大學入學考試中心 106 學年度學科能力測驗試題 數學考科

第壹部分：選擇題(占 65 分)

一、單選題(占 35 分)

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1.已知某校老師玩過「寶可夢」的比率為 r_1，而學生玩過的比率為 r_2，其中 $r_1 \neq r_2$。由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可夢」的比率之選項。

(1)全校老師與學生比率　(2)全校老師人數　(3)全校學生人數

(4)全校師生人數　(5)全校師生玩過「寶可夢」人數

解：設全校老師有 n_1 人，全校學生有 n_2 人

∵全校師生玩過「寶可夢」的比率 $=\dfrac{n_1r_1+n_2r_2}{n_1+n_2}=(\dfrac{n_1}{n_1+n_2})\,r_1+(\dfrac{n_2}{n_1+n_2})\,r_2$，其中 $\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$，$\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ 為比率

答：(1)

2.某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

(1) 1.7　(2) 3　(3) 5.2　(4) 9　(5) 81

解：開始 b，$\xrightarrow{\text{點擊 1 次}} b^2$，$\xrightarrow{\text{點擊 2 次}} (b^2)^2=b^4$，$\xrightarrow{\text{點擊 3 次}} (b^4)^2=b^8$

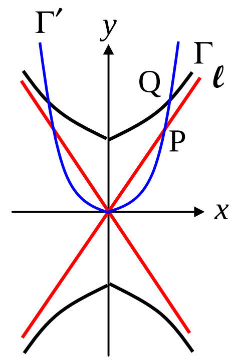
∴得知 $b^8=81^3=3^{12}$，$\Rightarrow b=3^{\frac{12}{8}}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}\approx 3\times 1.732=5.196\approx 5.2$

答：(3)

3.設 Γ：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 為坐標平面上一雙曲線，且其通過第一象限的漸近線為 ℓ。考慮動點$(t，t^2)$，從時間 $t=0$ 時出發。當 $t>0$ 時，請選出正確的選項。

(1)此動點不會碰到 Γ，也不會碰到 ℓ　(2)此動點會碰到 Γ，但不會碰到 ℓ　(3)此動點會碰到 ℓ，但不會碰到 Γ

(4)此動點會先碰到 Γ，再碰到 ℓ　(5)此動點會先碰到 ℓ，再碰到 Γ



解：(i) Γ：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 的中心為(0，0)，且圖形為**鉛直貫軸**的雙曲線

(ii)動點$(t，t^2)$，$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$，消去參數 t 之後，得方程式為 Γ'：$y=x^2$

其圖形為開口向上，頂點(0，0)的拋物線

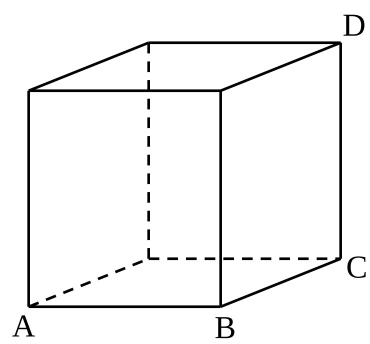
如右圖，Γ' 上的動點會先碰到 ℓ (P 點)，再碰到 Γ (Q 點)

答：(5)

4.在右下圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A，C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B，D 前進，且在 1 秒後分別同時到達 B，D。請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項。

(1)兩質點的距離固定不變　(2)兩質點的距離越來越小　(3)兩質點的距離越來越大

(4)在 $\dfrac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小　(5)在 $\dfrac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大



解：1.坐標化，定邊長為 1，如右圖

∴A(1，0，0)，B(1，1，0)，C(0，1，0)，D(0，1，1)

2.直線 AB $\begin{cases} x=1+0\cdot t=1 \\ y=0+1\cdot t=t \\ z=0+0\cdot t=0 \end{cases}$，$t\in R$，設 P(1，$t$，0)

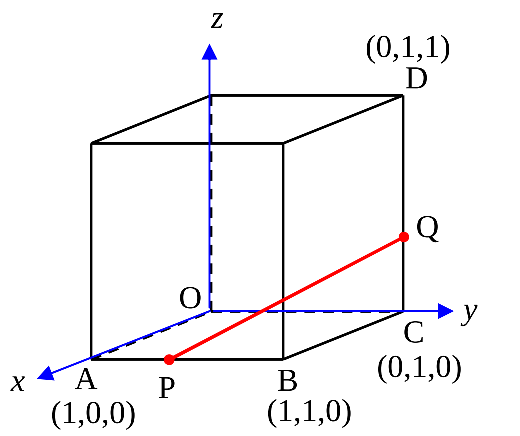
直線 CD $\begin{cases} x=0+0\cdot t=0 \\ y=1+0\cdot t=1 \\ z=0+1\cdot t=t \end{cases}$，$t\in R$(等速直線運動，參數 t 相同)，設 Q(0，1，t)

$\therefore \overrightarrow{PQ}=(-1，1-t，t)$，

3.$\overline{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-1)^2+(1-t)^2+t^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}=\sqrt{2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}}$

即當 $t=\frac{1}{2}$ 時，$\overline{PQ}$ 有最小值 $=\sqrt{\frac{3}{2}}$

答：(4)



5.下圖是某城市在 2016 年的各月最低溫(橫軸 x)與最高溫(縱軸 y)的散佈圖。

今以溫差(最高溫減最低溫)為橫軸且最高溫為縱軸重新繪製一散佈圖。試依此選出正確的選項。

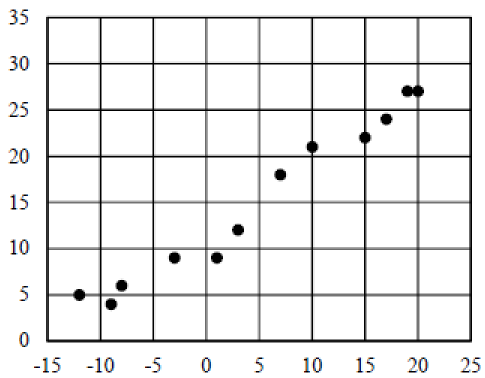
(1)最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強

(2)最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱

(3)最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強

(4)最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱

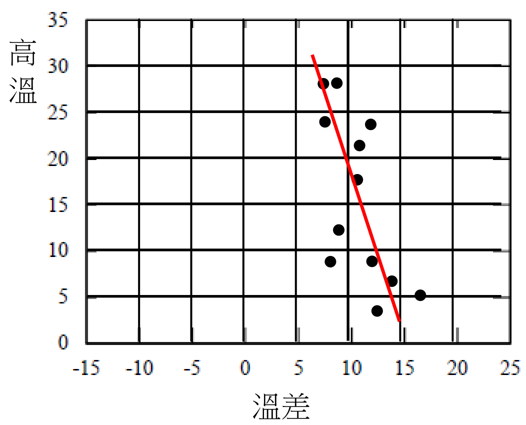
(5)最高溫與溫差為零相關



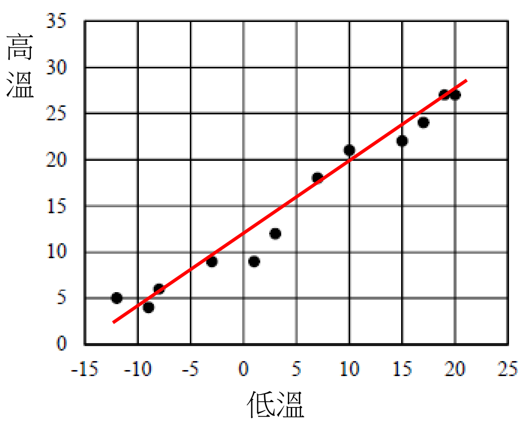
解：1.根據題意，數據如下表：

低溫	-12	-9	-8	-3	1	3	7	10	15	12	19	20
高差	5	4	6	9	9	12	18	21	22	24	27	27
溫差	17	13	14	12	8	9	11	11	7	12	8	7

2.最高溫與溫差為**負相關**



最高溫與最低溫為**正相關**



散布圖中(最高溫與溫差)比(最高溫與最低溫)分散，即(最高溫與溫差)比(最高溫與最低溫)之相關性弱

答：(4)

6.試問有多少個實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ \le \cos x$？

(1) 0個　(2) 1個　(3) 2個　(4) 4個　(5)無窮多個

解：1.在 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$，以 $\pi\approx 3.14$ 代入，得 $1.57\le x\le 4.71$，則 $\cos x^\circ>0$ (x° 為第一象限角)

2.在 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ 中，$\cos x<0$ (x 為第二、三象限角)

$\Rightarrow \cos x^\circ$ (正數) $\le \cos x$ (負數)為無解，$\therefore$ 0 個

答：(1)

7.小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：
牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：
(甲)每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
(乙)連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食
根據上述 原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？
(1) 52 (2) 60 (3) 68 (4) 76 (5) 84

解：根據題意，五天的選擇有(a)3 天麵＋2 天飯、(b)2 天麵＋3 天飯 兩種情形

(a) 3 天麵＋2 天飯，其五天排列情形如下：

星期	一	二	三	四	五	方法數
午餐	麵	飯	麵	飯	麵	$\underbrace{C_1^2}_{\text{選擇麵}}\times\underbrace{\frac{3!}{2!}}_{\text{麵排入3天方法}}\times\underbrace{2\times1}_{\text{飯排入2天方法}}=2\times3\times2=12$

(b) 2 天麵＋3 天飯，其五天排列情形如下：

星期	一	二	三	四	五	方法數
午餐	飯	麵	飯	麵	飯	$\underbrace{\frac{3!}{2!}}_{\text{飯排入3天方法}}\times\underbrace{C_1^2}_{\text{選擇麵}}\times\underbrace{2}_{\text{麵互換}}=3\times2\times2=12$
午餐	麵	飯	飯	飯	麵	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}}\times\underbrace{C_1^2}_{\text{選周三飯}}\times\underbrace{1}_{\text{周二四飯}}=2\times2\times1=4$
午餐	麵	飯	飯	麵	飯	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}}\times\underbrace{2}_{\text{周二三飯}}\times\underbrace{2}_{\text{周五飯}}=8$
	麵	飯	麵	飯	飯	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}}\times\underbrace{2}_{\text{周四五飯}}\times\underbrace{2}_{\text{周二飯}}=8$
	飯	麵	飯	飯	麵	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}}\times\underbrace{2}_{\text{周三四飯}}\times\underbrace{2}_{\text{周一飯}}=8$
	飯	飯	麵	飯	麵	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}}\times\underbrace{2}_{\text{周一二飯}}\times\underbrace{2}_{\text{周四飯}}=8$

共有 12＋(12＋4＋8＋8＋8＋8)＝60

答：(2)

二、多選題(占 30 分)

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8.設 m，n 為小於或等於 4 的相異正整數且，b 為非零實數。已知函數 $f(x)=ax^m$ 與函數 $g(x)=bx^n$ 的圖形恰有 3 個相異交點，請選出可能的選項。
(1) m，n 皆為偶數且 a，b 同號 (2) m，n 皆為偶數且 a，b 異號 (3) m，n 皆為奇數且 a，b 同號
(4) m，n 皆為奇數且 a，b 異號 (5) m，n 為一奇一偶

解：1.當 m，n 皆為偶數時：

$\begin{cases}m=0\\n=0\end{cases}$，則 $f(x)=a$，$g(x)=b$，⇒不可能有 3 個相異交點

$\begin{cases}m=0\\n=2\end{cases}$，則 $f(x)=a$，$g(x)=bx^2$，即 $a=bx^2$，⇒不可能有 3 個相異交點；同理$\begin{cases}m=2\\n=0\end{cases}$時

$\begin{cases}m=0\\n=4\end{cases}$，則 $f(x)=a$，$g(x)=bx^4$，即 $a=bx^4$，⇒不可能有 3 個相異交點；同理$\begin{cases}m=4\\n=0\end{cases}$時

$\begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$，則 $f(x)=ax^2$，$g(x)=bx^2$，即 $ax^2=bx^2$，⇒不可能有 3 個相異交點

$\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$ (或 $\begin{cases} m=4 \\ n=2 \end{cases}$ 亦同)，則 $f(x)=ax^2$，$g(x)=bx^4$，即 $ax^2=bx^4$，⇒ $x^2(bx^2-a)=0$

⇒∴ $x=0$(重根)，而 $bx^2-a=0$，$x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$，當 a，b 同號時，$\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ 有實數解，即共有 $x=0$，$\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ 三根

2.當 m，n 皆為奇數時：

$\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=3 \\ n=3 \end{cases}$ 時，⇒不可能有 3 個相異交點

$\begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases}$ (或 $\begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$ 亦同)，則 $f(x)=ax^1$，$g(x)=bx^3$，即 $ax=bx^3$，⇒ $x(bx^2-a)=0$

⇒∴ $x=0$，而 $bx^2-a=0$，$x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$，當 a，b 同號時，$\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ 有實數解，即共有 $x=0$，$\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ 三根

3.當 m，n 為一奇一偶數時：

仿照上式分析，如 $\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=1 \\ n=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$ 等等，⇒不可能有 3 個相異交點

答：(1)(3)

9.設 Γ 為坐標平面上的圓，點(0，0)在 Γ 的外部且點(2，6)在 Γ 的內部。請選出正確的選項。

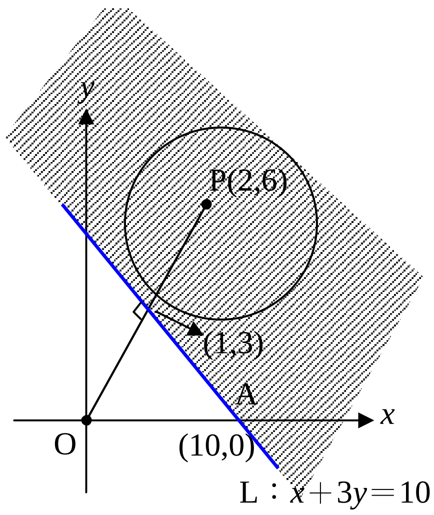
(1) Γ 的圓心不可能在第二象限

(2) Γ 的圓心可能在第三象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10

(3) Γ 的圓心可能在第一象限且此時 Γ 的半徑必定小於 10

(4) Γ 的圓心可能在 x 軸上且此時 Γ 圓心的 x 坐標必定小於 10

(5) Γ 的圓心可能在第四象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10



解：1.根據題意，作一示意圓 Γ 如右圖，不失一般性

∵點(0，0)在 Γ 的外部且點 P(2，6)在 Γ 的內部

⇒得知若圓 Γ 的圓心為 C，則滿足 $d(\text{C}，\text{P})<d(\text{C}，\text{O})$

2.承上述 1，當 $d(\text{C}，\text{P})=d(\text{C}，\text{O})$時，圓心 C 在直線 L 上

其中直線 L 為 $\overline{OP}$ 的中垂線(通過點(1，3)且垂直 $\overline{OP}$)，得 L：$x+3y=10$

3.得圓心所在區域為不包含直線 L 的斜線區域，如右圖

(1) Γ 的圓心可能在第二象限，⇒錯誤

(2) Γ 的圓心不可能在第三象限，⇒錯誤

(3) Γ 的半徑可能大於 10，⇒錯誤

(4) x 坐標必定大於 10(大於 A 點之 x 分量)，⇒錯誤

答：(5)

10.坐標空間中有三直線 L_1：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$，$L_2$：$\begin{cases} x-2y+2z=-4 \\ x+y-4z=5 \end{cases}$，$L_3$：$\begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$，$t$ 為實數。請選出正確的選項。

(1) L_1 與 L_2 的方向向量互相垂直　(2) L_1 與 L_3 的方向向量互相垂直　(3)有一個平面同時包含 L_1 與 L_2

(4)有一個平面同時包含 L_1 與 L_3　(5)有一個平面同時包含 L_2 與 L_3

解：1.直線 L_1：$\begin{cases} x=1+2k \\ y=-1+2k \\ z=k \end{cases}$，$k$ 為實數，設方向向量為 $\overrightarrow{d_1}=(2，2，1)$

直線 L_2 中，∵(1，−2，2)×(1，1，−4)＝(6，6，3)＝3(2，2，1)，取方向向量為 $\overrightarrow{d_2}$＝(2，2，1)

且令 z＝0，$\begin{cases} x-2y=-4 \\ x+y=5 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$，∴ L_2：$\begin{cases} x=2+2m \\ y=3+2m \\ z=m \end{cases}$，$m$ 為實數

直線 L_3：$\begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$，$t$ 為實數，取方向向量為 $\overrightarrow{d_3}$＝(1，1，−4)

2.(1)∵ $\overrightarrow{d_1}$＝(2，2，1) // $\overrightarrow{d_2}$＝(2，2，1)

(2)∵ $\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_3}$＝(2，2，1)·(1，1，−4)＝2＋2－4＝0，∴ $\overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{d_3}$

(3)∵ $\overrightarrow{d_1}$ // $\overrightarrow{d_2}$，且 L_1 上一點(1，−1，0)不在 L_2 上，∴ $L_1 // L_2$，則二平行直線可形成一平面

(4)∵ $\overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{d_3}$，且 $L_3\begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$ 代入 L_1，得 $\dfrac{-t-1}{2}=\dfrac{-t-1}{2}=\dfrac{4+4t}{1}$，得知 t＝−1，∴交點為(1，−1，0)

⇒ L_1 與 L_3 為相交一點的二直線，必可形成一平面

(5)∵ $\overrightarrow{d_1}$ 不平行於 $\overrightarrow{d_3}$，且 $\begin{cases} x=1+2k=-t \\ y=-1+2k=-2-t \\ z=k=4+4t \end{cases}$，⇒ $\begin{cases} t+2k=0 \\ t+2k=-1 \\ 4t-k=4 \end{cases}$，⇒無解

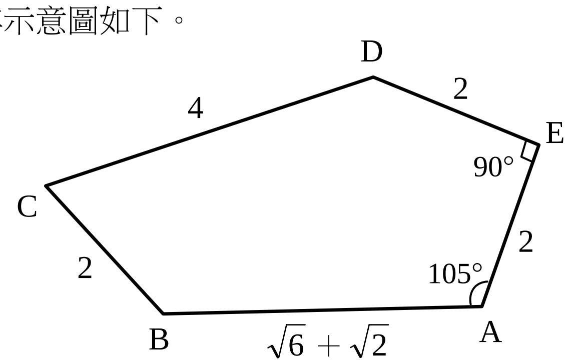
∴ L_2 與 L_3 為歪斜關係，不存在一個平面同時包含 L_2 與 L_3

答：(2)(3)(4)

11.最近數學家發現一種新的可以無縫密舖平面的凸五邊形 $ABCDE$ ， 其示意圖如下。
關於這五邊形，請選出正確的選項。

(1) $\overline{AD}=2\sqrt{2}$　(2)∠DAB＝45°　(3) $\overline{BD}=2\sqrt{6}$

(4) ∠ABD＝45°　(5)ΔBCD 的面積為 $2\sqrt{2}$



解：(1)連接 $\overline{AD}$，在直角ΔADE 中，$\overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

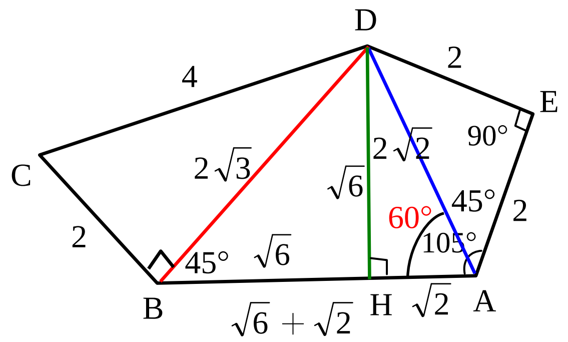
(2)連接 $\overline{BD}$，在直角ΔADE 中，∠DAE＝45°，∴∠DAB＝60°

(3)在ΔABD 中，作 $\overline{DH}\perp\overline{AB}$ 於 H

在ΔADH 中，∠ADH＝30°，$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=\sqrt{2}$，∴ $\overline{BH}=\sqrt{6}$

∴ $\overline{DH}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{6}$，∴ΔBDH 為等腰直角三角形

⇒ $\overline{BD}=\sqrt{\sqrt{6}^2+\sqrt{6}^2}=2\sqrt{3}$，∠ABD＝45°



(5)∵ $\overline{CD}$：$\overline{BC}$：$\overline{BD}$＝4：2：$2\sqrt{3}$，∴ΔBCD 為直角三角形

∴ΔBCD 的面積＝$\dfrac{1}{2}$×2×$2\sqrt{3}$＝$2\sqrt{3}$

註：(3)求 $\overline{BD}$ 時，可利用餘弦定理求得 $\overline{BD}$

(5)求ΔBCD 的面積時，可在ΔBCD 中，利用餘弦定理求出∠C

再利用ΔBCD 面積＝$\dfrac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BC}\times$sin(∠C)求得

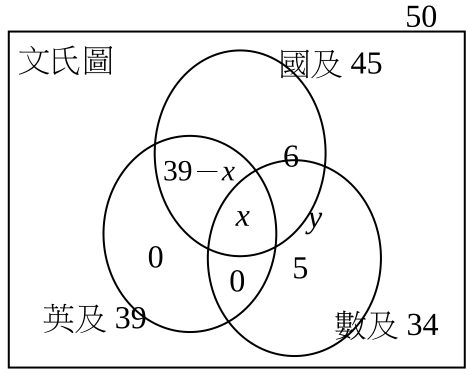
答：(1)(4)

12.某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人。請選出正確的選項。

(1) $x+y=39$　(2) $y\le 11$　(3)三科中至少有一科不及格的學生有 $39-x+y$ 人

(4)三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人　(5)三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人

解：根據題意，列表如下：



	英及	英不及		合計
	國及	國及	國不及	
數及	x	y		34 人
數不及	$39-x$			16 人
合計	39 人	$45-39=6$	5	50 人

(1) $x+y=34$，⇒錯誤

(2)$\because y\le 6+5=11$，⇒正確

(3)三科中*至少*有一科不及格的學生＝全部－(三科都及格)＝$50-x$，⇒錯誤

(4)$\because$三科都及格＝x，又$\because x\le 34$ 且 $x\le 39$，$\therefore x\le 34$

⇒三科中至少有一科不及格的學生＝$50-x\ge 50-34=16$，$\therefore$最少有 16 人，⇒錯誤

(5)$\because y\le 11$，$\therefore y$ 最多 11 人，$\therefore$由(1) $x+y=x+11=34$，即 x 最少有 $34-11=23$ 人

$\therefore$三科中至少有一科不及格的學生最多＝$50-x\le 50-23=27$ 人，⇒正確

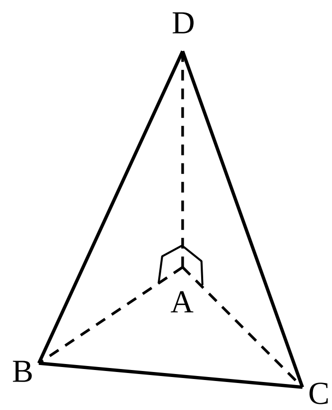
答：(2)(5)

13.空間中有一四面體 $ABCD$。假設$\overrightarrow{AD}$分別與$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$垂直，請選出正確的選項。

(1)$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2)若$\angle BAC$ 是直角，則$\angle BDC$ 是直角

(3)若$\angle BAC$ 是銳角，則$\angle BDC$ 是銳角　(4)若$\angle BAC$ 是鈍角，則$\angle BDC$ 是鈍角

(5)若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則$\angle BDC$ 是銳角



解：根據題意，作示意圖如右

(1)$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\because\overrightarrow{AD}$垂直$\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$；$\overrightarrow{AD}$垂直$\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\therefore\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{DA}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，⇒錯誤

(2)若$\angle BAC$ 是直角，⇒$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\therefore\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{DA}^2+0>0$，則$\angle BDC$ 是銳角，⇒錯誤

(3)若$\angle BAC$ 是銳角，⇒$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，$\therefore\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，則$\angle BDC$ 是銳角，⇒正確

(4)若$\angle BAC$ 是鈍角，⇒$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$，$\therefore\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$無法確定正負或 0，則$\angle BDC$ 是鈍角，⇒錯誤

(5)若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，⇒得知 $\overline{AB}\times\overline{AC}<\overline{DA}\times\overline{DA}=\overline{DA}^2$

⇒$\therefore\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>\overline{AB}\times\overline{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overline{AB}\times\overline{AC}+\overline{AB}\times\overline{AC}\cos(\angle BAC)\ge 0$　($\because -1\le\cos(\angle BAC)\le 1$)

$\therefore\angle BAC$ 是銳角或直角，由(2)(3)得知，若$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}\ge 0$ 時，$\angle BDC$ 是銳角

答：(3)(5)

第貳部分：選填題(占 35 分)

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14－34)。 2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.遞迴數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_n = a_{n-1} + f(n-2)$，其中$n \ge 2$且$f(x)$為二次多項式。若$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=12$，

則$a_5=$ ⑭⑮ 。

解：1.根據題意，得知如下：

當$n=2$時，$a_2 = a_1 + f(0)$，$\Rightarrow 2=1+f(0)$，$\therefore f(0)=1$
當$n=3$時，$a_3 = a_2 + f(1)$，$\Rightarrow 5=2+f(1)$，$\therefore f(1)=3$
當$n=4$時，$a_4 = a_3 + f(2)$，$\Rightarrow 12=5+f(2)$，$\therefore f(2)=7$

2.$\because f(x)$為二次多項式，$\therefore$設$f(x)=ax^2+bx+c$

$\therefore f(0)=1=c$
$f(1)=3=a+b+c$
$f(2)=7=4a+2b+c$

$\Rightarrow$解得$a=b=c=1$，即$f(x)=x^2+x+1$，$\therefore f(3)=9+3+1=13$

3.當$n=5$時，$a_5=a_4+f(3)=12+13=25$

註：可利用拉格朗日插值法(或牛頓插值法)，求二次多項式$f(x)$

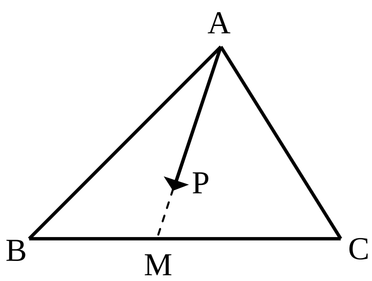
即$f(x)=1\cdot\dfrac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}+3\cdot\dfrac{(x-0)(x-2)}{(1-1)(1-2)}+7\cdot\dfrac{(x-0)(x-1)}{(3-1)(3-2)}=x^2+x+1$，

答：25

B.在坐標平面上，ΔABC內有一點P滿足$\overrightarrow{AP}=(\frac{4}{3}，\frac{5}{6})$及$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$。若 A，P 連線交$\overline{BC}$於 M，

$\overrightarrow{AM}=(\dfrac{⑯⑰}{⑱⑲}，\dfrac{⑳㉑}{㉒㉓})$。(化成最簡分數)

解：1.根據題意，作示意圖如右



$\because \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，得知$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\neq 1$，表示 B，P，C 不共線

2.如圖，設$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AP}=k(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC})=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{5}\overrightarrow{AC}$

$\because$起點 A 相同，終點 B，M，C 共線，$\therefore \frac{k}{2}+\frac{k}{5}=1$，解得$k=\frac{10}{7}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AP}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{10}{7}(\frac{4}{3}，\frac{5}{6})=(\frac{40}{21}，\frac{25}{21})$

答：$(\frac{40}{21}，\frac{25}{21})$

C.若a為正整數且方程式$5x^3+(a+4)x^2+ax+1=0$的根都是有理根，則$a=$ ㉔

解：1.設多項式$f(x)=5x^3+(a+4)x^2+ax+1$

根據牛頓定理，得知$f(x)$可能之一次因式有$x-1$，$x+1$，$5x+1$，$5x-1$

2.$\because a$為正整數，$f(x)=5x^3+(a+4)x^2+ax+1$的係數皆為正數，$\therefore f(x)=0$不可能有正數根

$\Rightarrow f(x)$可能之一次因式只有$x+1$，$5x+1$

3.由多項式$f(x)$中，$5x^3$與常數項為 1，

得知$f(x)=5x^3+(a+4)x^2+ax+1=(5x+1)(x+1)(x+1)=5x^3+11x^2+7x+1$，$\therefore a=7$

答：7

D.設 a_1，a_2，…，a_9 為等差數列且 k 為實數。若方程式 $\begin{cases} a_1x-a_2y+2a_3z=k+1 \\ a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5 \\ a_7x-a_8y+2a_9z=k+9 \end{cases}$ 有解，則 $k=$＿㉕㉖＿。

解：∵ a_1，a_2，…，a_9 為等差數列，設為 a，$a+d$，$a+2d$，…，$a+8d$，d 為其公差

代入方程式，得知 $\begin{cases} ax-(a+d)y+2(a+2d)z=k+1 \\ (a+3d)x-(a+4d)y+2(a+5d)z=-k-5 \\ (a+6d)x-(a+7d)y+2(a+8d)z=k+9 \end{cases}$

其增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc:c} a & -(a+d) & 2(a+2d) & k+1 \\ (a+3d) & -(a+4d) & 2(a+5d) & -k-5 \\ (a+6d) & -(a+7d) & 2(a+8d) & k+9 \end{array}\right]$ ×(-1) ×(-1)

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} a & -(a+d) & 2(a+2d) & k+1 \\ 3d & -3d & 6d & -2k-6 \\ 6d & -6d & 12d & 8 \end{array}\right]$ ×(-2) $\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} a & -(a+d) & 2(a+2d) & k+1 \\ 3d & -3d & 6d & -2k-6 \\ 0 & 0 & 0 & 4k+20 \end{array}\right]$ 有解

⇒∴$4k+20=0$，得 $k=-5$

另解：∵ a_1，a_2，…，a_9 為等差數列，由等差中項性質得 $a_1+a_7=2a_4$，$a_2+a_8=2a_5$，$a_3+a_9=2a_6$

∴設方程式 $\begin{cases} a_1x-a_2y+2a_3z=k+1\cdots\cdots(1) \\ a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5\cdots\cdots(2) \\ a_7x-a_8y+2a_9z=k+9\cdots\cdots(3) \end{cases}$，則

(1)＋(3)：$(a_1+a_7)x-(a_2+a_8)y+2(a_3+a_9)z=2k+10$ ……(4)

(2)×2：$2a_4x-2a_5y+2a_6z=-2k-10$ ……(5)

⇒(4)－(5)：$0=4k+20$，得 $k=-5$

答：-5

E.設 a，b，x 皆為正整數且滿足 $a\le x\le b$ 及 $b-a=3$。若用內插法從 $\log a$，$\log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為 $\log x\approx\frac{1}{3}\log a+\frac{2}{3}\log b=\frac{1}{3}(1+2\log 3-\log 2)+\frac{2}{3}(4\log 2+\log 3)$，則 x 的值為＿㉘＿。

解：1.由 $1+2\log 3-\log 2=\log 10+\log 3^2-\log 2=\log\frac{10\times 9}{2}=\log 45$

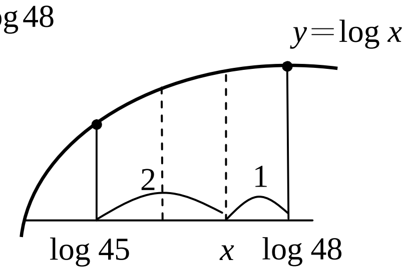
$4\log 2+\log 3=\log 2^4+\log 3=\log 16\times 3=\log 48$

⇒$\frac{1}{3}\log a+\frac{2}{3}\log b=\frac{1}{3}(1+2\log 3-\log 2)+\frac{2}{3}(4\log 2+\log 3)=\frac{1}{3}\log 45+\frac{2}{3}\log 48$

⇒∴ $\log a=\log 45$，$\log b=\log 48$

2.根據內插法如右圖，∵$\log x=\frac{1}{3}\log 45+\frac{2}{3}\log 48$，即 45~48 之間三等分

⇒$(x-45):(48-x)=2:1$，∴$x=47$



答：47

F.一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為 $\dfrac{㉙}{㉚㉛}$ 。(化成最簡分數)

解：樣本空間(跳四步，每步有 4 種跳法)＝4×4×4×4＝256

事件：跳法原則為有上，必有下；有左，必有右。可能情形如下：

可能情形	上	下	左	右	方法數
①	1 次	1 次	1 次	1 次	4!＝24
②	2 次	2 次	0 次	0 次	$\dfrac{4!}{2!2!}=6$
③	0 次	0 次	2 次	2 次	$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

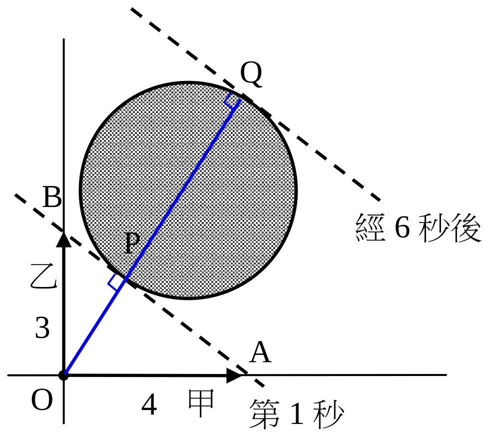
事件方法數＝24＋6＋6＝36

$\Rightarrow$機率＝$\dfrac{\text{事件方法數}}{\text{樣本空間}}=\dfrac{36}{256}=\dfrac{9}{64}$

答：$\dfrac{9}{64}$

G.地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑為 ㉜㉝.㉞ 公尺

解：1.根據題意，設甲、乙兩人從原點開始移動，作示意圖如右，不失一般性



在ΔOAB 中，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$ ($\overline{OP}$ 為斜邊 $\overline{AB}$ 上的高)

$\therefore\Delta$OAB 面積＝$\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OP}$

$\therefore\dfrac{1}{2}\times3\times4=\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{OP}$，得 $\overline{OP}=\dfrac{12}{5}$ (1 秒的距離)

2.圓柱體建築物底圓的直徑

＝經過 6 秒之距離＝$\overline{PQ}=6\overline{OP}=6\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{72}{5}=14.4$(公尺)

答：14.4