大學入學考試中心 103 學年度學科能力測驗試題 數學考科

第壹部分：選擇題(占 60 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1.請問下列哪一個選項等於 $\log\left(2^{(3^5)}\right)$？

(1) $5\log\left(2^3\right)$　(2) $3\times5\log2$　(3) $5\log2\times\log3$　(4) $5(\log2\times\log3)$　(5) $3^5\log2$

解：利用性質 $\log a^k=k\log a$，故 $\log\left(2^{(3^5)}\right)=3^5\log2$

答：(5)

出處：指數與對數函數(對數運算性質)

2.令 A(5，0，12)、B(－5，0，12)為坐標空間中之兩點，且令 P 為 xy 平面上滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$ 的點。請問下列哪一個選項中的點可能為 P？

(1) (5，0，0)　(2) (5，5，0)　(3) (0，12，0)　(4) (0，0，0)　(5) (0，0，24)

解 1：∵P 為 xy 平面上的點，⇒設 P(x，y，0)，x，$y\in$R

$\overline{PA}=\sqrt{(x-5)^2+y^2+12^2}=13$，⇒$(x-5)^2+y^2=25$ ⋯(1)

$\overline{PB}=\sqrt{(x+5)^2+y^2+12^2}=13$，⇒$(x+5)^2+y^2=25$ ⋯(2)

⇒由(1)(2)解得 $x=0$，$y=0$，故 P(0，0，0)

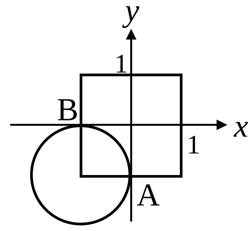
解 2：(1)~(5)選項，逐一代入檢查 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$ 是否成立？

答：(4)

出處：空間向量(平面上點的假設、兩點間之距離求法)

3.在坐標平面上，以(1，1)，(－1，1)，(－1，－1)及(1，－1)等四個點為頂點的正方形，與圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 有幾個交點？

(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 0 個



解：圓 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$，⇒$(x+1)^2+(y+1)^2=1$，即圓心為(－1，－1)，半徑為 1

如右圖，兩圖形交於 A(0，－1)與 B(－1，0)等 2 個點

答：(2)

出處：圓與直線(配方法、圓的心徑式、點坐標、圓的圖形作法)

4.請問滿足絕對值不等式 $|4x-12|\le2x$ 的實數 x 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 6

解 1：由 $|4x-12|\le2x$，∵$|4x-12|\ge0$，得知 $2x\ge0$，⇒$-2x\le4x-12\le2x$，得 $2\le x\le6$，其長度為 $6-2=4$

解 2：由 $|4x-12|\le2x$，平方，得 $12x^2-96x+144\le0$，⇒$x^2-8x+12=(x-2)(x-6)\le0$，∴$2\le x\le6$，其長度為 $6-2=4$

解 3：令 $4x-12=0$，得知去絕對值的關鍵點為 $x=3$，討論如下：

①當 $x\ge3$ 時，$|4x-12|=4x-12\le2x$，⇒得 $x\le6$，即 $3\le x\le6$

②當 $x<3$ 時，$|4x-12|=-4x+12\le2x$，⇒得 $x\ge2$，即 $2\le x<3$

⇒由①②，得知 $2\le x\le6$，其長度為 $6-2=4$

答：(4)

出處：數與式(去絕對值的方法)

5.設 $(1+\sqrt{2})^6=a+b\sqrt{2}$，其中 a，b 為整數。請問 b 等於下列哪一個選項？

(1) $C_0^6+2C_2^6+2^2C_4^6+2^3C_6^6$　(2) $C_1^6+2C_3^6+2^2C_5^6$　(3) $C_0^6+2C_1^6+2^2C_3^6+2^4C_4^6+2^5C_5^6+2^6C_6^6$

(4) $2C_1^6+2^2C_3^6+2^3C_5^6$　(5) $C_0^6+2^2C_2^6+2^4C_4^6+2^6C_6^6$

解：利用二項式定理展開：

$(1+\sqrt{2})^6 = C_0^6 + C_1^6\sqrt{2} + C_2^6(\sqrt{2})^2 + C_3^6(\sqrt{2})^3 + C_4^6(\sqrt{2})^4 + C_5^6(\sqrt{2})^5 + C_6^6(\sqrt{2})^6$

$= C_0^6 + C_1^6\sqrt{2} + 2C_2^6 + 2\sqrt{2}\,C_3^6 + 4C_4^6 + 4\sqrt{2}\,C_5^6 + 8C_6^6$

$= (C_0^6 + 2C_2^6 + 4C_4^6 + 8C_6^6) + (C_1^6 + 2C_3^6 + 4C_5^6)\sqrt{2}$，⇒故 $b = C_1^6 + 2C_3^6 + 4C_5^6$

答：(2)

出處：排列與組合(二項式定理展開的方法)

6.某疾病可分爲兩種類型：第一類占 70%，可藉由藥物 A 治療，其每一次療程的成功率爲 70%，且每一次療程的成功與否互相獨立；其餘爲第二類，藥物 A 治療方式完全無效。在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況下，進行第二次療程成功的條件機率最接近下列哪一個選項？

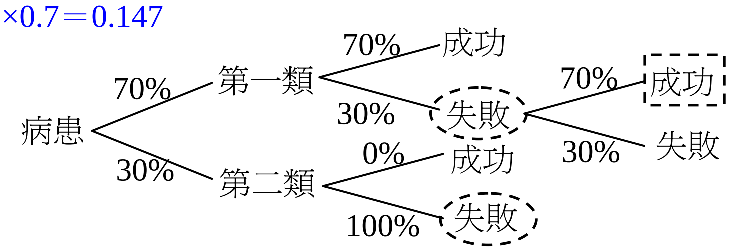
(1) 0.25 (2) 0.3 (3) 0.35 (4) 0.4 (5) 0.45

解：如右樹狀圖，P(藥物 A 第一次療程失敗)＝0.7×0.3＋0.3×1＝0.51

P(藥物 A 第一次療程失敗且第二次療程成功)＝0.7×0.3×0.7＝0.147

所求條件機率＝P(第二次成功|第一次失敗)

$= \dfrac{0.147}{0.51} \approx 0.288\cdots$



答：(2)

出處：機率(樹狀圖、貝氏定理、條件機率)

二、多選題(占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(塡)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7.設坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆爲整數的點稱爲格子點。請選出圖形上有格子點的選項。

(1) $y=x^2$ (2) $3y=9x+1$ (3) $y^2=-x-2$ (4) $x^2+y^2=3$ (5) $y=\log_9 x+\dfrac{1}{2}$

解：(1) $y=x^2$，圖形上存在格子點有(1，1)，……等，即設格子點爲$(k，k^2)$，k 爲整數

(2) $3y=9x+1$，⇒$3(y-x)=1$，∵$y-x$ 爲整數，∴$3(y-x)$爲 3 的倍數，故圖形上沒有格子點

(3) $y^2=-x-2$，圖形上存在格子點有$(-2，0)$，……等，即設格子點爲$(-2-k^2，k)$，k 爲整數

(4) $x^2+y^2=3$，⇒ x^2，y^2 皆爲正整數或 0，∴$x^2+y^2=0$，2，5，⋯，故圖形上沒有格子點

(5) $y=\log_9 x+\dfrac{1}{2}=\log_{3^2} x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\log_3 x+\dfrac{1}{2}$，⇒$2y-1=\log_3 x$，即 $x=3^{2y-1}$

⇒圖形上存在格子點有(3，1)，……等，即設格子點爲$(3^{2k-1}，k)$，k 爲整數

答：(1)(3)(5)

出處：數與式、指數與對數函數、圓、二次曲線(格子點的找法)

8.關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13}>3.5$ (2) $\sqrt{13}<3.6$ (3) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$

解 1：(1)(2) $\sqrt{13}=3.6055\cdots>3.6$

或∵$3.5=\sqrt{3.5^2}=\sqrt{12.25}$，$3.6=\sqrt{3.6^2}=\sqrt{12.96}$，⇒$\sqrt{13}>3.6$

(3) $(\sqrt{13}-\sqrt{3})^2-\sqrt{10}^2=16-2\sqrt{39}-10=6-2\sqrt{39}<0$，⇒$\sqrt{13}-\sqrt{3}<\sqrt{10}$

或 $(\sqrt{13})^2-(\sqrt{10}+\sqrt{3})^2=-2\sqrt{30}<0$，⇒$(\sqrt{13})^2<(\sqrt{10}+\sqrt{3})^2$，⇒$\sqrt{13}<\sqrt{10}+\sqrt{3}$

(4) $(\sqrt{13}+\sqrt{3})^2-\sqrt{16}^2=16+2\sqrt{39}-16=2\sqrt{39}>0$，⇒$(\sqrt{13}+\sqrt{3})^2>\sqrt{16}^2$，⇒$\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{3}}{10}\approx 0.533\cdots<0.6$

解 2：利用近似值 $\sqrt{13}\approx 3.605$，$\sqrt{3}\approx 1.732$ 逐一代入檢查，選出正確答案

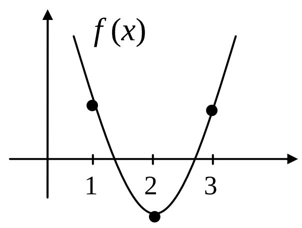
答：(1)(4)
出處：數與式(直式開平方根方法、根式運算)
註：再次見到學會「直式開平方根」方法的好處吧!! 亦即國中生就會解此題

9.一物體由坐標平面中的點$(-3,6)$出發，沿著向量$\vec{v}$所指的方向持續前進，可以進入第一象限。請選出正確的選項。
(1) $\vec{v}=(1,-2)$ (2) $\vec{v}=(1,-1)$ (3) $\vec{v}=(0.001,0)$ (4) $\vec{v}=(0.001,1)$ (5) $\vec{v}=(-0.001,1)$

解：(1)設$(-3,6)+k(1,-2)=(-3+k,6-2k)$，其中當 $x=-3+k>0$，即 $k>3$ 時，$y=6-2k<0$，⇒不合題意
或發現當 $k=3$ 時，$y=6-2k=0$，通過原點$(0,0)$，但是不進入第一象限
(2)設$(-3,6)+k(1,-1)=(-3+k,6-k)$，其中當 $x=-3+k>0$，即 $k>3$ 時，$y=6-k$ 可以大於 0，⇒正確
(3)設$(-3,6)+k(0.001,0)=(-3+0.00k,6)$，其中當 $x=-3+(0.001)k>0$，即 $k>3000$ 時，$y=6>0$，⇒正確
(4)設$(-3,6)+k(0.001,1)=(-3+0.00k,6+k)$，
其中當 $x=-3+(0.001)k>0$，即 $k>3000$ 時，$y=6+k>0$，⇒正確
(5)設$(-3,6)+k(-0.001,1)=(-3-0.00k,6+k)$
其中當 $x=-3-0.00k>0$，即 $k<-3000$ 時，$y=6+k<0$，⇒不合題意

答：(2)(3)(4)
出處：直線方程式(平面直線的方向向量之意義)

10.設 $f(x)$爲實係數二次多項式，且已知 $f(1)>0$，$f(2)<0$，$f(3)>0$。令 $g(x)=f(x)+(x-2)(x-3)$，請選出正確的選項。
(1) $y=f(x)$的圖形是開口向下的拋物線 (2) $y=g(x)$的圖形是開口向下的拋物線 (3) $g(1)>f(1)$
(4) $g(x)=0$ 在 1 與 2 之間恰有一個實根 (5)若α爲 $f(x)=0$ 的最大根，則 $g(\alpha)=0$



解：(1)根據 $f(1)>0$，$f(2)<0$，$f(3)>0$，得知 $f(x)$的圖形是開口向上的拋物線，如右圖
且知 $f(x)$的 2 實數根位於區間$(1,2)$與$(2,3)$內
⇒∵拋物線爲對稱圖形，頂點爲$(2,k)$，⇒可設 $y=f(x)=a(x-2)^2+k$，$a>0$
(2) $g(x)=f(x)+(x-2)(x-3)=a(x-2)^2+k+(x-2)(x-3)=(a+1)x^2-(4a+5)x+(4a+k+6)$
⇒∵領導係數 $a+1>0$，∴$g(x)$的圖形是開口向上的拋物線
(3)令 $x=1$，則 $g(1)=f(1)+(1-2)(1-3)=f(1)+2>f(1)$，故 $g(1)>f(1)$
(4)∵$g(1)=f(1)+2>0$，$g(2)=f(2)+(2-2)(2-3)=f(2)<0$，$g(3)=f(3)+(3-2)(3-3)=f(3)>0$
根據勘根定理：∵$g(1)\,g(2)<0$，$g(2)\,g(3)<0$，⇒ $g(x)=0$ 在區間$(1,2)$與$(2,3)$內必有一個實根
(5)若α爲 $f(x)=0$ 的最大根，∴$f(\alpha)=0$，且由(1)得知 $2<\alpha<3$
⇒ $g(\alpha)=f(\alpha)+(\alpha-2)(\alpha-3)=0+(\alpha-2)(\alpha-3)<0$

答：(3)(4)
出處：多項式函數(拋物線之作圖、勘根定理與其意義)

11.設 $a_1=1$ 且 a_1，a_2，a_3，…爲等差數列。請選出正確的選項。
(1)若 $a_{100}>0$，則 $a_{1000}>0$ (2)若 $a_{100}<0$，則 $a_{1000}<0$ (3)若 $a_{1000}>0$，則 $a_{100}>0$
(4)若 $a_{1000}<0$，則 $a_{100}<0$ (5) $a_{1000}-a_{10}=10(a_{100}-a_1)$

解：(1)若 $a_{100}=a_1+99d=1+99d>0$，$d>-\dfrac{1}{99}$，而 $a_{1000}=a_1+999d=1+999d>1-\dfrac{999}{99}=-\dfrac{900}{99}$，⇒錯誤
(2)若 $a_{100}=a_1+99d=1+99d<0$，$d<-\dfrac{1}{99}$，而 $a_{1000}=a_1+999d=1+999d<1-\dfrac{999}{99}=-\dfrac{900}{99}<0$，⇒正確
(3)若 $a_{1000}=a_1+999d=1+999d>0$，$d>-\dfrac{1}{999}$，而 $a_{100}=a_1+99d=1+99d>1-\dfrac{99}{999}=\dfrac{900}{999}>0$，⇒正確
(4)若 $a_{1000}=a_1+999d=1+999d<0$，$d<-\dfrac{1}{999}$，而 $a_{100}=a_1+99d=1+99d<1-\dfrac{99}{999}=\dfrac{900}{999}>0$，⇒錯誤
(5) $a_{1000}-a_{10}=a_1+999d-(a_1+9d)=990d$，而 $a_{100}-a_1=a_1+99d-a_1=99d$，
⇒ $a_{1000}-a_{10}=990d=10(a_{100}-a_1)$，⇒正確

答：(2)(3)(5)
出處：數列與級數(等差數列之一般項求法)

12.所謂某個年齡範圍的失業率，是指該年齡範圍的失業人數與勞動力人數之比，以百分數表達(進行統計分析時，所有年齡以整數表示)。下表為去年某國四個年齡範圍的失業率，<u>其中的年齡範圍有所重疊</u>。

年齡範圍	35~44 歲	35~39 歲	40~44 歲	45~49 歲
失業率	12.66(%)	9.80(%)	13.17(%)	7.08(%)

請根據上表選出正確的選項。

(1)在上述四個年齡範圍中，以 40~44 歲的失業率最高

(2) 40~44 歲的勞動力人數多於 45~49 歲勞動力人數

(3) 40~49 歲的失業率等於 $\left(\dfrac{13.17+7.08}{2}\right)\%$

(4) 35~39 歲勞動力人數少於 40~44 歲勞動力人數

(5)如果 40~44 歲的失業率降低，則 45~49 歲的失業率會升高

解：根據題意，得知失業率＝$\dfrac{\text{失業人數}}{\text{勞動力人數}}\times 100\%$，且上表資料順序修正如下表(斜線圓圈區域為重疊年齡)：

年齡範圍	35~39 歲	40~44 歲	35~44 歲	45~49 歲
失業率	9.80(%)	13.17(%)	12.66(%)	7.08(%)
勞動人數	a	b		c

(1)根據上表，得知 40~44 歲的失業率 13.17(%)最高

(2)不一定，由於勞動力人數與失業人數有關，僅表示 40~44 歲的失業率較高，如上表中的 b 與 c 值大小無法確定

(3)不一定，如上表，由於 40~49 歲的失業率＝$\dfrac{b\times 13.17\%+c\times 7.08\%}{b+c}$ 不一定等於 $\left(\dfrac{13.17+7.08}{2}\right)\%$之，除非 $b=c$

(4)由 35~44 歲的失業率 12.66%估計：設為 $\dfrac{a\times 9.80\%+b\times 13.17\%}{a+b}=12.66\%$

$\Rightarrow 9.80\%\times a+13.77\%\times b=12.66\%(a+b)$，得知 $2.86a=0.51b$，顯然發現 $a<b$

(5)不一定，未必有絕對關係

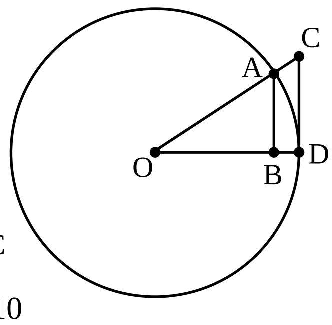
答：(1)(4)

出處：數據分析(了解題意中失業率的意義與計算方式、算術平均數)

第貳部分：選填題(占 40 分)

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13－36)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

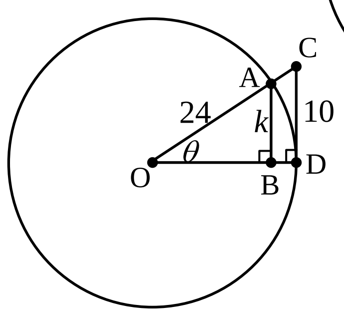
A.設圓 O 之半徑為 24，$\overline{OC}=26$，$\overline{OC}$交圓 O 於 A 點，$\overline{CD}$切圓 O 於 D 點，B 為 A 點到$\overline{OD}$的垂足，如右邊的示意圖。則$\overline{AB}=\dfrac{⑬⑭⑮}{⑯⑰}$。(化為最簡分數)



解 1：1.設$\angle COD=\theta$，∴在ΔCOD 中，$\overline{CD}=\sqrt{26^2-24^2}=10$

2.設$\overline{AB}=k$，在ΔCOD 中，$\sin\theta=\dfrac{10}{26}$，在$\Delta AOB$ 中，$\sin\theta=\dfrac{k}{24}$

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{10}{26}=\dfrac{k}{24}$，得 $k=\dfrac{120}{13}=\overline{AB}$



解 2：∵ΔOAB 相似於ΔOCD，利用對應邊成比例之性質

$\Rightarrow\overline{OA}:\overline{OC}=\overline{AB}:\overline{CD}$，$\Rightarrow 24:26=k:10$，得 $k=\dfrac{120}{13}=\overline{AB}$

答：$\dfrac{120}{13}$

出處：三角(相似形與正弦的意義)(國中生會解此題)

B.坐標平面上，若直線 $y=ax+b$(其中 a，b 爲實數)與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，則 $a=$ ⑱ ，$b=$ ⑲⑳ 。

解：1.交點 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=x^2 \end{cases}$，$\Rightarrow y=ax+b=x^2$，$\Rightarrow x^2-ax-b=0$，$\because$交於一點，$\therefore$判別式$=a^2+4b=0$

2.交點 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=(x-2)^2+12 \end{cases}$，$\Rightarrow y=ax+b=(x-2)^2+12$，$\Rightarrow x^2-(a+4)x^2+(16-b)=0$ $\because$交於一點，

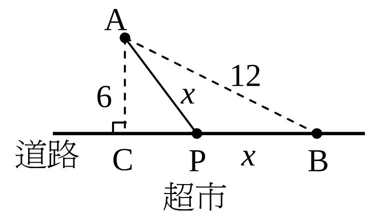
$\therefore$判別式$=(a+4)^2-4(16-b)=a^2+8a-48+4b=a^2+8a-48-a^2=0$，得 $a=6$，代回 1，得 $b=-9$

答：$a=6$，$b=-9$

出處：直線(一次函數)、二次函數(交點的代數意義、二次方程式一解的意義爲交於一點、判別式$=0$)

註：本題是以代數觀點解題，若以幾何觀點，實爲切線觀念

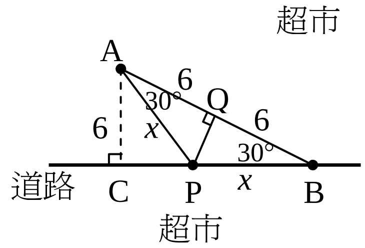
C.小鎮 A 距離一筆直道路 6 公里，並與道路上的小鎮 B 相距 12 公里。今欲在此道路上蓋一家超級市場使其與 A，B 等距，則此超級市場與 A 的距離須爲 ㉑$\sqrt{㉒}$ 公里。(化爲最簡根式)



解 1：如右圖，設點 P 爲超級市場，且令$\overline{AP}=\overline{BP}=x$ 公里

在ΔABC 中，$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，$\Rightarrow\overline{CP}=6\sqrt{3}-x$

在ΔACP 中，$\because\overline{AP}^2=\overline{AC}^2+\overline{CP}^2$，$\therefore x^2=6^2+(6\sqrt{3}-x)^2$，$\Rightarrow x=4\sqrt{3}=\overline{AP}$



解 2：(1)$\because$在ΔABC 中，$\overline{AB}=12=2\times6=2\overline{AC}$，得知$\angle$ACB$=30°$，如右圖

(2)設$\overline{AP}=\overline{BP}=x$ 公里，過 P 作$\overline{PQ}\perp\overline{AB}$，$\therefore\angle$PAQ$=30°$

$\Rightarrow$在ΔAPQ 中，$\cos30°=\frac{6}{x}$，$\therefore x=4\sqrt{3}$

答：$4\sqrt{3}$

出處：平面幾何(根據題意作圖、畢氏定理)(國中生會解此題)

D.坐標空間中有四點 A(2，0，0)、B(3，4，2)、C(－2，4，0)與 D(－1，3，1)。若點 P 在直線 CD 上變動，則內積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 之最小可能值爲 $\frac{㉓}{㉔}$ 。(化爲最簡分數)

解：1.設直線 CD：$\begin{cases} x=-2+k \\ y=4-k \\ z=k \end{cases}$，$k\in R$，令 P$(-2+k，4-k，k)$，$k\in R$

2.$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(4-k，k-4，-k)\cdot(5-k，k，2-k)=3k^2-15k+20=3(k-\frac{5}{2})^2+\frac{5}{4}$，即當 $k=\frac{5}{2}$時，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$有最小值$\frac{5}{4}$

答：$\frac{5}{4}$

出處：空間中的平面與直線(空間中直線的參數式假設法、內積意義、配方法)

E.設$\vec{u}$，$\vec{v}$爲兩個長度皆爲 1 的向量。若$\vec{u}+\vec{v}$與$\vec{u}$的夾角爲 75°，則$\vec{u}$與$\vec{v}$的內積爲 $\frac{㉕\sqrt{㉖}}{㉗}$ 。(化爲最簡根式)

解 1：(1)$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u}=|\vec{u}|+\vec{u}\cdot\vec{v}=1+\vec{u}\cdot\vec{v}$

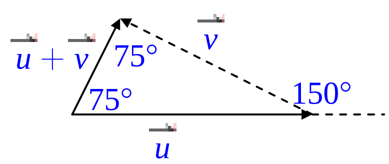
$|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2=2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$，$\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{2+2\vec{u}\cdot\vec{v}}$

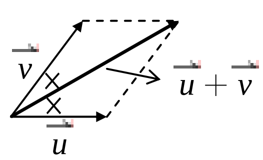
(2)$\because(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u}=|\vec{u}+\vec{v}|\,|\vec{u}|\cos75°$，$\Rightarrow 1+\vec{u}\cdot\vec{v}=(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})\sqrt{2+2\vec{u}\cdot\vec{v}}=(\frac{\sqrt{3}-1}{2})\sqrt{1+\vec{u}\cdot\vec{v}}$

$\Rightarrow$平方，得 $2|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2+(2+\sqrt{3})\vec{u}\cdot\vec{v}+\sqrt{3}=0$，$\Rightarrow(\vec{u}\cdot\vec{v}+\sqrt{3})(\vec{u}\cdot\vec{v}+1)=0$，$\therefore\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$或$-1$(不合，夾角 180°)

解 2：如右圖，$\because\vec{u}+\vec{v}$是$\vec{u}$與$\vec{v}$的角平分向量，$\therefore\vec{u}$與$\vec{v}$的夾角$=2\times75°=150°$

$\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos150°=1\times1\times(\frac{-\sqrt{3}}{2})=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

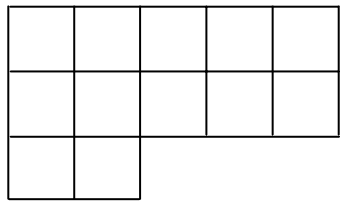


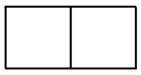
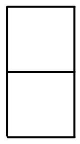


答：$\frac{-\sqrt{3}}{2}$

出處：平面向量(向量加法與內積的意義)

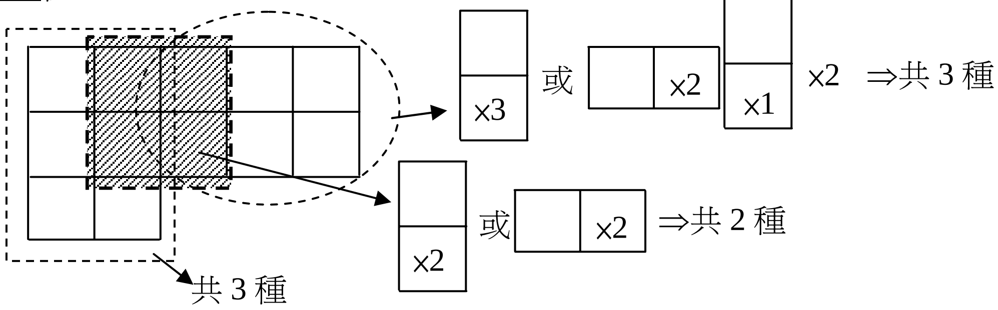
F.一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。今想用長方形瓷磚鋪滿地面，



已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即  或  。
則用 6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有<u>㉘㉙</u>種。

解：如右圖，

共 $3\times3+2=11$



答：11

出處：排列組合(加、乘法原理)

G.已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式(值)為 $\frac{5}{8}$。則 $a+d=$ $\frac{㉚㉛}{㉜}$ 。(化為最簡分數)

解 1：$\because \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\frac{5}{8}$，$\therefore$令 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\Rightarrow a+d=\frac{5}{8}+1=\frac{13}{8}$

解 2：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，$\Rightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=1 \end{cases}$，且 a，b，c，d 為正數或 0，又 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\frac{5}{8}$，$\Rightarrow ad-bc=\frac{5}{8}$

$\Rightarrow ad-bc=ad-(1-d)(1-a)=a+d-1=\frac{5}{8}$，$\therefore a+d=\frac{5}{8}+1=\frac{13}{8}$

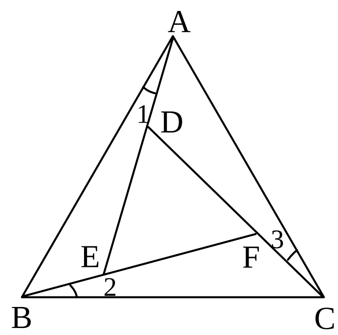
解 3：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，即矩陣設為 $\begin{bmatrix} a & 1-d \\ 1-a & d \end{bmatrix}$，$\therefore \det\begin{bmatrix} a & 1-d \\ 1-a & d \end{bmatrix}=ad-1+a+d-ad=\frac{5}{8}$，$\Rightarrow a+d=\frac{5}{8}$

答：$\frac{13}{8}$

出處：(馬可夫)矩陣(轉移矩陣的意義、行列式的定義)

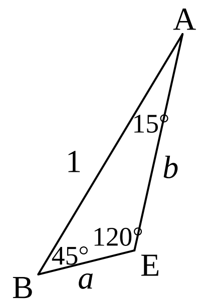
H.如圖，正三角形 ABC 的邊長為 1，並且 $\angle1=\angle2=\angle3=15^\circ$。已知 $\sin15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

則正三角形 DEF 的邊長為 $\frac{\sqrt{㉝}}{㉞}-\frac{\sqrt{㉟}}{㊱}$ 。(化為最簡分數)



解：1.根據題意，得知 $\Delta ABE\cong\Delta ACD\cong\Delta BCF$，$\therefore \overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}$

2.如右圖，在 ΔABE 中，設 $\overline{BE}=a$，$\overline{AE}=b$



由正弦定理：$\frac{1}{\sin120^0}=\frac{a}{\sin15^0}=\frac{b}{\sin45^0}$

$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$正三角形 DEF 的邊長$=\overline{DE}=b-a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

答：$\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

出處：三角(正弦定理)

◎歇後語：原本告訴同學，切記「圓錐曲線」的定義，用它就對啦! 可惜….，今年一題也沒有
指考也不可能會考(範圍不包含它)，故斷定：今年畢業的同學，無緣再見圓錐曲線的考題囉!!!!

◎明年注意題型有：今年沒出題的 ⇒ 二次曲線(拋物線、橢圓、雙曲線)，迴歸直線，標準差，餘弦定理
99 課綱新單元⇒條件機率，矩陣等

參考公式及可能用到的數值

1.首項爲 a，公差爲 d 的等差數列前 n 項之和 $S=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

首項爲 a，公比爲 $r(r\neq 1)$等比數列的前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2.三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3.ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}=2R$　(R 爲ΔABC 的外接圓半徑)

ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4.一維數據 X：x_1，x_2，⋯，x_n，算術平均數：$\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

標準差：$\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}((\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2})-n\mu_X^{\,2})}$

5.二維數據(X，Y)：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，⋯，(x_n, y_n)，相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6.參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$；$\sqrt{3}\approx 1.732$；$\sqrt{5}\approx 2.236$；$\sqrt{6}\approx 2.449$；$\pi\approx 3.142$

7.對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

103 試題分布分析

冊別	複習單元	章節	103 學測題目	占分
第 1 冊	單元 1	Ch1 數與式	4，8	10
	單元 2	Ch2 多項式函數	10，B	10
	單元 3	Ch3 指數、對數函數	1	5
第 2 冊	單元 4	Ch1 數列與級數	11	5
	單元 5	Ch2 排列、組合	5，F	10
	單元 6	Ch3 機率	6	5
	單元 7	Ch4 數據分析	12	5
第 3 冊	單元 8	Ch1 三角	C，H	10
	單元 9	Ch2 直線與圓	3，7，A	15
	單元 10	Ch3 平面向量	9，E	10
第 4 冊	單元 11	Ch1 空間向量	2	5
	單元 12	Ch2 空間中的平面與直線	D	5
	單元 13	Ch3 矩陣	G	5
	單元 14	Ch4 二次曲線		0
		單選(6)、多選(6)、選填(8)	20 題	100 分

103 試題五標

名稱	頂標	前標	均標	後標	底標	級距
級分						
分數						