大學入學考試中心九十一學年度學科能力測驗試題數學科第一次考試

第一部份：選擇題(佔 60 分)

壹、單選題(佔 30 分)

說明：第 1 至 6 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1.設 P(x，y)為坐標平面上一點，且滿足

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}$，那麼 P 點的位置在哪裡？

(1)第一象限　(2)第二象限　(3)第三象限　(4)第四象限　(5) x 軸或 y 軸上

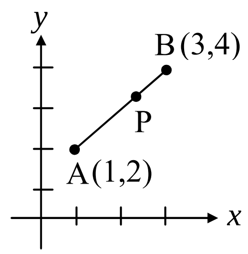
解：令 A(1，2)，B(3，4)

$\therefore \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}$

$\Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}=\overline{AB}$，$\therefore$P($x$，$y$)在 $\overline{AB}$ 上，如右圖

又$\because$A(1，2)，B(3，4)都在第一象限

$\therefore$點 P 在第一象限



答：(1)

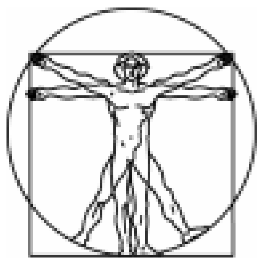
2.一群登山友，在山上發現一顆巨樹，隊中 10 位身高 170 公分的男生，手拉著手剛好環抱大樹一圈。問樹幹的直徑最接近下列何值？

(1) 3 公尺　(2) 5 公尺　(3) 7 公尺　(4) 9 公尺　(5) 11 公尺

解：如圖所示，利用性質「人的身高約為兩手張開的長度」

設樹幹的半徑為 r，則圓周長＝$2\pi r=170\times 10=1700$ (公分)

$\Rightarrow$直徑＝$2r \doteqdot \dfrac{1700}{\pi} \doteqdot 541$(公分)$\doteqdot 5$(公尺)



答：(2)

3.如圖，下面哪一選項中的向量與另兩個向量$\overrightarrow{PO}$、$\overrightarrow{QO}$之和等於零向量？

(1) $\overrightarrow{AO}$　(2) $\overrightarrow{BO}$　(3) $\overrightarrow{CO}$　(4) $\overrightarrow{DO}$　(5) $\overrightarrow{EO}$

解：(1)建立以 O 為原點，單位長為 1 的坐標，如右圖

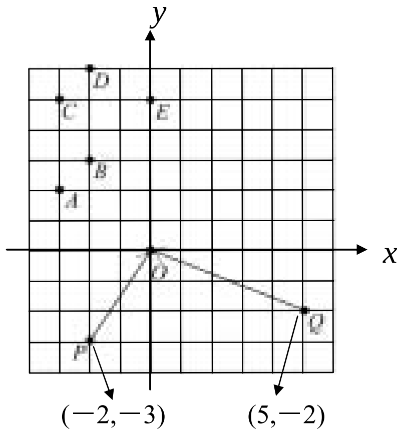
$\therefore$P(-2，-3)，Q(5，-2)

$\therefore \overrightarrow{PO}=(2，3)$，$\overrightarrow{QO}=(-5，2)$，則$\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}=(-3，5)$

(2)$\overrightarrow{AO}=(3，-2)$；$\overrightarrow{BO}=(2，-3)$；$\overrightarrow{CO}=(3，-5)$

$\overrightarrow{DO}=(2，-6)$；$\overrightarrow{EO}=(0，-5)$

$\therefore$只有$\overrightarrow{CO}$，使得$\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{CO}=(0，0)=\overrightarrow{O}$



答：(3)

4.若某校 1000 位學生的數學段考成績平均分數是 65.24 分，樣本標準差是 5.24 分，而且已知成績分佈呈現常態分配。試問全校約有多少人數學成績低於 60 分？

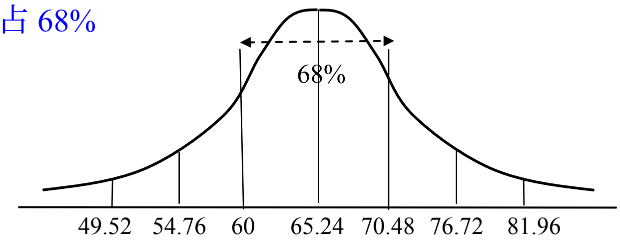
(1)約 80 人 (2)約 160 人 (3)約 240 人 (4)約 320 人 (5)約 400 人

解：如圖，根據常態分配(68－95－99.7)，算術平均數 M＝65.24，標準差 S＝5.24

∴落在(65.24－5.24，65.24＋5.24)＝(60，70.48)占 68%

約有 1000×68%＝680 (人)

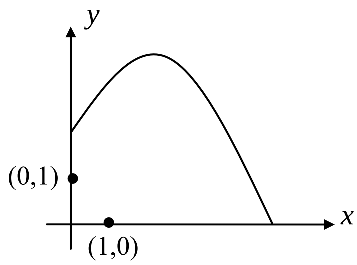
∴低於 60 分的約有(1000－680)÷2＝160 (人)



答：(2)

5.試問用下列哪一個函數的部分圖形來描述右圖較恰當？

(1) $(x-2)^2-2$ (2) $2\sin(x)+2$ (3) $2\cos(x)$
(4) $-0.5(x-2)^2+4$ (5) $3-2^x$



解：(1)令 $x=1$ 代入 $(x-2)^2-2=-1$ 與右圖不符。

或 $(x-2)^2-2$ 的圖形為開口向上之拋物線，與右圖不符。

(2) $\sin(x)$ 具週期性，右圖的右半部無轉折點，顯然不符。

(3)當 $x=\dfrac{\pi}{2}>1$ 時，$2\cos(x)=0$ 與右圖不符。

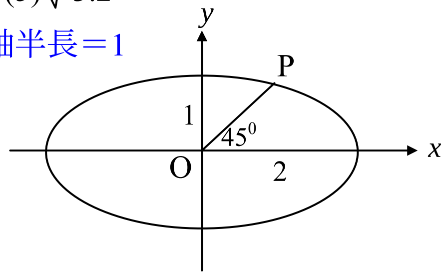
(5)當 $x=1$ 時，代入 $3-2^x=1$，與右圖不符。

(4)開口向下，且當 $x=1$ 時，$-0.5(x-2)^2+4=3.5$ 也近似右圖

答：(4)

6.在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2。如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P。則此交點 P 與中心 O 的距離為：

(1) 1.5 (2) $\sqrt{1.6}$ (3) $\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{2.5}$ (5) $\sqrt{3.2}$



解：(1)根據題意，此橢圓的中心為(0，0)，長軸半長＝2，短軸半長＝1

∴橢圓方程式 Γ：$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$

(2)如右圖，直線 OP 與 x 軸夾角 45^0，設 P(k，k)代入Γ，

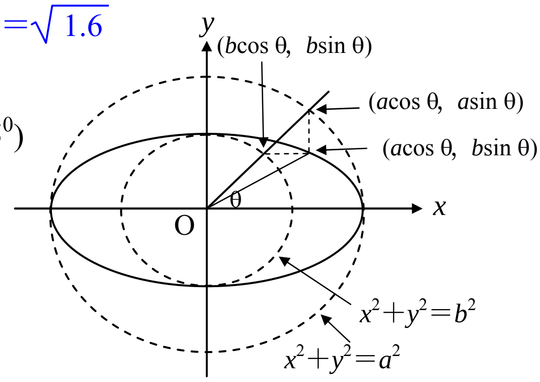
得 $\dfrac{k^2}{4}+\dfrac{k^2}{1}=1$，$k^2=\dfrac{4}{5}$，取 $k=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，∴P($\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$)

交點 P 與中心 O 的距離＝$\overline{OP}=\sqrt{k^2+k^2}=\sqrt{\dfrac{8}{5}}=\sqrt{1.6}$

答：(2)

註：本題點 P 不可以利用參數式設為 P($2\cos 45^0$，$\sin 45^0$)

如右圖。



貳、多選題(佔 30 分)

說明：第 7 至 12 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項不給分。

7.若實數 a，b，c 滿足 $abc>0$，$ab+bc+ca<0$，$a+b+c>0$，$a>b>c$，則下列選項何者為真？

(1) $a>0$　(2) $b>0$　(3) $c>0$　(4) $|a|>|b|$　(5) $a^2>c^2$

解：$\because abc>0$，且 $a>b>c$，$\therefore$可能情形有：(1)$a>0$，$b>0$，$c>0$ 或(2)$a>0$，$b<0$，$c<0$。

(1)若 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 時，則與 $ab+bc+c\,a>0$，不合(與 $ab+bc+ca<0$ 矛盾)

(2)若 $a>0$，$b<0$，$c<0$ 時，則

$\because a+b+c>0$，$\therefore$得知 $|a|>|b|$且$|a|>|c|$，得知 $a^2>c^2$

答：(1)(4)(5)

8.一機器狗每秒鐘前進或者後退一步，程式設計師讓機器狗以前進 3 步，然後再後退 2 步的規律移動。如果將此機器狗放在數線的原點，面向正的方向，以 1 步的距離為 1 單位長。令 P(n)表示第 n 秒時機器狗所在位置的坐標，且 P(0)＝0。那麼下列選項何者為真？

(1) P(3)＝3　(2) P(5)＝1　(3) P(10)＝2　(4) P(101)＝21　(5) P(103)＜P(104)

解 1：根據題意，P(0)＝0；P(1)＝1；P(2)＝2；P(3)＝3；P(4)＝2；P(5)＝1；….；P(10)＝2
P(15)＝3；….；P(100)＝20；P(101)＝21；P(102)＝22；P(103)＝23；P(104)＝22；
P(105)＝21

解 2：此機器狗在 1、2、3、….秒時，在數線上的坐標依次為

1，2，3，2，1

2，3，4，3，2

3，4，5，4，3；….

設 n 除以 5 得商數為 m，餘數為 k，即 $n=5m+k$，如下略表：

$$\therefore 得\ P(n)=P(5m+k)=\begin{cases} m & 當k=0 \\ m+1 & 當k=1 \\ m+2 & 當k=2 \\ m+3 & 當k=3 \\ m+2 & 當k=4 \end{cases}$$

商數＼餘數	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	2
1	1	2	3	4	3
2	2	3	4	5	4
3	3	4	5	6	5

(1) $P(3)=P(5\times0+3)=0+3=3$

(2) $P(5)=P(5\times1+0)=1+0=1$

(3) $P(10)=P(5\times2+0)=2+0=2$

(4) $P(101)=P(5\times20+1)=20+1=21$

(5) $P(103)=P(5\times20+3)=20+3=23$,

$P(104)=P(5\times20+4)=20+2=22$，$\therefore P(103)>P(104)$

答：(1)(2)(3)(4)

9.下列哪些選項與方程組$\begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$的解集合相同？

(1) $y=0$ (2) $\begin{cases}2x+3z=0\\y=0\end{cases}$ (3) $x=y=0$ (4) $\begin{cases}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$ (5) $\begin{cases}6x+4y+9z=0\\2x+y+3z=0\end{cases}$

解 1：(2)$\begin{cases}2x+y+3z=0\cdots(1)\\4x+3y+6z=0\cdots(2)\end{cases}$，由(2)－2×(1)得 $y=0$，代回(1)，得 $2x+3z=0$，$\Rightarrow$ (2)正確

(1)由(2)得知$\begin{cases}2x+3z=0\\y=0\end{cases}$(表示一直線的兩面式)、$y=0$(表示平面 xz)，解不相等，

$\Rightarrow$ (1)錯誤

(3) $x=y=0$ 表示 z 軸，與原方程組的解不相等 $\Rightarrow$ (3)錯誤

(4)由$\begin{cases}2x+y+3z=0\cdots(1)\\4x+3y+6z=0\cdots(2)\end{cases}$，(1)÷2 得到，與原方程組的解相等 $\Rightarrow$ (4)正確

(5)由$\begin{cases}2x+y+3z=0\cdots(1)\\4x+3y+6z=0\cdots(2)\end{cases}$，(1)＋(2)得到 $6x+4y+9z=0$，與原方程組的解相等

或 利用行列式之列運算得解 $\Rightarrow$ (5)正確

解 2：由$\begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$，得知 $x:y:z=\begin{vmatrix}1&3\\3&6\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&2\\6&4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=(-3):0:2$

∴其解為$(x, y, z)=(-3k, 0, 2k)$，$k\in R$，代入檢驗，相同解的有(2)(4)(5)

答：(2)(4)(5)

10.觀察相關的函數圖形，判斷下列選項何者為真？

(1) $10^x=x$ 有實數解 (2) $10^x=x^2$ 有實數解 (3) x 為實數時，$10^x>x$ 恆成立

(4) $x>0$ 時，$10^x>x^2$ 恆成立 (5) $10^x=-x$ 有實數解

解：(1)如下圖 1，∵ $y=10^x$ 與 $y=x$ 的圖形不相交，∴沒有實數解

(2)如下圖 2，∵ $y=10^x$ 與 $y=x^2$ 的圖形交於 1 點，∴有 1 實數解

(3)如下圖 1，∵ $y=10^x$ 的圖形恆在 $y=x$ 圖形的上方，∴$10^x>x$ 恆成立

(4)如下圖 2，∵當 $x>0$ 時，$y=10^x$ 的圖形(第一象限內)恆在 $y=x^2$ 圖形的上方，

∴$10^x>x^2$ 恆成立

(5)如下圖 3，∵ $y=10^x$ 與 $y=-x$ 的圖形相交於 1 點，∴有 1 實數解

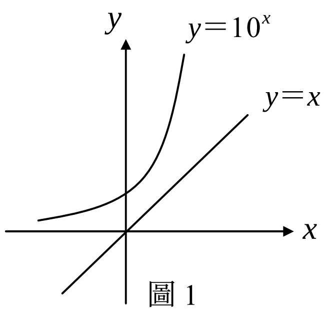


圖 1

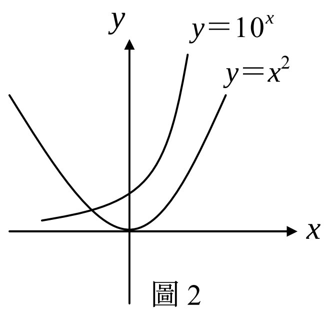


圖 2

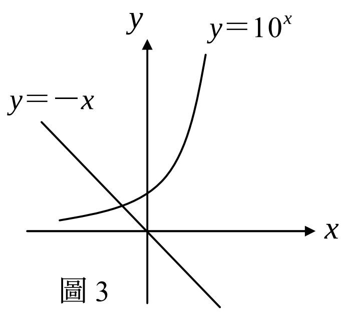


圖 3

答：(2)(3)(4)(5)

11.某甲自 89 年 7 月起，每月 1 日均存入銀行 1000 元，言明以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。某乙則於 89 年 7 月起，每單月(一月、三月、五月…)1 日均存入銀行 2000 元，亦以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。一整年中，兩人都存入本金 12000 元。提出時，甲得本利和 A 元，乙得本利和 B 元。問下列選項何者為真？

(1) $B>A$　(2) $A=1000\left[\sum_{k=1}^{12}(\frac{1005}{1000})^{k}\right]$　(3) $B=2000\left[\sum_{k=1}^{6}(\frac{1005}{1000})^{2k}\right]$

(4) $A<12000(\frac{1005}{1000})^{12}$　(5) $B<12000(\frac{1005}{1000})^{12}$

解：(2) $A=1000(1+0.5\%)^{12}+1000(1+0.5\%)^{11}+\cdots+1000(1+0.5\%)^{1}=1000\left[\sum_{k=1}^{12}(\frac{1005}{1000})^{k}\right]$

(3) $B=2000(1+0.5\%)^{12}+2000(1+0.5\%)^{10}+\cdots+2000(1+0.5\%)^{2}=2000\left[\sum_{k=1}^{6}(\frac{1005}{1000})^{2k}\right]$

(1) $B=\underline{2000(1+0.5\%)^{12}}+2000(1+0.5\%)^{10}+\cdots+\underline{2000(1+0.5\%)^{2}}$

$=\underline{1000(1+0.5\%)^{12}+1000(1+0.5\%)^{12}}+\cdots+\underline{1000(1+0.5\%)^{2}+1000(1+0.5\%)^{2}}$

$>1000(1+0.5\%)^{12}+\underline{1000(1+0.5\%)^{11}}+\cdots+1000(1+0.5\%)^{2}+\underline{1000(1+0.5\%)^{2}}=A$

(4) $A=1000(1+0.5\%)^{12}+\underline{1000(1+0.5\%)^{11}}+\cdots+\underline{1000(1+0.5\%)^{1}}$

$<1000(1+0.5\%)^{12}+\underline{1000(1+0.5\%)^{12}}+\cdots+\underline{1000(1+0.5\%)^{12}}=12000(\frac{1005}{1000})^{12}$

(5) $B=2000(1+0.5\%)^{12}+\underline{2000(1+0.5\%)^{10}}+\cdots+2000(1+0.5\%)^{2}$

$<2000(1+0.5\%)^{12}+\underline{2000(1+0.5\%)^{12}}+\cdots+2000(1+0.5\%)^{12}=12000(\frac{1005}{1000})^{12}$

答：(1)(2)(3)(4)(5)

12.在 ΔABC 中，下列哪些選項的條件有可能成立？

(1) $\sin A=\sin B=\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 均小於 $\frac{1}{2}$

(3) $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 均大於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\sin A=\sin B=\sin C=\frac{1}{2}$

(5) $\sin A=\sin B=\frac{1}{2}$，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

解：(1)取 $\angle A=\angle B=\angle C=60^0$，滿足(1)條件且 $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$

(2)取 $\angle A$、$\angle B$ 小於 30^0，$\angle C>150^0$，滿足(2)條件

(3) $\because \sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 均大於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，則 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 均大於 60^0

與 $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ 不合

(4) $\because \sin A=\sin B=\sin C=\frac{1}{2}$，則 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 均為 30^0 或 150^0

與 $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ 不合

(5)取 $\angle A=\angle B=30^0$，$\angle C=120^0$，滿足(5)條件且 $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$

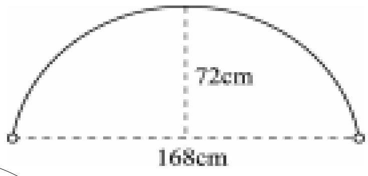
答：(1)(2)(5)

第二部份：選填題(佔 40 分)

說明：1.第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13－32)。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

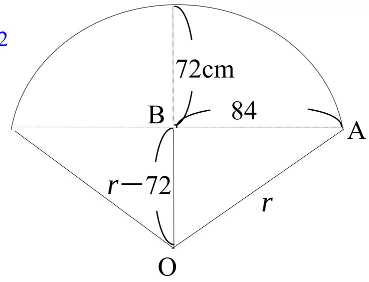
A.工匠在窗子外邊想做一個圓弧型的花台，此花台在窗口的中央往外伸出 72 公分，窗口的寬度是 168 公分。則此圓弧的圓半徑為________公分。



解：如圖，設此圓弧的半徑為 r，

在ΔOAB 中，根據畢氏定理 $84^2+(r-72)^2=r^2$

$\therefore 84^2+r^2-144r+72^2=r^2$，解得 $r=85$



答：85 公分

B. $2^{20}-1$ 與 $2^{19}+1$ 的最大公因數為_____。

解：(1)設最大公因數為 d，$\because d|(2^{20}-1)$且 $d|(2^{19}+1)$，$\therefore d|(2^{20}-1)\times(-1)+(2^{19}+1)\times 2$

$\Rightarrow d|3$，得知 $d=1$，3

(2)又$\because 2^{20}-1$ 與 $2^{19}+1$ 都是 3 的倍數，故最大公因數為 3

答：3

C.某公司民國 85 年營業額為 4 億元，民國 86 年營業額為 6 億元，該年的成長率為 50%。87、88、89 三年的成長率皆相同，且民國 89 年的營業額為 48 億元。則該公司 89 年的成長率為____%。

解：如下表，設 87、88、89 三年的成長率為 k %

年	85	86	87	88	89
營業額	4 億	6 億			48 億
成長率		50%	k %	k %	k %

87 年營業額$=6\times(1+k\%)$

88 年營業額$=6\times(1+k\%)\times(1+k\%)=6\times(1+k\%)^2$

89 年營業額$=48=6\times(1+k\%)^3$，得 $1+k\%=2\Rightarrow k\%=1$，$\therefore k=100$

答：100 %

D.在一個圓的圓周上，平均分布了 60 個洞，兩洞間稱為一間格。在 A 洞打上一支木樁並綁上線，然後依逆時針方向前進，每隔 9 個間隔就再打一支木樁，並綁上線，依此繼續操作，如右圖所示。試問輪迴到 A 洞需再打樁前，總共已經打了幾支木樁？答______支。

解：設共經過 n 圈(一圈 60 洞)，打了 k 支木樁

$\therefore 60n+1=9k+1$，(1 是指 A 洞)

得 $60n=9k=[60, 9]$的正整數倍數為 180，360，540，‥‥

$\therefore$至少 $60n=9k=180$，得 $k=20$

答：20 支

E.某次網球比賽共有 128 位選手參加，採單淘汰制，每輪淘汰一半的選手，剩下一半的選手進入下一輪。在第 1 輪被淘汰的選手可獲得 1 萬元，在第 2 輪被淘汰的選手可獲得 2 萬元，在第 k 輪被淘汰的選手可獲得 2^{k-1} 萬元，而冠軍則可獲得 128 萬元。試問全部比賽獎金共多少萬元？答：______萬元。

解：根據題意，各輪淘汰人數與獲得比賽獎金如下表：

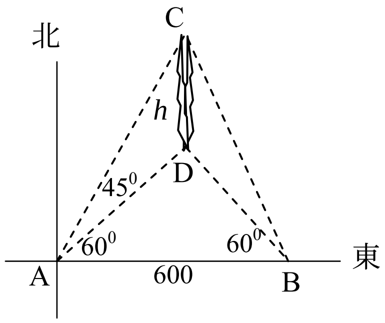
輪次	賽前	1	2	3	4	5	6	7	冠軍	合計
淘汰人數	0	64	32	16	8	4	2	1	1	128
獎金 (萬元)	0	1	2	4	8	16	32	64	128	

全部比賽獎金＝$(1\times64)+(2\times32)+(4\times16)+(8\times8)+(16\times4)+(32\times2)+(64\times1)+(128\times1)$

＝576 (萬元)

答：576 萬元

F.某人隔河測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位為東偏北 60^0，山頂的仰角為 45^0，某人自 A 點向東行 600 公尺到達 B 點，山的方位變成在西偏北 60^0，則山有多高？答：____公尺。



解：根據題意，概略圖形坐標如右，設山高 $\overline{CD}=h$ 公尺

(1)在ΔABD 中，∵∠DAB＝∠DBA＝60^0

得知ΔABD 為正Δ，∴ $\overline{AD}=\overline{AB}=600$

(2)在ΔACD 中，∵∠CAD＝45^0，∴$\tan45^0=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$

$\Rightarrow 1=\dfrac{h}{600}$，得知山高 $h=600$

答：600 公尺

G.有一群體有九位成員，其身高分別為(單位：公分)

160，163，166，170，172，174，176，178，180，此九人的平均身高為 171 公分。今隨機抽樣 3 人，則抽到 3 人的平均身高等於母體平均身高的機率為_______。(化成最簡分數)

解：(1)樣本空間 $n(S)=n(9$ 人抽樣 3 人$)=C_3^9=84$

(2)事件 A＝抽到 3 人的平均身高(171 公分)

x_i	160	163	166	170	172	174	176	178	180
x_i-171	−11	−8	−5	−1	1	3	5	7	9

根據上表，∵$-8+1+7=0$；$-8+3+5=0$；$-8-1+9=0$

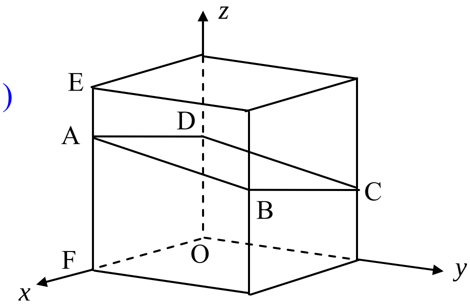
∴得知有(163，172，178)，(163，174，176)，(163，170，180)三組成立

$\Rightarrow n(A)=3$

(3)機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{84}=\dfrac{1}{28}$

答：$\dfrac{1}{28}$

H.右圖為一正立方體，被一平面截出一個四邊形 ABCD，其中 B，D 分別為稜的中點，且 $\overline{EA}：\overline{AF}=1：2$。則 $\cos\angle DAB=$＿＿＿＿＿。(化成最簡分數)



解 1：建立坐標化，取邊長為 6 單位，如右圖

O(0，0，0)，A(6，0，4)，B(6，6，3)，D(0，0，3)

$\therefore \overrightarrow{AD}=(-6,\ 0,\ -1)$，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{37}$

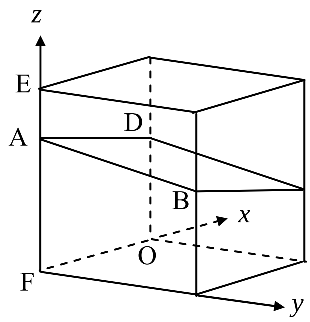
$\overrightarrow{AB}=(0,\ 6,\ -1)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{37}$

$$\therefore \cos\angle DAB=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{37}$$

解 2：建立坐標化，取邊長為 6 單位，如右圖

F(0，0，0)，E(0，0，6)，D(0，6，3)

A(0，0，4)，B(6，0，3)，C(6，6，2)



$\therefore \overrightarrow{AD}=(0,\ 6,\ -1)$，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{37}$

$\overrightarrow{AB}=(6,\ 0,\ -1)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{37}$

$$\therefore \cos\angle DAB=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{37}$$

答：$\dfrac{1}{37}$