大學入學考試中心九十一學年度學科能力測驗試題數學科第二次考試(補考)

第一部份：選擇題(佔 60 分)

壹、單選題(佔 30 分)

說明：第 1 至 6 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1.在 230 與 240 之間共有多少個質數？

(1) 1個 (2) 2個 (3) 3個 (4) 4個 (5) 5個

解：(1)去除偶數，剩下 231，233，235，237，239

(2)去除 $231=3\times77$；$235=5\times47$；$237=3\times79$，剩下 233，239 二數

(3)利用質數判別法：

$\because\sqrt{233}=15.26\cdots$，檢查 2，3，5，7，11，13 均不為 233 因數，$\therefore$233 為質數

$\because\sqrt{239}=15.46\cdots$，檢查 2，3，5，7，11，13 均不為 239 因數，$\therefore$239 為質數

答：(2)

2.方程式 $x^4+2x^2-1=0$ 有多少個實根？

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4

解 1：令 $y=x^2\geq 0$，則原式 $=y^2+2y-1=0$，$\therefore y=-1\pm\sqrt{2}$ ($\because y\geq 0$，$\therefore -1-\sqrt{2}$ 不合)

得知 $y=-1+\sqrt{2}=x^2$，$\Rightarrow x$ 有二解，$\therefore$原方程式 x 有二實根

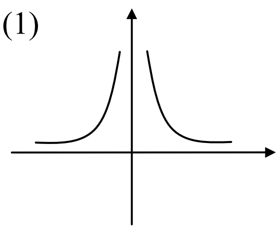
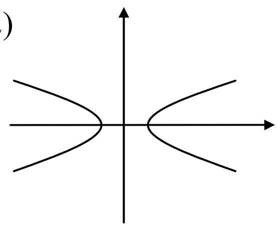
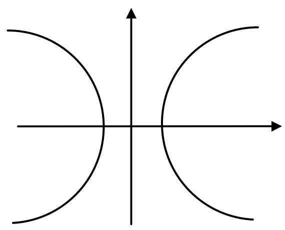
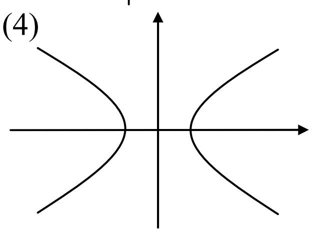
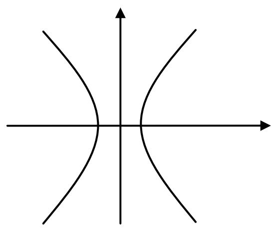
解 2：利用配方法，$x^4+2x^2-1=0\Rightarrow(x^2+1)^2=2$，$\therefore x^2+1=\pm\sqrt{2}$

若 $x^2+1=\sqrt{2}$，$\therefore x^2+1=\sqrt{2}-1>0$，故 x 有二相異實根

若 $x^2+1=-\sqrt{2}$，$\therefore x^2=-\sqrt{2}-1<0$，故 x 有二相異虛根

答：(3)

3.下列圖形有一為雙曲線，請將它選出來。

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)


解：雙曲線的最大特色是具有漸近線

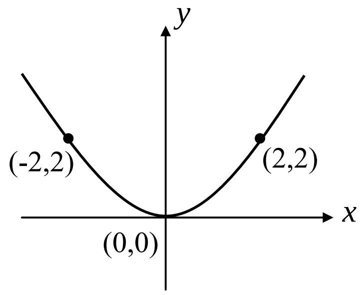
$\therefore$通過中心，只有(4)可以利用尺規找出漸近線

答：(4)

4.如圖所示，在坐標平面上，以原點(0，0)為頂點，且通過(2，2)，(－2，2)的拋物線，它的焦點坐標為：

(1) (0，0.5)　(2) (0，1)　(3) (0，1.5)

(4) (0，2)　(5) (0，4)



解：(1)∵圖形為開口向上，頂點為(0，0)的拋物線

∴設方程式 Γ：$(x-0)^2=4c(y-0)$

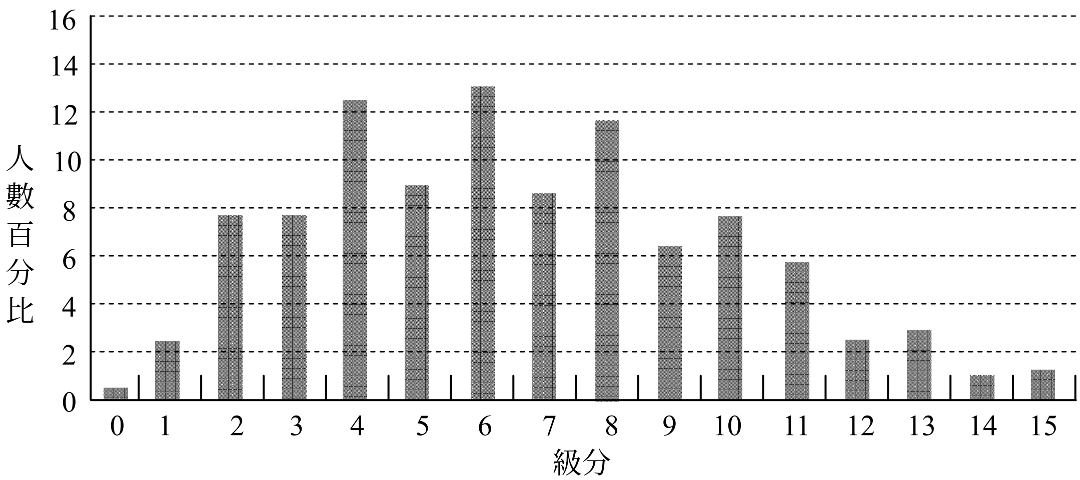
(2)通過(2，2)，代入Γ：$4=8c$，得知 $c=\dfrac{1}{2}$，即 Γ：$x^2=2y$

則焦點坐標為$(0，0+\dfrac{1}{2})=(0，\dfrac{1}{2})$

答：(1)

5.九十年度大學學科能力測驗有 12 萬名考生，各學科成績採用 15 級分，數學學科能力測驗成績分佈圖如下圖。請問有多少考生的數學成績級分高於 11 級分？選出最接近的數目。

(1) 4000人　(2) 10000人　(3) 15000人　(4) 20000人　(5) 32000人



90 學年度數學學科能力測驗成績分佈圖

解：由分佈圖得知 11 級分以上百分比約略如下表：

級分	12	13	14	15	合計
百分比	2.5%	3%	1%	1.5%	8%

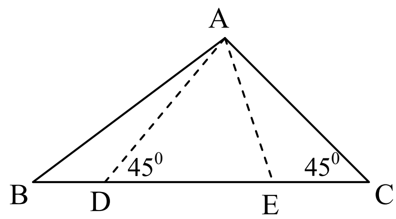
∴級分高於 11 級分的人數＝120000×8%＝9600 人≒10000 人

答：(2)

6.如圖，ΔABC 中，BC 邊上兩點 D、E 分別與 A 連線。假設∠ACB＝∠ADC＝45^0，三角形 ABC、ABD、ABE 的外接圓直徑分別為 c、d、e。試問下列何者為真？

(1) $c<e<d$　(2) $d<e<c$　(3) $e<c$，$d<c$

(4) $d=c<e$　(5) $d=c>e$



解：根據題意，利用正弦定理，設 $\overline{AB}=k$

在ΔABC 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle C)}=\dfrac{k}{\sin 45^0}=c$

在ΔABD 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)}=\dfrac{k}{\sin 135^0}=\dfrac{k}{\sin 45^0}=d$

在ΔABE 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle AEB)}=\dfrac{k}{\sin\theta}=e$，$\theta=\angle AED>45^0$ （ΔAEC 的外角關係)

∵在 $0^0<\theta<90^0$ 範圍內，$\sin\theta$為遞增函數，故 $\sin(\angle AED)>\sin 45^0$

$\therefore \dfrac{k}{\sin(\angle AEB)}<\dfrac{k}{\sin 45^0}$，$\Rightarrow$ $e<c=d$

答：(5)

貳、多選題(佔 30 分)

說明：第 7 至 12 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項不給分。

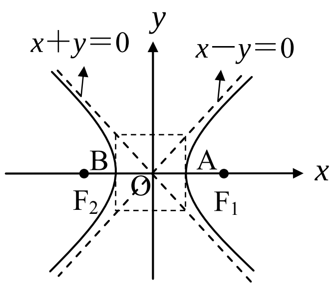
7.關於雙曲線 $x^2-y^2=1$，下列選項何者為真？

(1)對稱於 y 軸 (2)對稱於直線 $x-y=0$ (3)直線 $x+y=0$ 為一漸近線

(4) $(-2，0)$及$(2，0)$為其焦點 (5) $(-1，0)$及$(1，0)$為其頂點

解：(1)雙曲線 $x^2-y^2=1$ 之中心為$(0，0)$，貫軸為 x 軸，共軛軸為 y 軸

∴對稱於 y 軸，也對稱於 x 軸，如右圖



(2)對稱 x 軸與 y 軸，不對稱於直線 $x-y=0$

註：對稱判斷：

以$-x$ 代 x，原方程式不變，表示對稱 y 軸

以$-y$ 代 y，原方程式不變，表示對稱 x 軸

以 x、y 互換，原方程式不變，表示對稱直線 $x-y=0$

(3)漸近線為 $x^2-y^2=0$，$\Rightarrow x-y=0$ 與 $x+y=0$

(4)如右圖，∵$x^2-y^2=1$，∴$a=1$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$

∴焦點 $F_1(\sqrt{2}，0)$，$F_2(-\sqrt{2}，0)$，頂點 $A(1，0)$，$B(-1，0)$

答：(1)(3)(5)

8.設實數 a，b 滿足 $0<a<1$，$0<b<1$，則下列選項哪些必定為真？

(1) $0<a+b<2$　(2) $0<ab<1$　(3) $-1<b-a<0$

(4) $0<a/b<1$　(5) $|a-b|<1$

解：∵$0<a<1$，$0<b<1$，∴$-1<-b<0$，$1<\frac{1}{b}<\infty$

(1) $0<a+b<2$，成立

(2) $0<ab<1$，成立

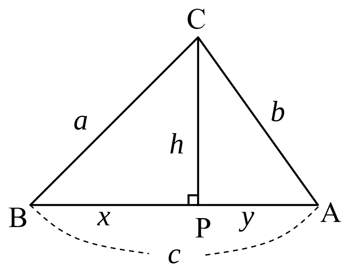
(3) $-1<b-a<1$

(4)∵$0<a<1$，$1<\frac{1}{b}<\infty$，∴$0<\frac{a}{b}<\infty$

(5)由(3)知$-1<b-a<1$，即$-1<a-b<1$，∴$|a-b|<1$，成立

答：(1)(2)(5)

9.如右圖，ΔABC 的對邊分別為 a，b，c，P 為 C 點的垂足，h 為高，BP＝x，AP＝y，則下列選項哪些必定為真？



(1) $\cos C=\frac{h}{a}+\frac{h}{b}$　(2) $\cos C=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$

(3) $\cos C=\cos(A+B)$　(4) $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(5) $\cos C=\frac{h^2-xy}{ab}$

解：(1) $\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)$

(2) $\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\frac{y}{b}\times\frac{x}{a}+\frac{h}{b}\times\frac{h}{a}=\frac{h^2-xy}{ab}$

(3)根據餘弦定理 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

答：(4)(5)

10.平面上有一個直角三角形，其三邊的斜率為 m_1，m_2，m_3，並假設 $m_1>m_2>m_3$，則下列選項哪些必定為真？

(1) $m_1m_2=-1$　(2) $m_1m_3=-1$　(3) $m_1>0$　(4) $m_2\leq 0$　(5) $m_3<0$

解：∵直角三角形中，直角的兩邊之斜率乘積為-1

∴得知 m_1，m_2，m_3，中至少有一正數及一負數

又∵$m_1>m_2>m_3$，故知 $m_1>0$，m_2 可能為正數或 0 或負數，$m_3<0$

答：(3)(5)

11.函數 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos 10x-\cos 12x)$，$x$ 為實數。則下列選項哪些為真？

(1) $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x$　(2) $|f(x)|\le 1$ 恆成立　(3) $f(x)$的最大值是 1

(4) $f(x)$的最小值是－1　(5) $f(x)=0$ 的解有無窮多個

解：(1)利用和差化積公式，則

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos 10x-\cos 12x)=\frac{1}{2}[-2\sin(\frac{10x+12x}{2})\sin(\frac{10x-12x}{2})]$$

$$=\frac{1}{2}[-2\sin 11x\cdot\sin(-x)]=\sin 11x\cdot\sin x$$

(2) $|f(x)|=|\sin 11x\cdot\sin x|\le|\sin 11x|\times|\sin x|\le 1$　($\because|\sin\theta|\le 1$)

(3)若 $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x=1$，則 $\sin x=1$ 且 $\sin 11x=1$ 或 $\sin x=-1$ 且 $\sin 11x=-1$ (不合)

當 $\sin x=1$ 時，$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in Z$，代入 $\sin 11x=1$

得 $\sin 11(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\sin(22n\pi+\frac{11\pi}{2})=\sin\frac{11\pi}{2}=-1$(不合)　($\because\sin 11x=1$)

亦即 $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x\ne 1$，$\therefore f(x)=\sin 11x\cdot\sin x<1$，故 $f(x)$的最大值不是 1

(4)若 $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x=-1$，則 $\sin x=1$ 且 $\sin 11x=-1$ 或 $\sin x=-1$ 且 $\sin 11x=1$

當 $\sin x=1$ 時，$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in Z$，代入 $\sin 11x=-1$，由(3)得知正確

當 $\sin x=-1$ 時，$x=2n\pi-\frac{\pi}{2}$，$n\in Z$，代入 $\sin 11x=1$，亦正確

$\therefore f(x)=\sin 11x\cdot\sin x$ 的最小值是－1

(5)若 $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x=0$，則 $\sin x=0$ 或 $\sin 11x=0$

當 $\sin x=0$ 時，則 $x=n\pi$，$n\in Z$ 或 當 $\sin 11x=0$ 時，則 $11x=n\pi$，$n\in Z$

$\therefore f(x)=0$ 時，解有無窮多個

答：(1)(2)(4)(5)

12.三相異平面兩兩相交於三條相異直線 l_1、l_2、l_3。試問下列選項哪些絕不可能發生？

(1) l_1、l_2、l_3 三線共交點　(2) l_1、l_2、l_3 不共面，但 $l_1// l_2// l_3$　(3) l_1、l_2、l_3 共平面

(4) l_1、l_2、l_3 兩兩相交，但三點相異　(5) l_1、l_2、l_3 三線中兩兩都是歪斜線

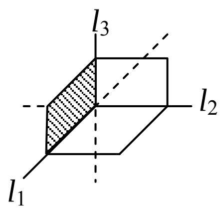
解：設此三相異平面為 E_1、E_2、E_3，且其方程式之係數行列式為Δ

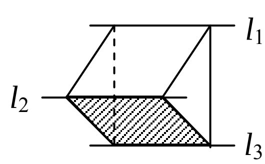
又直線 l_1、l_2、l_3 分別為 E_1 與 E_2、E_2 與 E_3、E_1 與 E_3 之交線，則

(1)若$\Delta\ne 0$，則 l_1、l_2、l_3 交於一點，$\therefore$三線有共交點，如右上圖

(2)若$\Delta=0$，但$\Delta_x\ne 0$ 或$\Delta_y\ne 0$ 或$\Delta_z\ne 0$

表示平面 E_1、E_2、E_3 兩兩相交，則可能 $l_1// l_2// l_3$，如右下圖





答：(3)(4)(5)

第二部份：選填題(佔 40 分)

說明：1.第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13－35)。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 11^{15}除以 100 的餘數為______。

解 1：利用二項定理：$11^{15}=(10+1)^{15}=C_0^{15}10^{15}+C_1^{15}10^{14}+\cdots+C_{13}^{15}10^2+C_{14}^{15}10+C_{15}^{15}10^0$

$=100[C_0^{15}10^{13}+C_1^{15}10^{12}+\cdots+C_{13}^{15}10^0]+150+1$

∴11^{15}除以 100 的餘數＝151 除以 100 的餘數＝51

解 2：$R_{100}(11^{15})=R_{100}(11^3)^5=R_{100}(31)^5$

$=R_{100}[(31)^2\times(31)^2\times31]=R_{100}[61\times61\times31]=R_{100}[21\times31]=51$

答：51

B.令複數 $z=2(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})$，且 $z\cdot i=2(\cos a\pi+i\sin a\pi)$，則實數 a＝______。

解：∵$z\cdot i=2(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

$=2[\cos(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{2})]=2(\cos\frac{9\pi}{14}+i\sin\frac{9\pi}{14})$，∴$a=\frac{9\pi}{14}$

答：$\frac{9\pi}{14}$

C.某人存入銀行 10000 元，言明年利率 4 %，以半年複利計息，滿一年本利和為 Q 元。則 Q＝____。

解：∵一年＝2 期半年，則年利率 4 %＝半年利率 2 %

∴本利和 Q＝$10000(1+2\%)^2$＝10404

答：10404

D.在平面上有一正方形ABCD，AB、BC、CD、DA的延長線分別交直線L於P、Q、R、S。已知PR＝3、QS＝4，則正方形ABCD的邊長為______。

解 1：(1)如圖，過 C 點作 $\overline{MN}$ //L，交 $\overline{AP}$ 、 $\overline{AS}$ 於 M、N

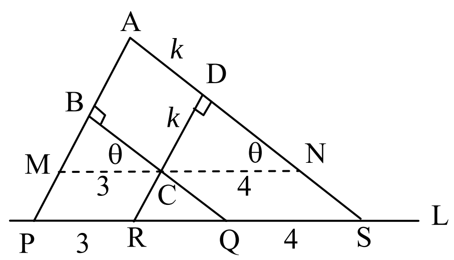
得知 $\overline{MC}=3$， $\overline{NC}=4$

(2)令正方形 ABCD 的邊長為 k，即 $\overline{BC}=\overline{DC}=k$

且設∠BCM＝∠DNC＝θ (同位角相等)

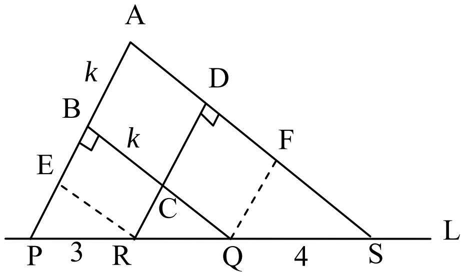
∴在Δ BCM 中，$\cos\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}}=\frac{k}{3}$

在Δ DNC 中，$\sin\theta=\frac{\overline{DC}}{\overline{CN}}=\frac{k}{4}$



又∵$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，∴$(\frac{k}{3})^2+(\frac{k}{4})^2=1$，得 $k=\frac{12}{5}$

解 2：(1)作 $\overline{RE}\perp\overline{AP}$、$\overline{QF}\perp\overline{AS}$，如右圖



∵ABCD 為正方形，設邊長為 k，即 $\overline{BC}=\overline{DC}=k$

∴ΔPER，ΔQFS 均為直角三角形

(2)∵ΔPER ~ ΔAPS ~ ΔFQS

$$\therefore\ \frac{\overline{PE}}{\overline{PR}}=\frac{3}{\sqrt{3^2-k^2}}=\frac{\overline{QS}}{\overline{QF}}=\frac{4}{k},$$

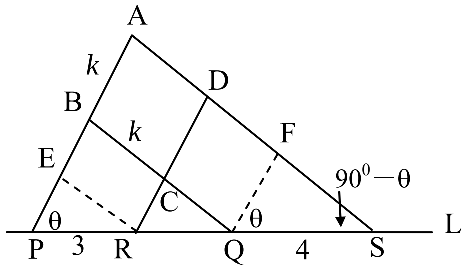
得 $k=\pm\dfrac{12}{5}$，取 $k=\dfrac{12}{5}$

解 3：(1)作 $\overline{RE}\perp\overline{AP}$、$\overline{QF}\perp\overline{AS}$，如右圖

∵ABCD 為正方形，設邊長為 k，即 $\overline{BC}=\overline{DC}=k$

∴ΔPER，ΔQFS 均為直角三角形

令∠APS＝θ，則∠ASP＝90^0－θ，且 0^0＜θ＜90^0



(2)在ΔPER 中，$\overline{RE}=k=3\sin\theta$

在ΔQFS 中，$\overline{QF}=k=4\cos\theta$

$\Rightarrow k=3\sin\theta=4\cos\theta$，得 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，

∴$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，得正方形邊長為 $k=3\sin\theta=\dfrac{12}{5}$

答：$\dfrac{12}{5}$

E.空間中有三個平面 $5x+4y-4z=kx$，$4x+5y+2z=ky$，$x+y+z=0$，其中 $k<10$，
當 $k=$_____時，三個平面交於一線。

解：$\begin{cases}5x+4y-4z=kx\\4x+5y+2z=ky\\x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(5-k)x+4y-4z=0\\4x+(5-k)y+2z=0\\x+y+z=0\end{cases}$

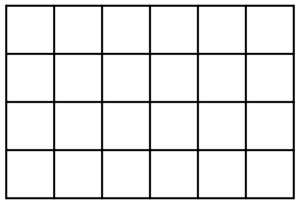
∵三個平面交於一線 $\Rightarrow\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

$$\therefore\begin{vmatrix}5-k&4&-4\\4&5-k&2\\1&1&1\end{vmatrix}=0，展開得(5-k)^2-16+8+4(5-k)-16-2(5-k)=0$$

$\Rightarrow k^2-12k+11=0$，∴$k=1$ 或 $k=11$(不合，∵$k<10$)

答：$k=1$

F.如右圖各小格為 1cm^2 的正方形。試問圖中大大小小的正方形共有多少個？答：_____個



解：邊長 1 cm 的正方形有 $6\times4=24$ 個

邊長 2 cm 的正方形有 $5\times3=15$ 個

邊長 3 cm 的正方形有 $4\times2=8$ 個

邊長 4 cm 的正方形有 $3\times1=3$ 個

共有 $24+15+8+3=50$ 個

答：50

G.一顆半徑為 12 公分的大巧克力球，裡頭包著一顆半徑為 5 公分的軟木球。如果將此巧克力球重新融化，做成半徑為 2 公分的實心巧克力球，最多可以做幾顆這樣的巧克力球？

答：_____顆

解：一顆大巧克力球體積 $=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot12^3-\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot5^3=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot1603$

半徑為 2 公分的一顆實心巧克力球體積 $=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot2^3=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot8$

$$\therefore\ \frac{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot1603}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot8}\doteqdot200.375\doteqdot200$$

答：200

H.某次考試，有一多重選擇題，有 A、B、C、D、E 五個選項。給分標準為完全答對給 5 分，只答錯 1 個選項給 2.5 分，答錯 2 個或 2 個以上的選項得 0 分。若某一考生對該題的 A、B 選項已確定是應選的正確答案，但 C、D、E 三個選項根本看不懂，決定這三個選項要用猜的來作答。則他此題所得分數的期望值為______分。

解：樣本空間 $=n(\text{S})=n(\text{C、D、E 選項作答與否})=2\times2\times2=8$

事件 A	答對	錯 1 個選項	錯 2 或 3 個選項
分數	5 分	2.5 分	0 分
機率	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	$C_1^3(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}$	$1-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

期望值 $=5\times\frac{1}{8}+2.5\times\frac{3}{8}+0\times\frac{1}{2}=1+\frac{9}{16}$

答：$1+\frac{9}{16}$