# 大學入學考試中心
# 105 學年度學科能力測驗試題
# 數學考科

## —作答注意事項—

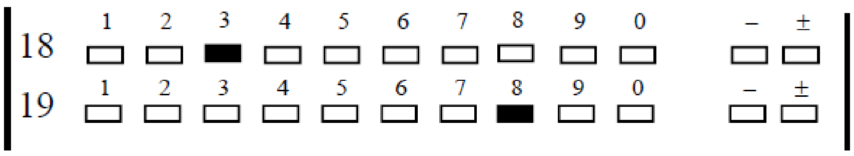
考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

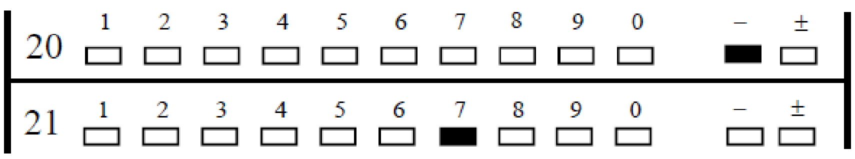
作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



※試題後附有參考公式及可能用到的數值

# 大學入學考試中心 105 學年度學科能力測驗試題 數學考科

第壹部分：選擇題(占 65 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1.設 $f(x)$為二次實係數多項式，已知 $f(x)$在 $x=2$ 時有最小值 1 且 $f(3)=3$。請問 $f(1)$之值為下列哪一個選項？

(1) 5 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5)條件不足，無法確定

解：根據題意，設 $f(x)=a(x-2)^2+1$，$a>0$ (有最小值，則開口向上)

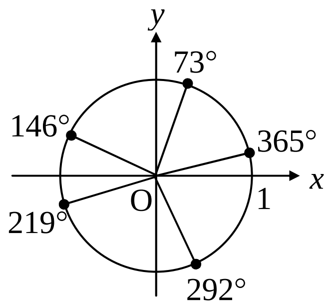
$\because f(3)=3=a(3-2)^2+1$，得知 $a=2$，即 $f(x)=2(x-2)^2+1$，$\therefore f(1)=2(1-2)^2+1=3$

答：(3)

出處：第一冊(多項式函數)

2.請問 sin73°、sin146°、sin219°、sin292°、sin365°這五個數值的中位數是哪一個？

(1) sin73° (2) sin146° (3) sin219° (4) sin292° (5) sin365°




解：如圖，在單位圓中，得知 sin73°＞sin146°＞sin365°＞0＞sin219°＞sin292°

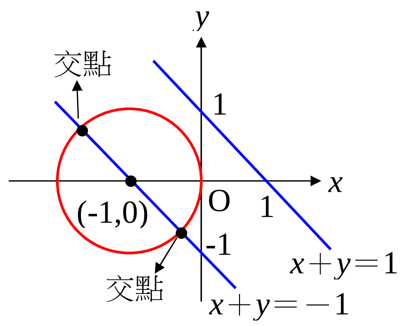
得知中位數為 sin365°

答：(5)

出處：第三冊(三角)

3.坐標平面上兩圖形$\Gamma_1$，$\Gamma_2$的方程式分別為：$\Gamma_1$：$(x+1)^2+y^2=1$，$\Gamma_2$：$(x+y)^2=1$，請問$\Gamma_1$，$\Gamma_2$共有幾個交點？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個




解：$\Gamma_1$：$(x+1)^2+y^2=1$，表示以$(-1，0)$為圓心，半徑為 1 的圓

$\Gamma_2$：$(x+y)^2=1$，$\Rightarrow x+y=1$ 或 $x+y=-1$

如圖，$\Gamma_1$，$\Gamma_2$交於 2 個點

答：(2)

出處：第三冊(直線與圓)

4.放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A、B，開始記錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？

(1) 8 小時 (2) 10 小時 (3) 12 小時 (4) 15 小時 (5) 20 小時

解：設物質 B 的半衰期為 T 小時

物質 A、B 的原有質量分別為 $2k$、$k$，且經 120 小時後兩種物質的質量為 $x$

$\Rightarrow$物質 A：$x=2k(\frac{1}{2})^{\frac{120}{7.5}}$……① 物質 B：$x=k(\frac{1}{2})^{\frac{120}{T}}$……②

$\Rightarrow \frac{①}{②}$ 得 $1=2(\frac{1}{2})^{\frac{120}{7.5}-\frac{120}{T}}$，$\Rightarrow \frac{120}{7.5}-\frac{120}{T}=1$，$\Rightarrow \frac{1}{T}=\frac{1}{7.5}-\frac{1}{120}=\frac{1}{8}$，$\therefore$T＝8(小時)

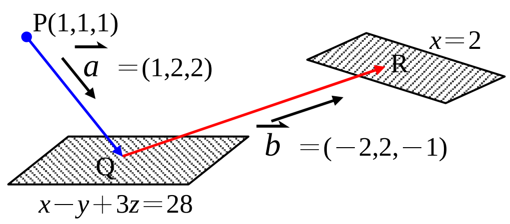
答：(1)

出處：第一冊(指數函數與對數函數)

5.坐標空間中一質點自點 P(1，1，1)沿著方向 $\overrightarrow{a}=(1，2，2)$等速直線前進，經過 5 秒後剛好到達平面 $x-y+3z=28$ 上，立即轉向沿著方向 $\overrightarrow{b}=(-2，2，-1)$依同樣的速率等速直線前進。請問經過幾秒此質點會剛好到達平面 $x=2$ 上？

(1) 1 秒 (2) 2 秒 (3) 3 秒 (4) 4 秒 (5)永遠不會到達

解：如右圖




1.設直線 PQ：$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+2t \end{cases}$，$\because$代入平面 $x-y+3z=28$，得 $t=5$

∵經過 5 秒後剛好到達，∴令 $t=5$，得$\begin{cases} x=6 \\ y=11 \\ z=11 \end{cases}$滿足平面 $x-y+3z=28$，且點 Q(6，11，11)

2.設直線 QR：$\begin{cases} x=6-2k \\ y=11+2k \\ z=11-k \end{cases}$代入平面 $x=2$，得 $k=2$ 秒，∴$\begin{cases} x=2 \\ y=15 \\ z=9 \end{cases}$，即點 R(2，15，9)在平面 $x=2$ 上

答：(2)

出處：第四冊(空間直線)

6.設$\langle a_n \rangle$為一等比數列。已知前十項的和為$\sum_{k=1}^{10} a_k=80$，前五個奇數項的和為$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=120$，請選出首項$a_1$的正確範圍。

(1) $a_1<80$　(2) $80\le a_1<90$　(3) $90\le a_1<100$　(4) $100\le a_1<110$　(5) $110\le a_1$

解：1.設等比數列的公比為 $r$，∴$\sum_{k=1}^{10} a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=80$

$\Rightarrow(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=80$

$\Rightarrow(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)r=80$，$\Rightarrow 120+120r=80$，∴得知 $r=-\frac{1}{3}$

2. $\because \sum_{k=1}^{10} a_k=\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=\frac{a_1(1-(-\frac{1}{3})^{10})}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{a_1(1-(\frac{1}{3})^{10})}{\frac{4}{3}}=80$，$\therefore a_1(1-(\frac{1}{3})^{10})=80\times\frac{4}{3}=\frac{320}{3}$

$\because (\frac{1}{3})^{10}\approx 0$，$\therefore a_1\approx\frac{320}{3}\approx 106$

答：(4)

出處：第二冊(數列與級數)

二、多選題(占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7.下列各方程式中，請選出有實數解的選項。

(1) $|x|+|x-5|=1$　(2) $|x|+|x-5|=6$　(3) $|x|-|x-5|=1$

(4) $|x|-|x-5|=6$　(5) $|x|-|x-5|=-1$

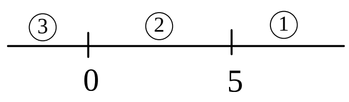
解：1. $|x|+|x-5|$表示數線上(點 $x$ 與 0 的距離)和(點 $x$ 與 5 的距離)的和

若點 $x$ 在①區(即 $x\ge 5$)，則$|x|+|x-5|\ge 5$

若點 $x$ 在②區(即 $0\le x<5$)，則$|x|+|x-5|=5$

若點 $x$ 在③區(即 $x<0$)，則$|x|+|x-5|\ge 5$

$\Rightarrow |x|+|x-5|\ge 5$　(選項 (2)正確)



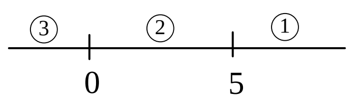

2. $|x|-|x-5|$表示數線上(點 $x$ 與 0 的距離)和(點 $x$ 與 5 的距離)的差

若點 $x$ 在①區(即 $x\ge 5$)，則$|x|-|x-5|=5$

若點 $x$ 在②區(即 $0\le x<5$)，則$-5\le|x|+|x-5|<5$

若點 $x$ 在③區(即 $x<0$)，則$|x|+|x-5|<-5$

$\Rightarrow -5\le|x|-|x-5|\le 5$ (選項 (3)、(5)正確)




答：(2)(3)(5)

出處：第一冊(數與式)

8.下面是甲、乙兩個商場的奇異果以及蘋果不同包裝的價格表，例如：甲商場奇異果價格「35 元/一袋 2 顆」表示每一袋有 2 顆奇異果，價格 35 元。

甲商場售價

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 奇異果價格 | 20 元/一袋 1 顆 | 35 元/一袋 2 顆 | 80 元/一袋 5 顆 | 100 元/一袋 6 顆 |
| 蘋果價格 | 45 元/一袋 1 顆 | 130 元/一袋 3 顆 | 260 元/一袋 6 顆 | 340 元/一袋 8 顆 |

乙商場售價

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 奇異果價格 | 18 元/一袋 1 顆 | 50 元/一袋 3 顆 | 65 元/一袋 4 顆 | 95 元/一袋 6 顆 |
| 蘋果價格 | 50 元/一袋 1 顆 | 190 元/一袋 4 顆 | 280 元/一袋 6 顆 | 420 元/一袋 10 顆 |

根據上述數據，請選出正確選項。

(1)在甲商場買一袋 3 顆裝的蘋果所需的金額低於買三袋 1 顆裝的蘋果

(2)乙商場的奇異果售價，一袋裝越多顆者，其每顆單價越低

(3)若只想買奇異果，則在甲商場花 500 元最多可以買到 30 顆奇異果

(4)如果要買 12 顆奇異果和 4 顆蘋果，在甲商場所需最少金額低於在乙商場所需最少金額

(5)無論要買多少顆蘋果，在甲商場所需最少金額都低於在乙商場所需最少金額

解：甲、乙兩個商場的奇異果、蘋果每顆平均單價如下表：

甲商場售價

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 奇異果價格 | 20 元/ 1 顆 | 17.5 元/1 顆 | 16 元/1 顆 | 16.7 元/1 顆 |
| 蘋果價格 | 45 元/ 1 顆 | 43.3 元/1 顆 | 43.3 元/1 顆 | 42.5 元/1 顆 |

乙商場售價

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 奇異果價格 | 18 元/ 1 顆 | 16.7 元/1 顆 | 16.3 元/1 顆 | 15.8 元/1 顆 |
| 蘋果價格 | 50 元/ 1 顆 | 47.5 元/1 顆 | 46.7 元/1 顆 | 42 元/1 顆 |

(1)一袋 3 顆裝的蘋果＝130 元，三袋 1 顆裝的蘋果＝3×45 元＝135 元，⇒正確

(2)乙商場的奇異果售價依序每顆平均單價約為 18 元，16.7 元，16.3 元，15.8 元，⇒正確

(3) 500 元買 5 袋(80 元/一袋 5 顆)＋1 袋(100 元/一 6 顆)＝有 25＋6＝31 顆，⇒不正確

(4)甲商場：12 顆奇異果＝2 袋(80 元/一袋 5 顆)＋1 袋(35 元/一袋 2 顆)＝2×80＋35＝195 元

4 顆蘋果＝1 袋(45 元/一袋 1 顆)＋1 袋(130 元/一袋 3 顆)＝45＋130＝175 元，⇒共 195＋175＝375 元

乙商場：12 顆奇異果＝2 袋(95 元/一袋 6 顆)＝2×95＝190 元

4 顆蘋果＝1 袋(190 元/一袋 4 顆)＝190 元，⇒共 190＋190＝380 元，⇒∴正確

(5)買 10 顆蘋果時，在甲商場至少 340＋2×45＝430 元，在乙商場至少 420 元，⇒不正確

答：(1)(2)(4)

出處：第一冊(數與式)

9.下列各直線中，請選出和 z 軸互為歪斜線的選項。

(1) $L_1$：$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$　(2) $L_2$：$\begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$　(3) $L_3$：$\begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$　(4) $L_4$：$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$　(5) $L_5$：$\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$

解：空間中不平行，也不相交的兩直線，互為歪斜線。

z 軸(通過(0，0，0)，方向向量為(0，0，1))，設其參數式為$\begin{cases} x=0+0t \\ y=0+0t \\ z=0+t \end{cases}$，$t\in R$

(1) $L_1$：$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$，$y\in R$，過點(0，0，0)，方向向量(0，1，0)，∴與 z 軸交於(0，0，0)

(2) $L_2$：$\begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$，過點(0，0，1)，方向向量(1，0，－1)，∴與 z 軸交於(0，0，1)

(3) $L_3$：$\begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$，過點(0，1，0)，方向向量(1，－1，0)，∴與 z 軸不平行，也不相交，即歪斜

(4) $L_4$：$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$，過點(1，1，0)，方向向量(0，1，0)，∴與 z 軸平行(方向向量平行)

(5) $L_5$：$\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$，過點(0，1，1)，方向向量(1，0，0)，∴與 z 軸不平行，也不相交，即歪斜

答：(3)(5)

出處：第四冊(空間中的平面與直線)

10.設 $a$、$b$、$c$ 皆為正整數，考慮多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+2$。請選出正確的選項。

(1) $f(x)=0$ 無正根　(2) $f(x)=0$ 一定有實根　(3) $f(x)=0$ 一定有虛根

(4) $f(1)+f(-1)$的值是偶數　(5)若 $a+c>b+3$，則 $f(x)=0$ 有一根介於$-1$ 與 0 之間

解：(1)當 $x>0$ 時，$f(x)>0$，$\therefore f(x)=0$ 無正根，$\Rightarrow$正確

(2)(3)$\because \deg f(x)=4$，$\therefore f(x)=0$ 可能有 4 實根，2 實根 2 虛根，4 虛根，$\Rightarrow$不正確

(4) $f(1)=1+a+b+c+2=a+b+c+3$，而 $f(-1)=1-a+b-c+2=-a+b-c+3$

$\Rightarrow f(1)+f(-1)=(a+b+c+3)+(-a+b-c+3)=2b+6$ 為偶數，$\Rightarrow$正確

(5)$\because f(0)=2$，$f(-1)=-a+b-c+3=b-(a+c)+3<0$

$\Rightarrow f(0)f(-1)<0$，根據勘根定理，$f(x)=0$ 至少有一根介於$-1$ 與 0 之間，$\Rightarrow$正確

答：(1)(4)(5)

出處：第一冊(多項式函數)

11.一個 41 人的班級某次數學考試，每個人的成績都未超過 59 分。老師決定以下列方式調整成績：原始成績為 $x$ 分的學生，新成績調整為 $40\log_{10}(\frac{x+1}{10})+60$ 分(四捨五入到整數)。請選出正確的選項。

(1)若某人原始成績為 9 分，則新成績 60 分

(2)若某人原始成績超過 20 分，則其新成績超過 70 分

(3)調整後全班成績的全距比原始成績的全距大

(4)已知小文的原始成績恰等於全班原始成績的中位數，則小文的新成績仍然等於調整全班成績的中位數

(5)已知小美的原始成績恰等於全班原始成績的平均，則小美的新成績仍然等於調整全班成績的平均

解：根據題意，全班原始成績與新成績概略計算如下表：

| 原始成績 | 9 分 | 19 分 | 29 分 | 39 分 | 49 分 | 59 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 新成績 | 20 分 | 72 分 | 79 分 | 84 分 | 88 分 | 91 分 |

(1)新成績$=40\log_{10}(\frac{9+1}{10})+60=40\log_{10}1+60=40\times 0+60=60$，$\Rightarrow$正確

(2)新成績$=40\log_{10}(\frac{x+1}{10})+60>40\log_{10}(\frac{20+1}{10})+60>40\log_{10}2+60\approx 40(0.3010)+60=72.04>70$，$\Rightarrow$正確

(3)原始成績的全距無法得知，$\therefore$無法與調整後全班成績的全距比較，$\Rightarrow$不正確

(4)$\because$對數 $\log_{10}x$ 為一遞增函數，中位數(視為成績排名)，$\therefore$新成績仍為中位數，$\Rightarrow$正確

(5)$\because$對數 $\log_{10}x$ 為曲線，並非直線，新成績的平均數變化大，$\Rightarrow$不正確

答：(1)(2)(4)

出處：第一冊(指數與對數函數)，第二冊(數據分析)

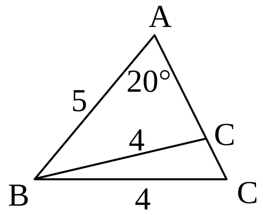
12.在$\Delta$ABC 中，已知$\angle$A$=20°$、$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=4$。請選出正確的選項。

(1)可以確定$\angle$B 的餘弦值　(2)可以確定$\angle$C 的正弦值　(3)可以確定$\Delta$ABC 的面積

(4)可以確定$\Delta$ABC 的內切圓半徑　(5)可以確定$\Delta$ABC 的外接圓半徑

解：(1)已知條件為 SSA 的相似性質，如右圖，$\overline{AC}$ 無法確定，$\therefore \cos B=\frac{4^2+5^2-\overline{AC}^2}{2\cdot 4\cdot 5}$ 無法計算，$\Rightarrow$不正確

(2)由正弦定理，得$\frac{\sin C}{5}=\frac{\sin 20^\circ}{4}$，$\because \sin C>0$，$\angle$C 有 2 個角度(互補)，$\Rightarrow$正確




(3)$\because \Delta$ABC 的面積$=\frac{1}{2}\times 4\times 5\sin B$ 無法確定 ($\angle$B 無法確定)，$\Rightarrow$不正確

(4)$\because$面積或周長不確定，$\therefore$內切圓半徑無法確定，$\Rightarrow$不正確

(5)由正弦定理：$2R=\frac{\sin 20^\circ}{4}$，$\therefore$外接圓半徑 R 確定，$\Rightarrow$正確

答：(2)(5)

出處：第三冊(三角)

13.甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 A、B、C、D 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 A、B、C、D 的順序抽鑰匙來決定搭成哪位男生的機車。其中除了 B 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會均等。請選出正確的選項。

(1) A 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到甲的鑰匙的機率
(2) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 D 抽到甲的鑰匙的機率
(3) A 抽到乙的鑰匙的機率大於 B 抽到乙的鑰匙的機率
(4) B 抽到丙的鑰匙的機率大於 C 抽到丙的鑰匙的機率
(5) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到乙的鑰匙的機率

解：(1)P(A 抽到甲)＝$\frac{1}{4}$，P(C 抽到甲)＝P(A 不抽到甲且 B 絕對不選甲且 C 抽到甲)＝$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3-1\text{甲}}\times 1=\frac{3}{8}$，⇒不正確

(2) P(C 抽到甲)＝$\frac{3}{8}$，P(D 抽到甲)＝$\frac{3}{8}$，⇒不正確

P(D 抽到甲)＝P(A 不抽到甲且 B 絕對不選甲且 C 不抽到甲且 C 抽到甲)＝$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3-1\text{甲}}\times 1\times 1=\frac{3}{8}$

(3) P(A 抽到乙)＝$\frac{1}{4}$，P(B 抽到乙)＝$\frac{3}{8}$，⇒不正確

P(B 抽到乙)：P(A 不抽到乙且 B 抽到乙)＝$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3-1\text{甲}}=\frac{3}{8}$

(4) P(B 抽到丙)＝P(A 不抽到丙且 B 抽到丙)＝$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3-1\text{甲}}=\frac{3}{8}$，P(C 抽到丙)＝$\frac{5}{24}$，⇒正確

P(C 抽到丙)＝P(A 不抽到丙且 B 不抽到丙且 C 抽到丙)＋P(A 抽到甲)且 B 不抽到丙且 C 抽到丙)

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3-1\text{甲}}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$

(5) P(C 抽到甲)＝$\frac{3}{8}$，P(C 抽到乙)＝$\frac{5}{24}$，⇒正確

P(C 抽到乙)＝P(A 不抽到乙、甲)且 B 不抽到乙且 C 抽到乙)＋P(A 不抽到乙、抽到甲)且 B 不抽到乙且 C 抽到乙)

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3-1\text{甲}}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3-1\text{甲}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$

答：(4)(5)

出處：第一冊(機率)

第貳部分：選填題(占 35 分)

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14－31)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.考慮每個元(或稱元素)只能是 0 或 1 的 2×3 階矩陣，且它的第一列與第二列不相同且各列的元素不能全為零，這樣的矩陣共有幾 ⑭⑮ 個。

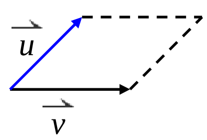
解：$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}_{2\times 3}$ 中，第一列排列數＝2×2×2－1(全為 0)＝7
第二列排列數＝2×2×2－1(全為 0)－1(與第一列相同)＝6
⇒共有 7×6＝42 種

答：42

出處：第一冊(排列)，第四冊(矩陣)

B.坐標平面上 O 為原點，設 $\vec{u}=(1，2)$，$\vec{v}=(3，4)$。令 Ω 為滿足 $\overrightarrow{OP}=x\vec{u}+y\vec{v}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $\frac{1}{2}\le x\le 1$，$-3\le y\le\frac{1}{2}$，則 Ω 的面積為 $\frac{⑯}{⑰}$ 平方單位。(化成最簡分數)

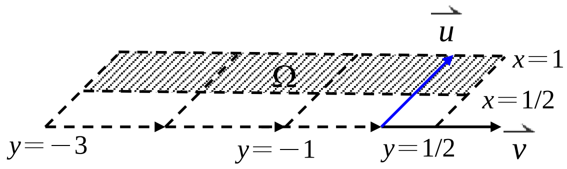
解：1.由 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 所張成之平行四邊形面積＝$\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right|=|4-6|=2$，如右圖



2.滿足 $\overrightarrow{OP}=x\vec{u}+y\vec{v}$ 的所有點 P 所形成的區域為右下圖斜線區域Ω

斜線區域面積 $=(1-\dfrac{1}{2})\times(\dfrac{1}{2}+3)$ 倍的平行四邊形面積

$=\dfrac{7}{4}\times 2=\dfrac{7}{2}$

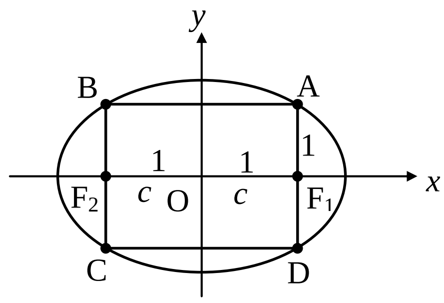



答：$\dfrac{7}{2}$

出處：第三冊(平面向量、面積與行列式)

C.從橢圓Γ的兩焦點分別作垂直於長軸的直線，交橢圓於四點。已知連此四點得一個邊長為 2 的正方形，則Γ的長軸長為 ⑱ $+\sqrt{⑲}$ 。

解：如右圖，(不失一般性假設)設橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$




法 1：根據題意，由圖形得知 $\overline{OF_1}=\overline{AF_1}=1$

其中 $\overline{OF_1}=c=1$，$\overline{AF_1}=$ 正焦弦長一半 $=\dfrac{2b^2}{a}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{b^2}{a}$

$\Rightarrow$ 由關係式 $a^2=b^2+c^2=b^2+1$，與 $\dfrac{b^2}{a}=1$ （或 $b^2=a$）

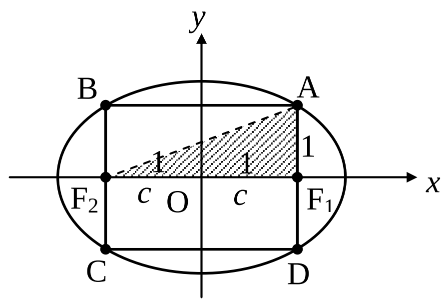
得知 $a^2=b^2+1=a+1$，即 $a^2-a-1=0$

$\Rightarrow$ 得 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$\Rightarrow$ 取 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\therefore$ 長軸長 $=2a=1+\sqrt{5}$

法 2：如右圖，在 $\Delta AF_1F_2$ 中，$\overline{AF_2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

根據橢圓定義：$d(A，F_1)+d(A，F_2)=2a$ (長軸長)

$\Rightarrow \overline{AF_1}+\overline{AF_2}=1+\sqrt{5}=2a$ ，$\therefore$ 長軸長 $=1+\sqrt{5}$




答：$1+\sqrt{5}$

出處：第四冊(二次曲線－橢圓)

D.線性方程組 $\begin{cases}x+2y+3z=0\\2x+y+3z=6\\x-y\quad\ \ =6\\x-2y-z=8\end{cases}$ 經高斯消去法計算後，其增廣矩陣可化簡為 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&a&b\\0&1&c&d\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$，

則 $a=$ ⑳ ，$b=$ ㉑ ，$c=$ ㉒ ，$d=$ ㉓㉔

解：$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&1&3&6\\1&-1&0&6\\1&-2&-1&8\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\times(-2)\\\times(-1)\\\times(-1)\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-3&-3&6\\0&-3&-3&6\\0&-4&-4&8\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\div(-3)\\\div(-3)\\\div(-4)\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&1&-2\\0&1&1&-2\\0&1&1&-2\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\\\times(-1)\\\times(-1)\end{array}$

$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}\times(-2)\\\\\\\\\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&4\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]，\therefore\begin{cases}a=1\\b=4\\c=1\\d=-2\end{cases}$

另解：由 $\begin{cases}2x+y+3z=6\\x-y\qquad\ \ =6\end{cases}$，相加，得 $3x+3z=12$，化簡為 $x+z=4$，$\therefore$ $\underline{a=1，b=4}$

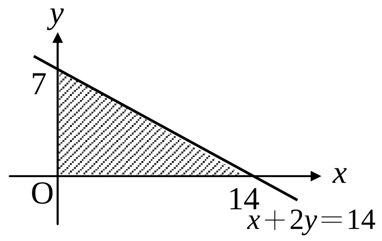
由 $\begin{cases}x+\quad z=4\\x-y\quad\ =6\end{cases}$，相減，得 $y+z=-2$，$\therefore$ $\underline{c=1，d=-2}$

答：$a=1$，$b=4$，$c=1$，$d=-2$

出處：第四冊(矩陣)

E.設 $a$ 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式$\begin{cases} x-3y\le a \\ x+2y\le 14 \end{cases}$的所有點所形成之區域面積為$\dfrac{213}{5}$平方單位，

則 $a=$ ㉕ 。

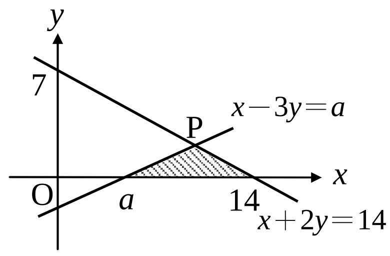



解：1.作 $x+2y\le 14$，如右圖，在第一象限的面積(斜線區域)＝$\dfrac{1}{2}\times 7\times 14=49$

2.方程式 $x-3y=a$，

| $x$ | 0 | $a$ |
|---|---|---|
| $y$ | $\dfrac{-a}{3}$ | 0 |

(i) $a<0$，不合(∵㉕為一個數字)




(ii) $a>0$，∵面積 $49-\dfrac{213}{5}=\dfrac{32}{5}>0$，∴$0<a<14$，如右下圖

由$\begin{cases} x-3y=a \\ x+2y=14 \end{cases}$，相減得 P 點 $y$ 分量＝$\dfrac{14-a}{5}$

斜線區域面積＝$\dfrac{32}{5}=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{14-a}{5})(14-a)$，⇒$(14-a)^2=64$，得 $a=6$ 或 22(不合)

答：6

出處：第三冊(直線與圓，不等式、線性規劃)

F.投擲一公正骰子三次，所得點數依序為 $a$，$b$，$c$。在 $b$ 為奇數的條件下，行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0$ 的機率為 $\dfrac{㉖㉗}{㉘㉙}$ 。

(化成最簡分數)

解：樣本空間個數 $n(a，c\in\{1，2，\ldots，6\}，b\in\{1，3，5\})=\underbrace{a\times b\times c}_{6\times 3\times 6}=108$

事件個數：條件為$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0$，⇒$ac-b^2>0$，即 $ac>b^2$

(1)當 $b=1$ 時，$ac>1$，有 $6\times 6-1(ac=1\times 1=1)=35$

(2)當 $b=3$ 時，$ac>3^2=9$

| $a$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | 5~6 | 4~6 | 3~6 | 2~6 | 2~6 | 19 |

(3)當 $b=5$ 時，$ac>5^2=25$

| $a$ | 5 | 6 | 合計 |
|---|---|---|---|
| $c$ | 6 | 5~6 | 3 |

⇒事件個數＝35＋19＋3＝57

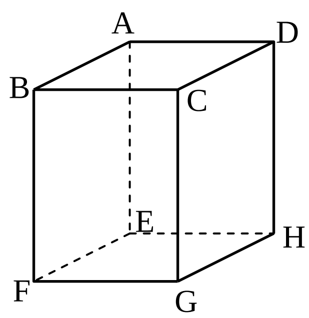
∴機率＝$\dfrac{57}{108}=\dfrac{19}{36}$

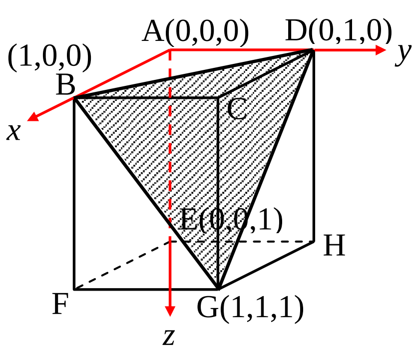
答：$\dfrac{19}{36}$

出處：第二冊(條件機率)，第三冊(行列式)

G.如右圖所示，ABCD－EFGH 為一長方體。若平面 BDG 上一點 P 滿足$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$，

則實數 $a=\dfrac{㉚}{㉛}$ 。(化成最簡分數)




解：1.坐標化，不失一般性，設邊長為 1，如右圖

令 A(0，0，0)，B(1，0，0)，D(0，1，0)

E(0，0，1)，∴G(1，1，1)

2.求平面 BDG

∵$\overrightarrow{BD}=(-1，1，0)$，$\overrightarrow{BG}=(0，1，1)$

⇒$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BG}=(-1，1，0)\times(0，1，1)=(1，1，-1)$

⇒設平面 BDG：$x+y-z=k$

B(1，0，0)代入，∴$k=1$，即平面 BDG：$x+y-z=1$

3.設 P($x$，$y$，$z$)，$\because \overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow(x，y，z)=\frac{1}{3}(1，0，0)+2(0，1，0)+a(0，0，1)=(\frac{1}{3}，2，a)$

4.$\therefore$P($x$，$y$，$z$)＝($\frac{1}{3}$，2，$a$)在平面 BDG：$x+y-z=1$ 上

$\Rightarrow\frac{1}{3}+2-a=1$，得 $a=\frac{4}{3}$

答：$\frac{4}{3}$

出處：第四冊(空間向量)

參考公式及可能用到的數值

1.首項為$a$，公差為 $d$ 的等差數列前 $n$ 項之和 $S=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

首項為$a$，公比為 $r(r\neq 1)$等比數列的前 $n$ 項之和 $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2.三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3.ΔABC 的正弦定理：$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=2R$ (R 為ΔABC 的外接圓半徑)

ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4.一維數據 X：$x_1$，$x_2$，⋯，$x_n$，算術平均數：$\mu_X=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

標準差：$\sigma_X=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\frac{1}{n}((\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2})-n\mu_X^{\ 2})}$

5.二維數據(X，Y)：($x_1$，$y_1$)，($x_2$，$y_2$)，⋯，($x_n$，$y_n$)，相關係數 $r_{X,Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6.參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$；$\sqrt{3}\approx 1.732$；$\sqrt{5}\approx 2.236$；$\sqrt{6}\approx 2.449$；$\pi\approx 3.142$

7.對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

105 試題分布分析

| 冊別 | 複習單元 | 章節 | 105 學測題目 | 占分 |
|---|---|---|---|---|
| 第 1 冊 | 單元 1 | Ch1 數與式 | 7，8 | 10 |
| | 單元 2 | Ch2 多項式函數 | 1，10 | 10 |
| | 單元 3 | Ch3 指數函數與對數函數 | 4，11(2 分) | 7 |
| 第 2 冊 | 單元 4 | Ch1 數列與級數 | 6 | 5 |
| | 單元 5 | Ch2 排列、組合 | A(4 分) | 4 |
| | 單元 6 | Ch3 機率 | 13，F(4 分) | 9 |
| | 單元 7 | Ch4 數據分析 | 11(3 分) | 3 |
| 第 3 冊 | 單元 8 | Ch1 三角 | 2，12 | 10 |
| | 單元 9 | Ch2 直線與圓 | 3，E | 10 |
| | 單元 10 | Ch3 平面向量 | B，F(1 分) | 6 |
| 第 4 冊 | 單元 11 | Ch1 空間向量 | G | 5 |
| | 單元 12 | Ch2 空間中的平面與直線 | 5，9 | 10 |
| | 單元 13 | Ch3 矩陣 | A(1 分)，D | 6 |
| | 單元 14 | Ch4 二次曲線 | C | 5 |
| 合　計 | | 單選(6)、多選(7)、選填(7) | 20 題 | 100 分 |