大學入學考試中心 100 學年度學科能力測驗數學科試題

第壹部分：選擇題(占 65 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 至 6 題，每題 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，劃記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1.有一箱子，內有 3 黑球與 2 白球。有一遊戲，從箱子中任取出一球。假設每一顆球被取出的機率都相同，若取出黑球可得獎金 50 元，而取出白球可得獎金 100 元，則下列哪一個選項是此遊戲的獎金期望值？

(1) 70 元 (2) 75 元 (3) 80 元 (4) 85 元 (5) 90 元

解：

事件	黑球	白球
數值	50	100
機率	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

期望值 $E(x)=50\times\frac{3}{5}+100\times\frac{2}{5}=70$

答：(1)

2.多項式 $4(x^2+1)+(x+1)^2(x-3)+(x-1)^3$ 等於下列哪一個選項？

(1) $x(x+1)^2$ (2) $2x(x-1)^2$ (3) $x(x-1)(x+1)$

(4) $2(x-1)^2(x+1)$ (5) $2x(x-1)(x+1)$

解 1：$4(x^2+1)+(x+1)^2(x-3)+(x-1)^3$

$=4(x^2+1)+[(x^2+1)+2x](x-3)+[(x^2+1)-2x](x-1)$

$=(x^2+1)[4+(x-3)+(x-1)]+[2x(x-3)-2x(x-1)]$

$=(x^2+1)(2x)+(-4x)=2x^3-2x=2x(x^2-1)=2x(x-1)(x+1)$

解 2：$4(x^2+1)+(x+1)^2(x-3)+(x-1)^3$

$=(4x^2+4)+(x^3-x^2-5x-3)+(x-1)^3=x^3-2x=2x(x^2-1)=2x(x-1)(x+1)$

答：(5)

3.設 $(a_{n+1})^2=\frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$，$n$ 為正整數，且知 a_n 皆為正。令 $b_n=\log a_n$，則數列 b_1，b_2，b_3，$\cdots$ 為(1)公差為正的等差數列 (2)公差為負的等差數列 (3)公比為正的等比數列 (4)公比為負的等比數列 (5)既非等差亦非等比數列

解 1：關係式 $(a_{n+1})^2=\frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$，兩邊取 log 得 $\log(a_{n+1})^2=\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log(a_n)^2$

$\therefore 2\log a_{n+1}=-\frac{1}{2}+2\log a_n$，$\Rightarrow 2b_{n+1}=-\frac{1}{2}+2b_n$

$\therefore b_{n+1}=-\frac{1}{4}+b_n$，得 $b_{n+1}-b_n=-\frac{1}{4}$，$\therefore \langle b_n \rangle$公差為負的等差數列

解 2：關係式 $(a_{n+1})^2=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$，$\therefore a_{n+1}=(10^{-\frac{1}{4}})a_n$

$\therefore a_2=(10^{-\frac{1}{4}})a_1$，$a_3=(10^{-\frac{1}{2}})a_1$，$a_4=(10^{-\frac{3}{4}})a_1$，$a_5=(10^{-1})a_1$，$\cdots$

得 $b_1=\log a_1$，$b_2=\log a_2=-\dfrac{1}{4}+\log a_1$，$b_3=\log a_3=-\dfrac{1}{2}+\log a_1$，

$b_4=\log a_4=-\dfrac{3}{4}+\log a_1$，$b_5=\log a_5=-1+\log a_1$，$\cdots$

$\Rightarrow$ 公差 $d=b_2-b_1=-\dfrac{1}{4}=b_3-b_2=b_4-b_3=\cdots$

答：(2)

4.坐標平面上滿足方程式 $(\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2})(\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2})=0$ 的點 $(x,\ y)$ 所構成的圖形為

(1)只有原點　(2)橢圓及原點　(3)兩條相異直線
(4)橢圓及雙曲線　(5)雙曲線及原點

解：$(\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2})(\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2})=0$，$\Rightarrow \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=0$ 或 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=0$

(i)當 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=0$，得 $x=y=0$

(ii)當 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=0$，得 $4x-3y=0$ 或 $4x+3y=0$，且相交於 $(x,\ y)=(0,\ 0)$

由(i)(ii)得知 $4x-3y=0$ 或 $4x+3y=0$

答：(3)

5.請問下面哪一個選項是正確的？

(1) $3^7<7^3$　(2) $5^{10}<10^5$　(3) $2^{100}<10^{30}$　(4) $\log_2 3=1.5$　(5) $\log_2 11<3.5$

解：(1) ╳× $3^7=3^6\cdot 3=9^3\cdot 3>7^3$

另解：$3^7=2187$，$7^3=343$，$\therefore 3^7>7^3$

另解：$7\log 3\approx 3.3397>3\log 7\approx 2.5353$

(2) $5^{10}=25^5>10^5$

另解：$10\cdot\log 5\approx 6.990>5\log 10=5$

(3) $2^{100}=(2^{10})^{10}=1024^{10}>(10^3)^{10}=1000^{10}$

另解：$100\cdot\log 2\approx 30.10>30\cdot\log 10=30$

(4) $1.5=\log_2 2^{1.5}=\log_2\sqrt{8}<\log_2 3$

另解：若 $\log_2 3=1.5$，則 $2^{1.5}=\sqrt{8}=3$(不合)

(5) $3.5=\log_2 2^{3.5}=\log_2\sqrt{128}>\log_2 11=\log_2\sqrt{121}$

另解：若 $\log_2 11<3.5$，則 $2^{3.5}=\sqrt{128}>11$ (合)

答：(5)

6.根據台灣壽險業的資料，男性從 0 歲、1 歲、…到 60 歲各年齡層的死亡率(單位：%)依序為 1.0250，0.2350，0.1520，0.1010，0.0720，0.0590，0.0550，0.0540，0.0540，0.0520，0.0490，0.0470，0.0490，0.0560，0.0759，0.1029，0.1394，0.1890，0.2034，0.2123，0.2164，0.2166，0.2137，0.2085，0.2019，0.1948，0.1882，0.1830，0.1799，0.1793，0.1813，0.1862，0.1941，0.2051，0.2190，0.2354，0.2539，0.2742，0.2961，0.3202，0.3472，0.3779，0.4129，0.4527，0.4962，0.5420，0.5886，0.6346，0.6791，0.7239，0.7711，0.8229，0.8817，0.9493，1.0268，1.1148，1.2139，1.3250，1.4485，1.5851，1.7353
經初步整理後，已知 61 個資料中共有 24 個資料小於 0.2。請問死亡率資料的中位數為下列哪一個選項？(1) 0.2034　(2) 0.2164　(3) 0.2137　(4) 0.2085　(5) 0.2019

解：依序由小至大排列，則中位數為第 31 個資料

∵24 個資料小於 0.2，

∴第 25 個以後之資料依序為 0.2019，0.2034，0.2051，0.2085，0.2123，0.2137，0.2164，0.2166，0.2190，……，則第 31 個資料為 0.2164

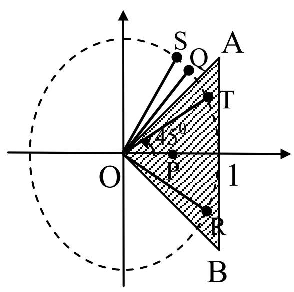
答：(2)

二、多選題(占 35 分)

說明：第 7 至 13 題，每題的 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

7.設 O、A、B 分別為複數平面上代表 0、$1+i$、以及 $1-i$ 的點。請問下列哪些選項所對應的點落在ΔOAB 的內部？

(1) $\cos 60°$　(2) $\cos 50°+\sin 50°$　(3) $\dfrac{4-3i}{5}$　(4) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$　(5) $(\cos 30°+i\sin 30°)^{25}$



解：(1) $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$，如圖 P($\dfrac{1}{2}$，0)

(2) $\cos 50°+\sin 50°$ 代表長度為 1，如圖 Q

(3) $\dfrac{4-3i}{5} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i = \cos(-37^0) + i\sin(-37^0)$，如圖 R

(4) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 60^0 + i\sin 60^0$，如圖 S

(5) $(\cos 30°+i\sin 30°)^{25} = \cos 750^0 + i\sin 750^0 = \cos 30^0 + i\sin 30^0$，如圖 T

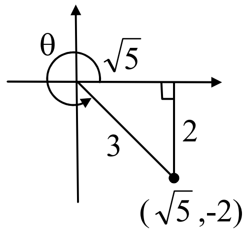
答：(1)(3)(5)

8.已知 $\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 且 $\cos\theta>0$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\tan\theta<0$　(2) $\tan^2\theta>\dfrac{4}{9}$　(3) $\sin^2\theta>\cos^2\theta$　(4) $\sin2\theta>0$

(5)標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在不同的象限

解：$\because\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 且 $\cos\theta>0$，$\therefore\theta$ 為第四象限角，如圖



(1) $\tan\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}<0$　(2) $\tan^2\theta=\dfrac{4}{5}>\dfrac{4}{9}$

(3) $\sin^2\theta=\dfrac{4}{9}<\dfrac{5}{9}=\cos^2\theta$　(4) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}<0$

(5) $\because\dfrac{7\pi}{4}<\theta<2\pi$，$\dfrac{7\pi}{2}<2\theta<4\pi$，$\therefore\theta$ 與 2θ 的終邊都在第四象限

另解：$\because\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{5}{9}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}>0$ 且由(4) $\sin2\theta<0$，$\therefore 2\theta$ 為第四象限角

答：(1)(2)

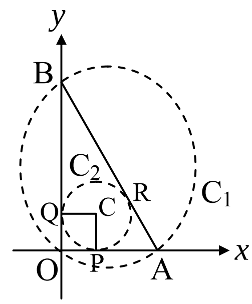
9.考慮坐標平面上以 O(0，0)、A(3，0)、B(0，4)為頂點的三角形，令 C_1、C_2 分別為 ΔOAB 的外接圓、內切圓。請問下列哪些選項是正確的？

(1) C_1 的半徑為 2　(2) C_1 的圓心在直線 $y=x$ 上

(3) C_1 的圓心在直線 $4x+3y=12$ 上　(4) C_2 的圓心在直線 $y=x$ 上

(5) C_2 的圓心在直線 $4x+3y=6$ 上

解：(1) $\because\angle AOB=90^0$，$\therefore C_1$ 是以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓

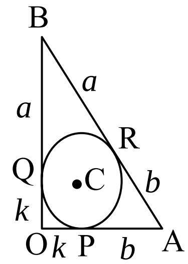


$\Rightarrow C_1$：$x(x-3)+y(y-4)=0$，即 $x^2+y^2-3x-4y=0$

知 C_1 的圓心為$(\dfrac{3}{2}，2)$，半徑為 $\dfrac{5}{2}$

(2) C_1 的圓心在直線 $\overline{AB}$：$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$，即 $4x+3y=12$

(3)如圖，設內切圓 C_2 的圓心 $C(k，k)$，且 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$ 為其切線，



$\therefore C_2$ 的圓心在 O(0，0)，$C(k，k)$連線之直線 $y=x$ 上

另解：如圖，設圓 C_2 的圓心 $C(k，k)$

$\therefore a+b=5$，$b+k=3$，$k+a=4$，得 $a=3$，$b=2$，$k=1$

$\therefore$圓心 C(1，1)在直線 $y=x$ 上

答：(3)(4)

10.坐標平面中，向量 $\overrightarrow{w}$ 與向量 $\overrightarrow{v}=(2，\sqrt{5})$ 互相垂直且等長。請問下列哪些選項是正確的？

(1)向量 $\overrightarrow{w}$ 必為$(\sqrt{5}，-2)$或$(-\sqrt{5}，2)$

(2)向量 $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ 與 $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$ 等長

(3)向量 $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 的夾角可能為 135°

(4)若向量 $\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{w}$，其中 a，b 為實數，則向量 $\overrightarrow{u}$ 的長度為 $\sqrt{a^2+b^2}$

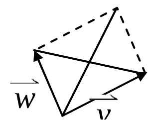
(5)若向量$(1，0)=c\overrightarrow{v}+d\overrightarrow{w}$，其中 c，d 為實數，則 $c>0$

解：(1)設$\overrightarrow{w}=(x, y)$，∴$(x, y)\cdot(2, \sqrt{5})=2x+\sqrt{5}y=0$，且$|\overrightarrow{w}|=\sqrt{x^2+y^2}=|\overrightarrow{v}|=3$

得知 $y=2, -2$，即$(x, y)=(-\sqrt{5}, 2)$或$(\sqrt{5}, -2)$

(2)$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=(2+\sqrt{5}, \sqrt{5}-2)$或$(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$與$\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$相同，

∴$|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}|=|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}|$



另解：$\overrightarrow{w}$與$\overrightarrow{v}$互相垂直且等長，如右圖$\overrightarrow{w}$與$\overrightarrow{v}$為正方形之兩邊

則$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$與$\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$為正方形之對角線，得知$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$與$\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$等長

(3)如右圖，$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$與$\overrightarrow{w}$的夾角為 45°

(4)∵$|\overrightarrow{u}|^2=|a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{w}|^2=a^2|\overrightarrow{v}|^2+2ab\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+b^2|\overrightarrow{w}|^2=9a^2+0+9b^2=9(a^2+b^2)$

∴$|\overrightarrow{u}|=3\sqrt{a^2+b^2}$

(5)∵$(1, 0)=c(2, \sqrt{5})+d(\sqrt{5}, -2)$或$(1, 0)=c(2, \sqrt{5})+d(-\sqrt{5}, 2)$

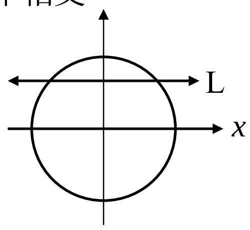
即$\begin{cases}1=2c+\sqrt{5}d\\0=\sqrt{5}c-2d\end{cases}$或$\begin{cases}1=2c-\sqrt{5}d\\0=\sqrt{5}c+2d\end{cases}$，皆得 $c=\dfrac{2}{9}>0$

答：(1)(2)(5)

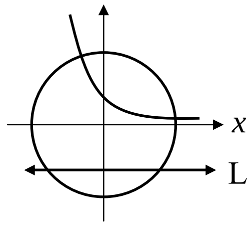
11.在坐標平面上，圓 C 的圓心在原點且半徑為 2，已知直線 L 與圓 C 相交，請問 L 與下列哪些圖形一定相交？

(1) x 軸　(2) $y=(\frac{1}{2})^x$　(3) $x^2+y^2=3$　(4) $(x-2)^2+y^2=16$　(5) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

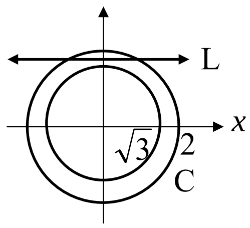
解：(1)不相交



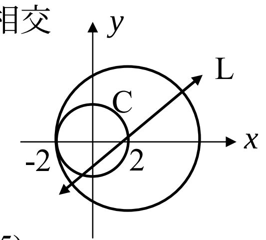
(2)不相交



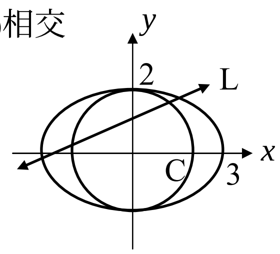
(3)不相交



(4)相交



(5)相交



答：(4)(5)

12.坐標空間中，考慮球面 S：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$ 與 A(1, 0, 0)、B(−1, 0, 0)兩點。請問下列哪些選項是正確的？

(1)原點在球面 S 上　(2) A 點在球面 S 之外部

(3)線段 $\overline{AB}$ 與球面 S 相交　(4) A 點為直線 AB 上距離球心最近的點

(5)球面 S 和 xy，yz，xz 平面分別截出的三個圓中，以與 xy 平面所截的圓面積為最大

解：(1)(0, 0, 0)代入 S：$(0-1)^2+(0-2)^2+(0-3)^2=14$，∴原點在球面 S 上

(2) A(1, 0, 0)代入 S：$(1-1)^2+(0-2)^2+(0-3)^2=13<14$，A 點在球面 S 之內部

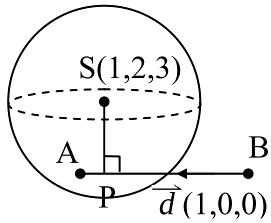
(3) B(−1, 0, 0)代入 S：$(-1-1)^2+(0-2)^2+(0-3)^2=17>14$，B 點在球面 S 之外部

∵A 點在球面 S 之內部，B 點在球面 S 之外部，∴$\overline{AB}$ 與球面 S 相交

另解：$\overline{AB}$：$\begin{cases} x=1-2t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$，$0\le t\le 1$，代入 S：$(1-2t-1)^2+(0-2)^2+(0-3)^2=14$，$t=\pm\dfrac{1}{2}$

∵$0\le t\le 1$，∴當 $t=\dfrac{1}{2}$ 時，$\overline{AB}$ 與球面 S 相交，交點為(0，0，0)

(4)如圖，設直線 AB 上一點 P($1-2t$，0，0)，$t\in R$



∵直線 AB 的一方向向量 $\overrightarrow{d}=(1，0，0)$

∴當最近的點時，$\overrightarrow{PS}\perp\overrightarrow{d}$，即$(2t，2，3)\cdot(1，0，0)=0$

得 $t=0$，∴P(1，0，0)即為 A 點

(5)球心 S(1，2，3)到 xy 平面(z＝0)之距離＝$\dfrac{|0+0+3-0|}{\sqrt{1}}=3$

球心 S(1，2，3)到 yz 平面(x＝0)之距離＝$\dfrac{|1+0+0-0|}{\sqrt{1}}=1$

球心 S(1，2，3)到 xz 平面(y＝0)之距離＝$\dfrac{|0+2+0-0|}{\sqrt{1}}=2$

∴球面 S 與 xy 平面所截的圓面積為最小(距離最遠)

答：(1)(3)(4)

13.設 $f(x)=x(x-1)(x+1)$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})>0$　(2) $f(x)=2$ 有整數解　(3) $f(x)=x^2+1$ 有實數解

(4) $f(x)=x$ 有不等於零的有理數解　(5)若 $f(a)=2$，則 $f(-a)=2$

解：(1) $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1)(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\dfrac{1}{2}-1)<0$

(2)若 $f(x)=2$，∴$x^3-x-2=0$，根據牛頓法知可能整數根為-2，-1，0，1，2

以 $x=-2$，-1，0，1，2 代入均不為 0，∴$f(x)=2$ 沒有整數解

(3)若 $f(x)=x^2+1$，得 $x^3-x^2-x-1=0$ 為 3 次(奇數次)方程式，則至少有一實數解

(4)若 $f(x)=x$，得 $x^3-2x=0$，解得 $x(x^2-2)=0$，∴$x=0$，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$

(5)若 $f(a)=2$，即 $a^3-a=2$，∴$f(-a)=(-a)^3-(-a)=-a^3+a=-2$

另解：∵$f(x)$為奇函數，∵$f(-a)=-f(a)=-2$

答：(3)

第貳部分：選填題(占 35 分)

說明：1.第 A 至 G 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(14－35)。
　　　2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.已知首項為 a、公比為 r 的無窮等比級數和等於 5；首項為 a、公比為 $3r$ 的無窮等比級數和等於 7，則首項為 a、公比為 $2r$ 的無窮等比級數和等於________。

解：根據題意 $\begin{cases} \dfrac{a}{1-r}=5 \\ \dfrac{a}{1-3r}=7 \end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{a}{5}}{1-r}=1 \\ \dfrac{\frac{a}{7}}{1-3r}=1 \end{cases}$

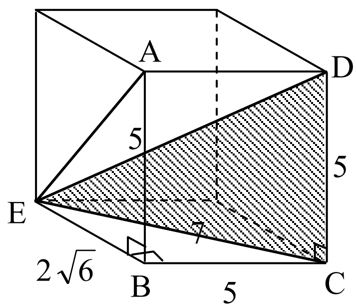
法 1：由和比公式 $1=\dfrac{\frac{a}{5}}{1-r}=\dfrac{\frac{a}{7}}{1-3r}=\dfrac{\frac{a}{5}+\frac{a}{7}}{(1-r)+(1-3r)}=\dfrac{\frac{12a}{35}}{2-4r}=\dfrac{\frac{6a}{35}}{1-2r}$，$\therefore \dfrac{a}{1-2r}=\dfrac{35}{6}$

法 2：$\because a=5(1-r)=7(1-3r)$，得 $r=\dfrac{1}{8}$，$a=\dfrac{35}{8}$，$\therefore \dfrac{a}{1-2r}=\dfrac{35}{6}$

答：$\dfrac{35}{6}$

B.空間中一長方體如下圖所示，其中 ABCD 為正方形，$\overline{BE}$ 為長方體的一邊。

已知 $\cot\angle AEB=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，則 $\cot\angle CED=$________。



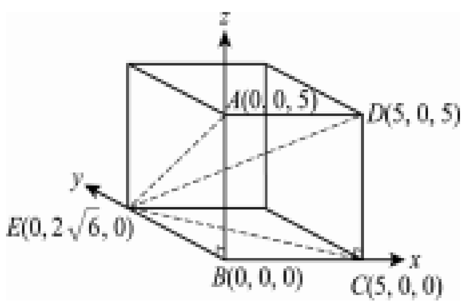
解 1：(1)$\because \cot\angle AEB=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，

$\therefore$在ΔAEB 中，設 $\overline{AB}=5$，$\overline{BE}=2\sqrt{6}$，$\Rightarrow \overline{BC}=5=\overline{CD}$

(2)在ΔBCE 中，$\overline{CE}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{6})^2}=7$

在ΔCDE 中，$\cot\angle CED=\dfrac{7}{5}$

解 2：建立空間坐標系，如圖：



設 B(0, 0, 0)，C(5, 0, 0)，

D(5, 0, 5)，E(0, $2\sqrt{6}$, 0)

$\overrightarrow{EC}=(5, -2\sqrt{6}, 0)$，$\overrightarrow{ED}=(5, -2\sqrt{6}, 5)$

$\because \cos\angle CED=\dfrac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{ED}|}=\dfrac{49}{7\cdot\sqrt{74}}=\dfrac{7}{\sqrt{74}}$

得 $\cot\angle CED=\dfrac{7}{5}$

答：$\dfrac{7}{5}$

C.高三甲班共有 20 位男生、15 位女生，需推派 3 位同學參加某項全校性活動。班會中大家決定用抽籤的方式決定參加人選。若每個人中籤的機率相等，則推派的三位同學中有男也有女的機率為________。

解 1：樣本空間：$n(\mathrm{S})=n$(20 男，15 女推派 3 位)$=C_3^{35}=\dfrac{35\times34\times33}{3!}=35\times17\times11$

事件 A：三位同學中有男也有女＝2 男 1 女＋1 男 2 女

$n(\mathrm{A})=C_2^{20}\,C_1^{15}+C_1^{20}\,C_2^{15}=(\dfrac{20\times19}{2!}\times15)+(20\times\dfrac{15\times14}{2!})=10\times15\times33$

$\therefore$機率 $\mathrm{P(A)}=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{10\times15\times33}{35\times17\times11}=\dfrac{90}{119}$

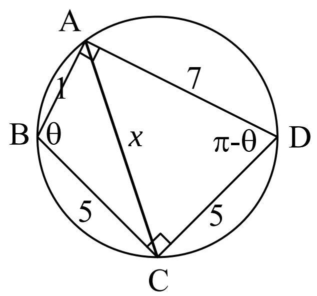
解 2：承上解 1

機率 P(A)＝1－P(三位同學均為男生)－P(三位同學均為女生)

$=1-\dfrac{C_3^{20}}{C_3^{35}}-\dfrac{C_3^{15}}{C_3^{35}}=1-\dfrac{1140}{35\times17\times11}-\dfrac{485}{35\times17\times11}=\dfrac{90}{119}$

答：$\dfrac{90}{119}$

D.四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=7$，且$\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{BCD}=90^0$，則對角線 $\overline{AC}$ 長為________。



解：(1)$\because\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{BCD}=90^0$，則四邊形 ABCD 有一外接圓

即以 B，D 為直徑兩端點的外接圓

(2)設$\angle\mathrm{ABC}=\theta$，則$\angle\mathrm{ADC}=\pi-\theta$，令 $\overline{AC}=x$

在ΔABC 中，$\cos\theta=\dfrac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5}$

在ΔADC 中，$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{7^2+5^2-x^2}{2\cdot7\cdot5}=-\cos\theta$

$\Rightarrow\dfrac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5}=-\dfrac{7^2+5^2-x^2}{2\cdot7\cdot5}$，解得 $x=\sqrt{32}=\overline{AC}$

答：$\sqrt{32}$

E.一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A、B、C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原來質量的$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1}{4}$倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別____、____、____公克。

解：設目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別為 x 公克，y 公克，z 公克

則 A、B、C 物質原有(一年前)之質量分別為 $4x$ 公克，$9y$ 公克，$16z$ 公克

	A	B	C	輻射強度
原有(一年前)	$4x$	$9y$	$16z$	$4x+2(9y)+16z=66$
半年後	$2x$	$3y$	$4z$	$2x+2(3y)+4z=22$
一年後(目前)	x	y	z	$x+2(y)+z=8$

$$\begin{cases}4x+18y+16z=66\\2x+6y+4z=22\\x+2y+z=8\end{cases}，解得\begin{cases}x=4\\y=1\\z=2\end{cases}$$

答：4 公克、1 公克、2 公克

F.設 E_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (其中 $a>0$)為焦點在(3，0)，(−3，0)的橢圓；E_2：焦點在(3，0)且準線為 $x=-3$ 的拋物線。已知 E_1，E_2 的交點在直線 $x=3$ 上，則 $a=$________。

解：(1)由橢圓 E_1 得知 $c=3$，關係式 $a^2=b^2+9$，$a>3$

拋物線 E_2：$y^2=4\cdot3x=12x$

(2)解交點 $\begin{cases}E_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\E_2:y^2=12x\end{cases}$，$x=3$ 代入 E_2 得 $y=\pm6$，即交點為(3，6)，(3，－6)

$\therefore\begin{cases}\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{36}{b^2}=1\\a^2=b^2+9\end{cases}$，$\Rightarrow 9(a^2-9)+36a^2=a^2(a^2-9)$，$\Rightarrow a^2=27\pm18\sqrt{2}$

$a=\sqrt{27\pm18\sqrt{2}}=\sqrt{27\pm2\sqrt{162}}=\sqrt{18}\pm\sqrt{9}=3\sqrt{2}\pm3$，取 $a=3+3\sqrt{2}$ ($\because a>3$)

答：$3+3\sqrt{2}$

G. H：$x-y+z=2$ 為坐標空間中一平面，L 為平面 H 上的一直線。已知點 P(2，1，1)為 L 上距離原點 O 最近的點，則(2，____，____)為 L 的方向向量。

答：(2，－1，－3)

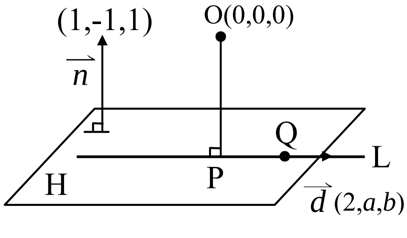
解：(1)設 L 的方向向量為 $\overrightarrow{d}(2，a，b)$，平面 H 的法向量為 $\overrightarrow{n}(1，-1，1)$

$\because \overrightarrow{d}\perp\overrightarrow{n}$，$\therefore(2，a，b)\cdot(1，-1，1)=0$，得 $a-b=2$

(2)$\because$P 為 L 上距離原點 O 最近的點，$\therefore \overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{d}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{d}=(2，1，1)\cdot(2，a，b)=0$，得 $a+b=-4$

(3)解 $\begin{cases}a-b=2\\a+b=-4\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=-1\\b=-3\end{cases}$，$\therefore\overrightarrow{d}(2，-1，-3)$



另解：

(1)設 L 的方向向量為 $\overrightarrow{d}(2，a，b)$，$\therefore$L：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{a}=\dfrac{z-1}{b}$

則 L 上任意點 $P'(x，y，z)=P'(2t+2，at+1，bt+1)$，$t\in R$

$\Rightarrow\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{d}=(2t+2，at+1，bt+1)\cdot(2，a，b)=0$，得 $2(2t+2)+a(at+1)+b(bt+1)=0$

又當 $t=0$ 時最短(點 P′為 P)，代入，得知 $a+b=-4$

(2)由 P(2，1，1)$+\overrightarrow{d}(2，a，b)=Q(4，a+1，b+1)$

$\because Q\in L\in H$，$\therefore$Q 代入 H，即 $4-(a+1)+(b+1)=2$，得 $a-b=2$

(3)解$\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=-4 \end{cases}$，得$\begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases}$，$\therefore \overrightarrow{d}$(2，－1，－3)

參考公式及可能用到的數值

1.一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2.平面上兩點 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3.通過$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$x_2\neq x_1$

4.首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$r\neq 1$

5.三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

6.ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

7.棣美弗定理：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，$n$ 為一正整數

8.算術平均數：$M(=\overline{X})=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

(樣本)標準差：$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\right)-n\overline{X}^2\right)}$

9.參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$；$\sqrt{3}\approx 1.732$；$\sqrt{5}\approx 2.236$；$\sqrt{6}\approx 2.449$；$\pi\approx 3.142$

10.對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$