大學入學考試中心 101 學年度學科能力測驗數學科試題

第壹部分：選擇題(占 65 分)

一、單選題(占 35 分)

說明：第 1 至 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. $\sqrt{\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{4^2}+1}$ 等於下列哪一個選項？

(1) 1.01 (2) 1.05 (3) 1.1 (4) 1.15 (5) 1.21

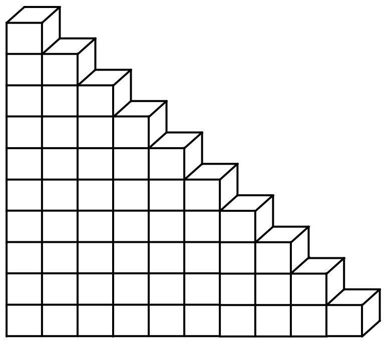
解：$\sqrt{\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{4^2}+1}=\sqrt{\dfrac{16+25+16\times 25}{5^2\times 4^2}}=\sqrt{\dfrac{441}{5^2\times 4^2}}=\dfrac{21}{20}=1.05$

答：(2)

2. 將邊長為 1 公分的正立方體堆疊成一階梯形立體，如下圖所示，其中第 1 層(最下層)有 10 塊，第 2 層有 9 塊，…，依此類推。當堆疊完 10 層時，該階梯形立體的表面積(即該立體的前、後、上、下、左、右各表面積總和)為多少？

(1)75 平方公分 (2)90 平方公分 (3)110 平方公分

(4)130 平方公分 (5)150 平方公分



解：前、後各有 1＋2＋3＋…＋10＝55 平方公分

上、下各有 10 平方公分

左、右各有 10 平方公分

∴共有 2(55＋10＋10)＝150 平方公分

答：(5)

3. 下表為常用對數表 $\log_{10} N$ 的一部份：

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0292	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

請問 $10^{3.032}$ 最接近下列哪一個選項？

(1) 101 (2) 201 (3) 1007 (4) 1076 (5) 2012

解：設 $k=10^{3.032}$，取 $\log_{10} k=\log_{10} 10^{3.032}=3.032=3+0.032$

其中 $\log_{10} 1.07<0.032<\log_{10} 1.08$，$\therefore 3+\log_{10} 1.07<\log_{10} k<3+\log_{10} 1.08$

即 $\log_{10} 10^3+\log_{10} 1.07<\log_{10} k<\log_{10} 10^3+\log_{10} 1.08$

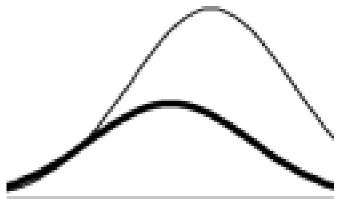
$\Rightarrow \log_{10} 1070<\log_{10} k<\log_{10} 1080$，得 $1070<k<1080$

答：(4)

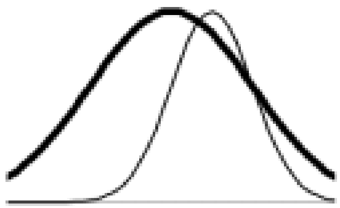
4.甲、乙兩校有一樣多的學生參加數學能力檢驗，兩校學生測驗成績的分布都很接近常態分布，其中甲校學生的平均分數為 60 分，標準差為 10 分；乙校學生的平均分數為 65 分，標準差為 5 分。若用粗線表示甲校學生成績分布曲線；細線表示乙校學生成績分布曲線，則下列哪一個分布圖較為正確？

(1)

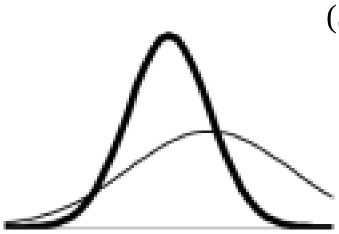
(2)



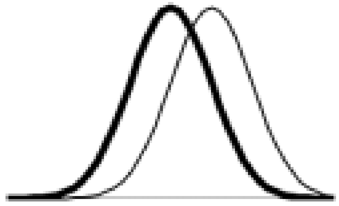
(3)



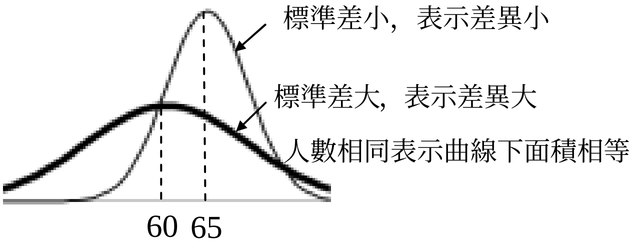
(4)



(5)



解：



答：(1)

5.若正實數 x，y 滿足 $\log_{10} x = 2.8$，$\log_{10} y = 5.6$，則 $\log_{10}(x^2 + y)$ 最接近下列哪一個選項的值？

(1) 2.8　(2) 5.6　(3) 5.9　(4) 8.4　(5) 11.2

解：$\because \log_{10} x = 2.8$，$\therefore x = 10^{2.8}$，$x^2 = (10^{2.8})^2 = 10^{5.6}$

$\log_{10} y = 5.6$，$\therefore y = 10^{5.6}$

則 $x^2 + y = 2\cdot 10^{5.6}$，$\therefore \log_{10}(x^2 + y) = \log_{10} 2\cdot 10^{5.6}$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 10^{5.6} = 0.3010 + 5.6 = 5.9010$

答：(3)

6.箱中有編號分別為 0，1，2，⋯，9 的十顆球。隨機抽取一球，將球放回後，再隨機抽取一球。請問兩球編號相減的絕對值為下列哪一個選項時，其出現的機率最大？

(1) 0　(2) 1　(3) 4　(4) 5　(5) 9

解：樣本空間 $n(S) = 10\times 10 = 100$

事件為兩球編號相減的絕對值

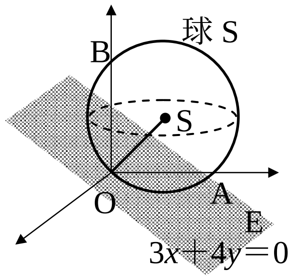
事件	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	合計
方法數	10	18	16	14	12	10	8	6	4	2	100

答：(2)

7.空間坐標中有一球面(半徑大於 0)與平面 $3x+4y=0$ 相切於原點，請問此球面與三個坐標軸一共有多少個交點？

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

解：如右圖，球面 S 與三個坐標軸交於 A、O、B 點



另解：

∵球面 S 與平面 E：$3x+4y=0$ 相切於原點

且平面 E 的法向量為(3，4，0)，∴設球心 S($3t$，$4t$，0)

取 $t=1$，S(3，4，0)，$\overline{OS}$＝半徑＝5

⇒球 S：$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-0)^2=25$

三個坐標軸交(0，0，0)，(6，0，0)，(0，8，0)等 3 點

答：(3)

二、多選題(占 30 分)

說明：第 8 至 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8.設 $f(x)=x^4-5x^3+x^2+ax+b$ 為實係數多項式，且知 $f(i)=0$(其中 $i^2=-1$)。請問下列哪些選項式多項式方程式 $f(x)=0$ 的根？

(1) $-i$ (2) 0 (3) 1 (4) -5 (5) 5

解：∵$f(x)$為實係數多項式，且 $f(i)=0$

∴$f(-i)=0$，得知$(x-i)(x+i)=x^2+1$

⇒分解如右，$f(x)=x^4-5x^3+x^2+ax+b$

$=(x^2+1)(x^2-5x)=(x^2+1)x(x-5)$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & +1 & +\ a & +\ b & 0-1 \\ & 0 & -1 & +\ 5 & +\ 0 & \\ & & 0 & +\ 0 & +\ 0 & \\ \hline 1 & -5 & +0 & + & (a+5)+b & \end{array}$$

商式 餘式

且餘式 $a+5=0$，$b=0$，即 $a=-5$，$b=0$

得知 $f(x)=0$ 的根有 i，$-i$，0，5

答：(1)(2)(5)

9.三角形 ABC 是一個邊長為 3 的正三角形，如下圖所示。若在每一邊的兩個三等分點中，各選取一點連成三角形，則下列哪些選項式正確的？

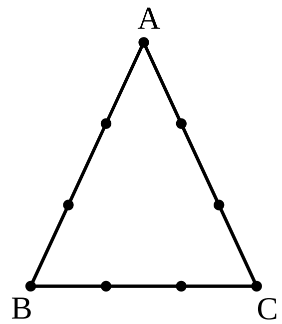
(1)依此方法可能連成的三角形一共有 8 個

(2)這些可能連成的三角形中，恰有 2 個是銳角三角形

(3)這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是直角三角形

(4)這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是鈍角三角形

(5)這些可能連成的三角形中，恰有 1 個是正三角形



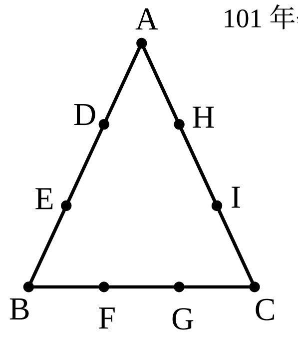
解：(1)連成的三角形共有 2×2×2＝8 個

(2)銳角三角形有ΔDIF，ΔEHG

(3)直角三角形為以 D、E、F、G、H、I 為直角的三角形

(5)正三角形有ΔDIF，ΔEHG

答：(1)(2)



10.設 O 為複數平面上的原點，並令點 A，B 分別代表非零複數 z，w。若∠AOB＝90^0，則下列哪些選項必為**負實數**？

(1) $\dfrac{z}{w}$　(2) zw　(3) $(zw)^2$　(4) $\dfrac{z^2}{w^2}$　(5) $(z\overline{w})^2$　(其中 $\overline{w}$ 為 w 的共軛複數)

解：設 $w=a+bi$，$a^2+b^2\neq0$，$\therefore z=w(\cos90^0+i\sin90^0)=-iw=b-ai$，則

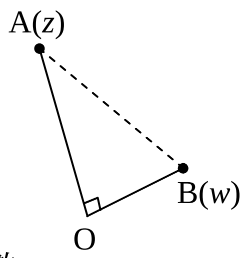
(1) $\dfrac{z}{w}=\dfrac{b-ai}{a+bi}=\dfrac{-i(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=-i$ 不是實數

(2) $zw=(b-ai)(a+bi)=2ab-i(a^2+b^2)$不是實數

(3) $(zw)^2=[(b-ai)(a+bi)]^2$ 不是實數

(4) $\dfrac{z^2}{w^2}=(\dfrac{z}{w})^2=(-i)^2=-1$，為負實數

(5) $(z\overline{w})^2=[(b-ai)(a-bi)]^2=[-i(a^2+b^2)]^2=-(a^2+b^2)^2$，為負實數



答：(4)(5)

11.若實數 a，b，c，d 使得聯立方程組 $\begin{cases}ax+8y=c\\x-4y=3\end{cases}$ 有解，且聯立方程組 $\begin{cases}-3x+by=d\\x-4y=3\end{cases}$ 無解，則下列哪些選項一定正確？

(1) $a\neq-2$　(2) $c=-6$　(3) $b=12$

(4) $d\neq-9$　(5)聯立方程組 $\begin{cases}ax+8y=c\\-3x+by=d\end{cases}$ 無解

解：1.$\because \begin{cases}ax+8y=c\\x-4y=3\end{cases}$ 有解，可能為

(1)1 解：當 $\dfrac{a}{-3}\neq\dfrac{8}{-4}$，$\therefore a\neq-2$

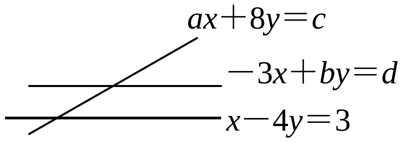
(2)無限多解：當 $\dfrac{a}{-3}=\dfrac{8}{-4}=\dfrac{c}{3}$，$\therefore a=-2$，$c=-6$

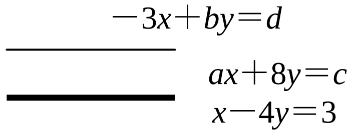
2. $\begin{cases}-3x+by=d\\x-4y=3\end{cases}$ 無解，則 $\dfrac{-3}{1}=\dfrac{b}{-4}\neq\dfrac{d}{3}$，$\therefore b=12$，$d\neq-9$

3.$\because \begin{cases} ax+8y=c \\ x-4y=3 \end{cases}$有解，得知兩直線 $ax+8y=c$ 與 $x-4y=3$ 相交於一點或重合

$\begin{cases} -3x+by=d \\ x-4y=3 \end{cases}$無解，得知兩直線$-3x+by=d$ 與 $x-4y=3$ 平行

$\therefore ax+8y=c$ 與$-3x+by=d$ 平行或相交於 1 點，∴無解或有解，如下二圖





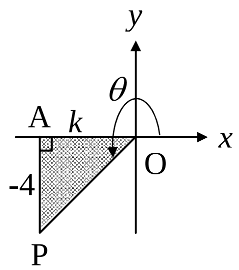
答：(3)(4)

12.在坐標平面上，廣義角 θ 的頂點為原點 O，始邊為 x 軸的正向，且滿足 $\tan\theta=\frac{2}{3}$。若 θ 的終邊上有一點 P，其 y 坐標為-4，則下列哪些選項一定正確？

(1) P 的 x 坐標是 6　(2) $\overline{OP}=2\sqrt{13}$　(3) $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$

(4) $\sin2\theta>0$　(5) $\cos\frac{\theta}{2}<0$

解：由題意得知廣義角 θ 為第三象限角，如右圖



在ΔOAP 中，設$\overline{OA}=k$

(1)$\because \tan\theta=\frac{2}{3}=\frac{-4}{k}$，$\therefore k=-6$，得知 P 的 x 坐標是-6

(2)在ΔOAP 中，$\overline{OP}=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=2\sqrt{13}$

(3)在ΔOAP 中，$\cos\theta=\frac{-6}{2\sqrt{13}}=\frac{-3}{\sqrt{13}}$

(4) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2(\frac{-2}{\sqrt{13}})(\frac{-3}{\sqrt{13}})=\frac{12}{13}>0$

(5)$\because 2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$\therefore k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}$

得知$\frac{\theta}{2}$可能在第二、四象限，則 $\cos\frac{\theta}{2}>0$ 或 $\cos\frac{\theta}{2}<0$

答：(2)(4)

13.平面上兩點 F_1，F_2 滿足$\overline{F_1F_2}=4$。設 d 為一實數，令Γ表示平面上滿足$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=d$ 的所有 P 點所成的圖形，又令 C 為平面上以 F_1 為圓心、6 為半徑的圓。請問下列哪些選項是正確？

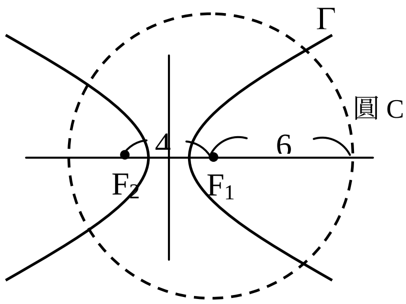
(1)當 $d=0$ 時，Γ為直線　(2)當 $d=1$ 時，Γ為雙曲線

(3)當 $d=2$ 時，Γ與圓 C 交於兩點　(4)當 $d=4$ 時，Γ與圓 C 交於四點

(5)當 $d=8$ 時，Γ不存在

解：(1)當 $d=0$ 時，即 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=0$，得 $\overline{PF_1}=\overline{PF_2}$

P 點所成的圖形為 $\overline{F_1F_2}$ 之中垂線



(2)當 $d=1$ 時，即貫軸長 $2a=1$，焦點長 $\overline{F_1F_2}=4=2c$

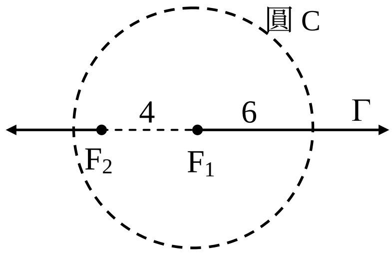
$c>a$，∴Γ為雙曲線

(3)當 $d=2$ 時，貫軸長 $2a=2$，焦點長 $=2c=4$

⇒如圖，Γ與圓 C 交於 4 點

(4)當 $d=4$ 時，貫軸長＝焦點長＝4

⇒如圖，Γ的圖形為二射線，⇒Γ與圓 C 交於 2 點



(5)當 $d=8$ 時，貫軸長＝8＞焦點長＝4

⇒Γ的圖形不存在

註：根據雙曲線的定義：

$d=0$ 時，Γ的圖形為中垂線

$0<d<4$ 時，Γ的圖形為雙曲線

$d=4$ 時，Γ的圖形為二射線

$d<0$，$d>4$ 時，Γ的圖形為不存在

答：(1)(2)(5)

第貳部分：選填題(占 35 分)

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14－33)。 2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.若首項為 a，公比為 0.01 的無窮等比級數和等於循環小數 $1.\overline{2}$，則 $a=$____。

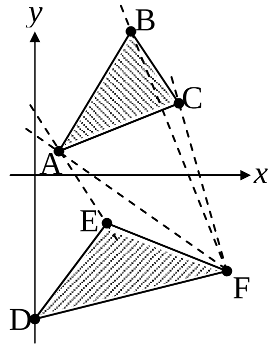
解：$S=a+0.01a+(0.01)^2a+\cdots\cdots=1.\overline{2}$

$\therefore \dfrac{a}{1-0.01}=1.\overline{2}=1+\dfrac{2}{9}$，$\Rightarrow \dfrac{a}{0.99}=\dfrac{11}{9}$，得 $a=1.21$

答：1.21

B.設 A(1,1)，B(3,5)，C(5,3)，D(0,－7)，E(2,－3)及 F(8,－6)為坐標平面上六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 各恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為____。

解：∵如圖，斜率之最小值為負，∴可能之直線有：



直線 CF，斜率 $=\dfrac{-6-3}{8-5}=-3$

直線 BF，斜率 $=\dfrac{-6-5}{8-3}=-\dfrac{11}{5}$

直線 AF，斜率 $=\dfrac{-6-1}{8-1}=-1$

直線 AE，斜率 $=\dfrac{-3-1}{2-1}=-4$，但是與ΔDEF 有 2 交點

答：－3

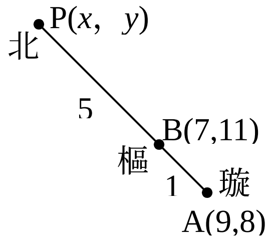
C.小明在天文網站上看到以下的資訊「可利用北斗七星斗杓的天璇與天樞這兩顆星來尋找北極星：由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的距離為天樞與天璇距離的 5 倍。」今小明將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐標為(9,8)及天樞的坐標為(7,11)。依上述資訊可以推得北極星的坐標為______。

解：如圖，設北極星的坐標為 $P(x,\ y)$

根據比例點公式：

$\Rightarrow(7,\ 11)=\dfrac{1\cdot(x,y)+5(9,8)}{5+1}$

$\Rightarrow 6(7,\ 11)=(x,\ y)+(45,\ 40)$，得$(x,\ y)=(-3,\ 26)$



答：$(-3,\ 26)$

D.設點 $A(-2,2)$、$B(4,8)$為坐標平面上兩點，且點 C 在二次函數 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的圖形上變動。當 C 點的 x 坐標為____時，內積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$有最小值____。

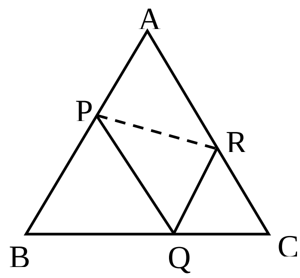
解：1.∵點 C 在 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的圖形上，∴設 $C(2t,\ 2t^2)$，$t\in R$

2.$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(6,\ 6)\cdot(2t+2,\ 2t^2-2)=12t^2+12t=12(t+\dfrac{1}{2})^2-3$

$\Rightarrow$當 $t=-\dfrac{1}{2}$時，即 $C(-1,\ \dfrac{1}{2})$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$有最小值為$-3$

答：$C(-1,\ \dfrac{1}{2})$，-3

E.在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P，Q，R，使得 APQR 形成一平行四邊形，如下圖所示：



若平行四邊形 APQR 的面積為 $20\sqrt{3}$，則線段 PR 的長度為_____。

解：1.如右圖，設$\overline{AP}=x$，$\overline{AR}=y$

2.∵APQR 為平行四邊形

∴$\overline{AP}=x=\overline{QR}$，$\overline{BP}=13-x$

$\overline{AR}=y=\overline{PQ}$，$\overline{RC}=13-y$

$\Rightarrow$在ΔPBQ 中，$13-x=y$，得 $x+y=13$

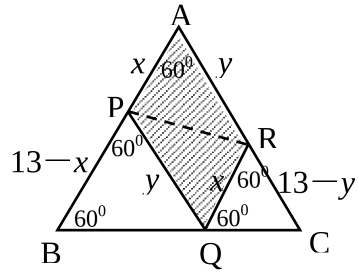
3.∵四邊形 APQR 的面積為 $20\sqrt{3}=2\Delta APR$ 面積

∴$20\sqrt{3}=2(\dfrac{1}{2}xy\sin 60^0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy$，得 $xy=40$

3.在ΔAPR 中，根據餘弦定理

$(\overline{AR})^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^0=x^2+y^2-xy$

$=(x+y)^2-3xy=13^2-3\times 40=49$，得知$\overline{AR}=7$



答：7

F.設 m，n 為正實數，橢圓 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 的焦點分別為 $F_1(0,2)$與 $F_2(0,-2)$。若此橢圓上有一點 P 使得ΔPF_1F_2 為一正三角形，則 $m=$_____，$n=$_____

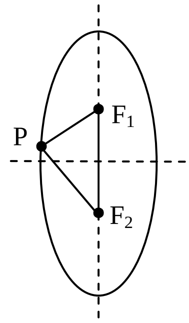
解：1.焦點分別為 $F_1(0,2)$與 $F_2(0,-2)$，得知為鉛直長軸的橢圓，如右圖

2.$\because \Delta PF_1F_2$ 為一正三角形

$\therefore \overline{PF_1}=\overline{PF_2}=\overline{F_1F_2}=4$，且$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=8=2\sqrt{n}$，得 $n=16$

3.由橢圓之關係式：$n=m+4$，得 $m=12$

答：$m=12$，$n=16$



G.坐標空間中，在六個平面 $x=\dfrac{14}{13}$，$x=\dfrac{1}{13}$，$y=1$，$y=-1$，$z=-1$ 及 $z=-4$ 所圍成的長方體上隨機選取兩個相異頂點。若每個頂點被選取的機率相同，則選到兩個頂點的距離大於 3 之機率為_____。(化成最簡分數)

解：1.根據題意，如右圖長方體 ABCD－EFGH

$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=1$，$\overline{DH}=3$

2.以點 A(0，0，0)坐標化

樣本空間 $n(S)=C_2^8=28$

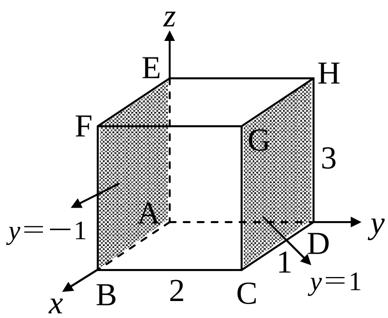
事件為：兩個頂點的距離大於 3 的線段有

$\overline{AG}$、$\overline{AF}$、$\overline{AH}$、$\overline{BE}$、$\overline{BG}$、$\overline{BH}$、

$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{CH}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DG}$等 12 種

則機率為 $\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$

答：$\dfrac{3}{7}$



參考公式及可能用到的數值

1.一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2.平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3.通過(x_1, y_1)，(x_2, y_2)的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$x_2\neq x_1$

4.首項為 a_1，公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

等比數列＜ar^{k-1}＞的前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$r\neq 1$

5.級數公式：$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6.三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

7.ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}=2R$，R 為$\Delta ABC$ 的外接圓半徑

ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

8.棣美弗定理：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，$n$ 為一正整數

9.算術平均數：$M(=\overline{X})=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

(樣本)標準差：$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-n\overline{X}^2\right)}$

10. 95%信心水準下的信賴區間：$\left[\ \hat{p}-2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ \right]$

11.參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$；$\sqrt{3}\approx 1.732$；$\sqrt{5}\approx 2.236$；$\sqrt{6}\approx 2.449$；$\pi\approx 3.142$

12.對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$