性質)，$\therefore\angle AOB=\angle COD$

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$

(5)在 ΔOAC 中，$\overline{AC}=\sqrt{2}$，$\overline{OA}=\overline{OC}=2$

根據餘弦定理：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OC}|\cos\angle AOC=\overline{OA}\times\overline{OC}\times\dfrac{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{OA}\times\overline{OC}}$

$$=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-\overline{AC}^2}{2}=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2}=3$$

答：(3)(4)

10.從 1，2，…，10 這十個數中隨意取兩個，以 p 表示其和為偶數之機率，q 表示其和為奇數之機率。試問下列哪些敘述是正確的？

(1) $p+q=1$　(2) $p=q$　(3) $|p-q|\leq\frac{1}{10}$　(4) $|p-q|\geq\frac{1}{20}$　(5) $p\geq\frac{1}{2}$

解：1，2，…，10 中，偶數有 2，4，6，8，10 共 5 個，奇數有 1，3，5，7，9 共 5 個

∴樣本空間：$n(S)=n$(十個數中隨意取兩個)$=C_2^{10}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$

事件：$n(A)=n$(和為偶數)$=n$(偶數＋偶數，奇數＋奇數)$=C_2^5+C_2^5=20$

$\Rightarrow p=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$，$\therefore q=1-p=\frac{5}{9}$

答：(1)(4)

11.設 $f(x)$為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解，試問下列哪些敘述是正確的？

(1) $f(1-i)=0$　(2) $f(2+i)\neq 0$　(3)沒有實數 x 滿足 $f(x)=x$

(4)沒有實數 x 滿足 $f(x^3)=0$　(5)若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$

解：根據題意，且由實係數多項式虛根成雙定理與代數基本定理知：

方程式 $f(x)=0$ 的三個根為 $1+i$，$1-i$，及一實數根 α

(1)∵$1-i$ 也是方程式 $f(x)=0$ 的一根，∴ $f(1-i)=0$

(2)∵$2+i$ 不是方程式 $f(x)=0$ 的一根，∴$f(2+i)\neq 0$

(3)∵$f(x)-x=0$ 為三次實係數多項方程式，由代數基本定理知方程式至少有一實根

∴至少有一實數 x 滿足 $f(x)-x=0$，即 $f(x)=x$

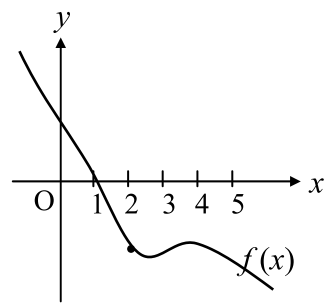
(4)∵$f(x^3)=0$ 為 9 次實係數多項方程式，由代數基本定理定理知方程式至少有一實根

∴至少有一實數 x 滿足 $f(x^3)=0$

(5)∵$f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，如右圖，根據勘根定理知：

∵多項方程式 $y=f(x)$的圖形是連續不斷的，必存在一實數 k 值，$0<k<2$，使得 $f(x)=0$ 恰只有一實數根，即與 x 軸恰有一交點$(0, k)$，如下圖

$\Rightarrow x>2$ 的圖形恆在 x 軸的下方，得知 $f(4)<0$



答：(1)(2)(5)

第二部份：選填題(佔 45 分)

說明：1.第 A 至 I 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(12－31)。
　　　2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.某數學老師計算學期成績的公式如下：五次平時考中取較好的三次之平均值佔 30%，兩次期中考各佔 20%，期末考佔 30%。某生平時考成績分別為 68、82、70、73、85，期中考成績分別為 86、79，期末考成績為 90，則該生學期成績為______。(計算到整數為止，小數點以後四捨五入)

解：根據題意，取平時考較好的成績為 82、73、85，列表如下：

事件	平時考	期中考 1	期中考 2	期末考
數值	82、73、85	86	79	90
比重	30%	20%	20%	30%

$\Rightarrow$ 該生學期成績為$=(\frac{85+82+73}{3}\times 30\%)+(86\times 20\%)+(79\times 20\%)+(90\times 30\%)$

$=24+17.2+15.8+27=84$ (分)

答：84 分

B.某電視台舉辦抽獎遊戲，現場準備的抽獎箱裡放置了四個分別標有 1000、800、600、0 元獎額的球。參加者自行從抽獎箱裡摸取一球（取後即放回），主辦單位即贈送與此球上數字等額的獎金，並規定抽取到 0 元的人可以再摸一次，但是所得獎金折半(若再摸到 0 就沒有第三次機會)：則一個參加者可得獎金的期望值是____元。(計算到整數為止，小數點以後四捨五入)

解：根據題意，列表如下：

事件	抽取 1000 元	抽取 800 元	抽取 600 元	第一次抽取到 0 元，再摸第二次			
				抽取 1000 元	抽取 800 元	抽取 600 元	抽取 0 元
數值	1000 元	800 元	600 元	500 元	400 元	300 元	0 元
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$

期望值 $E=(1000\times\frac{1}{4})+(800\times\frac{1}{4})+(600\times\frac{1}{4})+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}(500+400+300+0)=675$ (元)

答：675 元

C.設 a，b，c 為正整數，若 $a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$，則 $a+b+c=$________。

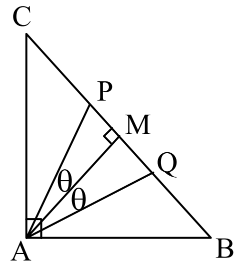
解：$a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=\log_{520}2^a\cdot 5^b\cdot 13^c=3=\log_{520}520^3$

又$\because 520^3=(2^3\cdot 5\cdot 13)^3=2^9\cdot 5^3\cdot 13^3$，得知 $a=9$，$b=3$，$c=3$，
故 $a+b+c=9+3+3=15$

答：15

D.設ΔABC 為一等腰直角三角形，$\angle$BAC＝90°。若 P、Q 為斜邊 $\overline{BC}$ 的三等分點，

則 tan$\angle$PAQ＝________。(化成最簡分數)



解 1：(1)如圖，作 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$ 於 M，

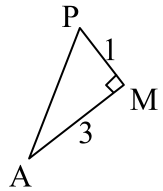
∵ΔABC 為一等腰直角三角形，∴M 為 $\overline{BC}$ 之中點

⇒ M 為ΔABC 的外心，且 $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$， $\overline{PM}=\overline{QM}$

(2)取 $\overline{PM}=\overline{QM}=1$，則

$\overline{BQ}=\overline{PQ}=\overline{CQ}=2$， $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=3$

(3)設$\angle$PAM＝$\angle$QAM＝θ，∴$\angle$PAQ＝2θ

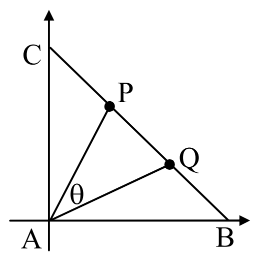


在ΔAPM 中，$\angle$APM＝90^0，$\tan\theta=\dfrac{\overline{PM}}{\overline{AM}}=\dfrac{1}{3}$

∴$\tan\angle PAQ=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\dfrac{3}{4}$

解 2：(1)如圖，建立一坐標，取 A(0，0)，B(3，0)，C(0，3)，則 P(1，2)，Q(2，1)

(2)設$\angle$PAQ＝θ，$\overrightarrow{AP}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{AQ}=(2,\ 1)$，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{5}$



在ΔPAQ 中，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|}=\dfrac{(1,\ 2)\cdot(2,\ 1)}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

∴$\tan\angle PAQ=\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

答：$\dfrac{3}{4}$

E.某高中招收高一新生共有男生 1008 人、女生 924 人報到。學校想將他們一男女合班原則平均分班，且要求各班有同樣多的男生，也有同樣多的女生；考量教學效益，並限制各班總人數在 40 與 50 人之間，則共分成______班。

解：∵(1008，924)＝84，則 84＝84×1＝42×2＝28×3＝….，∴可能分成 84，42，28，….班

若分成 84 班，則每班男生 12 人，女生 11 人，共 23 人。(不合)

若分成 42 班，則每班男生 24 人，女生 22 人，共 46 人。(合)

若分成 28 班，則……

$$\begin{array}{r|rr} 84 & 1008 & 924 \\ \hline & 12 & 11 \end{array}\qquad \begin{array}{r|rr} 42 & 1008 & 924 \\ \hline & 24 & 22 \end{array}$$

答：42 班

F.在坐標空間中，平面 $x-2y+z=0$ 上有一以點 $P(1,\ 1,\ 1)$ 為圓心的圓Γ，而 $Q(-9,\ 9,\ 27)$ 為圓Γ上一點。若過 Q 與圓Γ相切的直線之一方向向量為$(a,\ b,\ 1)$，則 $a=$___，$b=$___。

解：(1)如下圖，設與圓Γ相切的直線為 L，且其一方向向量為 $\vec{d}(a,\ b,\ 1)$

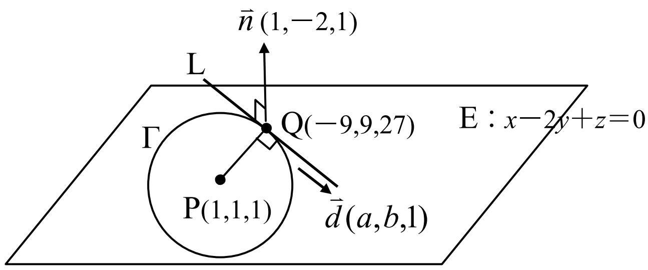
(2)令平面 E：$x-2y+z=0$ 的法向量為 $\vec{n}(1,\ -2,\ 1)$

$\because \overrightarrow{PQ}\perp\vec{d}(a,\ b,\ 1)$，得$(-10,\ 8,\ 26)\cdot(a,\ b,\ 1)=0$，$\therefore -5a+4b+13=0$ ….①

$\because \vec{n}(1,\ -2,\ 1)\perp\vec{d}(a,\ b,\ 1)$，得$(1,\ -2,\ 1)\cdot(a,\ b,\ 1)=0$，$\therefore a-2b+1=0$ ….②

由①與②解得 $a=5$，$b=3$

答：$a=5$，$b=3$



G.設 $270°<A<360°$且 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2004°$。若 $A=m°$，則 $m=$_______。

解：(1)利用疊合，$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A)$

$=2(\sin A\cos30°+\cos A\sin30°)=2\sin(A+30°)$

(2)$\because 270°<A<360°$，$\therefore 300°<A+30°<390°$

則 $2\sin 2004°=2\sin(11\times180°+24°)=-2\sin 24°=2\sin(-24°)=2\sin 336°$

得知 $A+30°=336°$，$\Rightarrow A=m°=306°$

答：306

H.坐標平面上的圓 C：$(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有_____個點與原點的距離正好是整數值。

解 1：設 $P(x,\ y)$為圓 C：$(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上任一點，$\therefore \begin{cases}x=7+3\cos\theta\\ y=8+3\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

$\therefore \overline{OP}^2=(7+3\cos\theta)^2+(8+3\sin\theta)^2=122+6(7\cos\theta+8\sin\theta)=122+42\cos\theta+48\sin\theta$

其中$-\sqrt{(6\times7)^2+(6\times8)^2}\le 42\cos\theta+48\sin\theta\le\sqrt{(6\times7)^2+(6\times8)^2}$

$\Rightarrow\ -6\sqrt{113}\le 42\cos\theta+48\sin\theta\le 6\sqrt{113}$

$\therefore\ 122-6\sqrt{113}\le\overline{OP}^2\le 122+6\sqrt{113}$，得知 $58.\cdots\le\overline{OP}^2\le 185.\cdots$

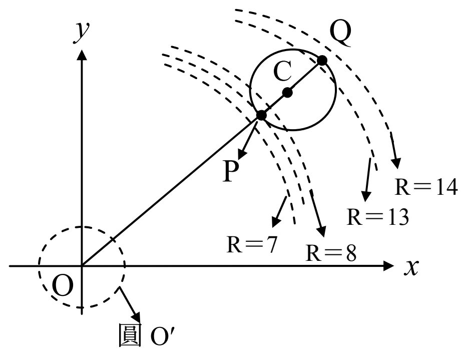
又因為 $\overline{OP}$ 是整數值，故 $\overline{OP}^2=(\pm8)^2$，$(\pm9)^2$，…，$(\pm13)^2$

$\therefore$P 與原點的整數距離 $\overline{OP}$ 共有$(13-7)\times2=12$ 個點

解 2：(1)∵圓 C：$(x-7)^2+(y-8)^2=9$，知圓心 C(7，8)，半徑為 3

設圓 O′是以 O(0，0)為圓心，半徑為 R 的一圓，即圓 O′：$x^2+y^2=R^2$

(2)今考慮當 R 為整數時，圓 O′與圓 C 的交點個數



如右圖，∵d(O，C)＝$\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}$，

∴$\overline{OP}=\sqrt{113}-3 \doteqdot 7.\cdots$，$\overline{OQ}=\sqrt{113}+3 \doteqdot 13.\cdots$

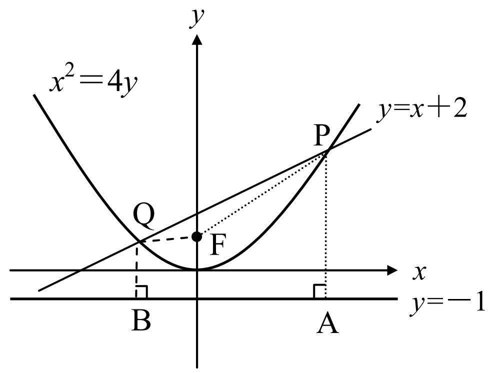
即當 R＝7 時，圓 O′與圓 C 無交點

當 R＝8～13 時，圓 O′與圓 C 相交於 2 點

得知相交為整數點共有 12 個

答：12 個

I.在坐標平面上，設直線 L：$y=x+2$ 與拋物線Γ：$x^2=4y$ 相交於 P、Q 兩點。若 F 表拋物線Γ的焦點，則 $\overline{PF}+\overline{QF}=$______。



解 1：(1)如右圖，求交點 P、Q：$\begin{cases} L: y=x+2 \\ \Gamma: x^2=4y \end{cases}$

$\Rightarrow x^2=4(x+2)$，$x=2\pm2\sqrt{3}$，$y=4\pm2\sqrt{3}$

令 P($2+2\sqrt{3}$，$4+2\sqrt{3}$)

Q($2-2\sqrt{3}$，$4-2\sqrt{3}$)

(2)由拋物線Γ：$x^2=4y$，∴焦點 F(0，1)，準線 M：$y=-1$

根據拋物線定義：$\overline{PF}+\overline{QF}$

$=d(\text{P}，\text{M})+d(\text{Q}，\text{M})=\overline{PA}+\overline{QB}=(5+2\sqrt{3})+(5-2\sqrt{3})=10$

解 2：(1)由 L：$y=x+2$ 得知 $x=y-2$，代入Γ：$x^2=4y$，

∴$(y-2)^2=4y$，即 $y^2-8y+4=0$

(2)如上圖，由拋物線Γ：$x^2=4y$，∴焦點 F(0，1)，準線 M：$y=-1$

令交點 P(x_1，y_1)、Q(x_2，y_2)，

則 y_1，y_2 為方程式 $y^2-8y+4=0$ 的兩根，⇒兩根和 $y_1+y_2=8$

∴$\overline{PF}+\overline{QF}=d(\text{P}，\text{M})+d(\text{Q}，\text{M})=\overline{PA}+\overline{QB}$

$=(y_1+1)+(y_2+1)=(y_1+y_2)+2=8+2=10$

答：10