大學入學考試中心 110 學年度學科能力測驗試題 數學考科

第壹部分：選擇題(占 65 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1.設 A＝$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$。若 $A^4=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項？

(1) 158　(2) 162　(3) 166　(4) 170　(5) 174

解：$A^2=AA=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{bmatrix}$，$\therefore A^4=A^2A^2=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 80\\ 0 & 81\end{bmatrix}$

$\therefore a=1$，$b=80$，$c=0$，$d=81$，$\Rightarrow a+b+c+d=1+80+0+81=162$

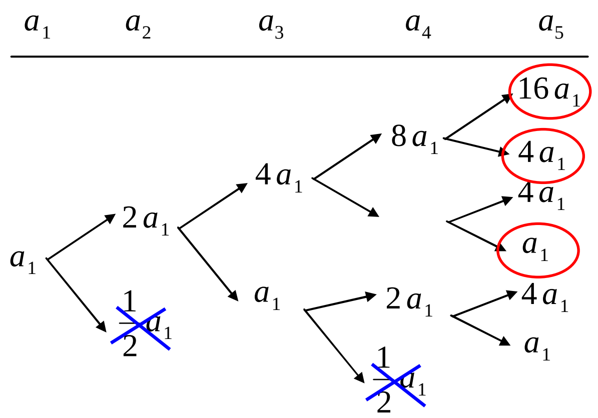
答：(2)

出處：第四冊，ch3 矩陣(矩陣乘積定義)

2.五項實數數列 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1=\log_{10}36$，則 a_5 有多少種可能的值？(1) 3　(2) 4　(3) 5　(4) 7　(5) 8

解：若 $a_1=2a_2$，$\therefore a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\log_{10}36=\log_{10}\sqrt{36}=\log_{10}6<1$，不合

若 $2a_1=a_2$，列數狀圖如下：

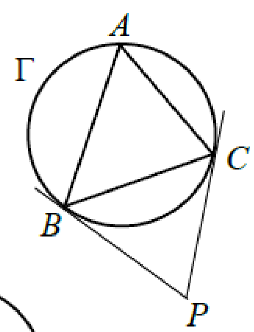


得知 a_5 可能是 a_1，$4a_1$，$16a_1$

答：(1)

出處：第二冊，ch1 數列與級數(數列的意義，對數的定義與運算性質，樹狀圖等)

3.如圖，ΔABC 為銳角三角形，P 為ΔABC 外接圓 Γ 外的一點，且 $\overline{PB}$ 與 $\overline{PC}$ 都與圓 Γ 相切。設∠BPC＝θ，試問 cos A 的值為下列哪一個選項？

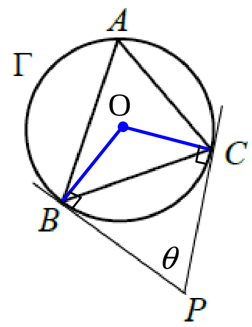


(1) $\cos 2\theta$　(2) $\frac{\sin\theta}{2}$　(3) $\sin\frac{\theta}{2}$　(4) $\frac{\cos\theta}{2}$　(5) $\cos\frac{\theta}{2}$

解：設圓 Γ 的圓心為 O，連接 $\overline{OB}$，$\overline{OC}$，∵B，C 為切點，$\therefore \overline{OB}\perp\overline{PB}$，$\overline{OC}\perp\overline{PC}$

在四邊形 OBPC 中，∠BPC＝θ，∴∠BOC＝180°－θ

⇒圓周角∠A＝$\frac{1}{2}(180°-\theta)=90°-\frac{1}{2}\theta$，∴cos A＝$\cos(90°-\frac{1}{2}\theta)=\sin\frac{\theta}{2}$



答：(3)

出處：第三冊，ch1 三角(三角函數的運算公式)

4.設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 都是平面上不為零的向量。若 $2\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}+2\vec{b}$ 所張成的三角形面積為 6，則 $3\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}+3\vec{b}$ 所張成的三角形面積為為下列哪一個選項？

(1) 8　(2) 9　(3) 12　(4) 13.5　(5) 16

解：$\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{a}+2\vec{b}\end{vmatrix}\right|=12$，得知 $\left|\begin{vmatrix}\vec{b}\\ \vec{a}\end{vmatrix}\right|=4$

$\begin{vmatrix}3\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{a}+3\vec{b}\end{vmatrix}\times(-3)=\begin{vmatrix}3\vec{a}+\vec{b}\\ -8\vec{a}\end{vmatrix}=(-8)\begin{vmatrix}3\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{a}\end{vmatrix}\times(-3)=(-8)\begin{vmatrix}\vec{b}\\ \vec{a}\end{vmatrix}=32$，$\left|\frac{1}{2}(-8)\begin{vmatrix}\vec{b}\\ \vec{a}\end{vmatrix}\right|=16$

另解：設 $\vec{a}=(a_1，a_2)$，$\vec{b}=(b_1，b_2)$

$\therefore 2\vec{a}+\vec{b}=(2a_1+b_1，2a_2+b_2)$，$\vec{a}+2\vec{b}=(a_1+2b_1，a_2+2b_2)$

⇒三角形面積$=\frac{1}{2}\times\left|\begin{vmatrix}2a_1+b_1 & 2a_2+b_2\\ a_1+2b_1 & a_2+2b_2\end{vmatrix}\right|=6$，∴得知 $\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|=4$

所求三角形面積$=\frac{1}{2}\times\left|\begin{vmatrix}3a_1+b_1 & 3a_2+b_2\\ a_1+3b_1 & a_2+3b_2\end{vmatrix}\times(-3)\right|=\frac{1}{2}\times\left|\begin{vmatrix}3a_1+b_1 & 3a_2+b_2\\ -8a_1 & -8a_2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\times\left|8\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|=16$

另解：$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$，面積$=6=3\times2$，∴所求 $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=8$，面積$=8\times2=16$

答：(5)

出處：第三冊，ch3 平面向量(利用行列式計算三角形面積)

5.設 $f(x)$為實係數三次多項式函數，滿足$(x+1)f(x)$除以 x^3+2 的餘式為 $x+2$。若 $f(0)=4$，則 $f(2)$的值為下列哪一個選項？ (1) 8　(2) 10　(3) 15　(4) 18　(5) 20

解：$\deg f(x)=3$，$\therefore \deg(x+1)f(x)=4$，設$(x+1)f(x)=(x^3+2)(ax+b)+(x+2)$

$x=0$ 時，$(0+1)\times f(0)=(0+2)(0+b)+(0+2)=4$，$\therefore b=1$

$x=-1$ 時，$(-1+1)\times f(-1)=(-1+2)(-a+b)+(-1+2)$，$\therefore 0=-a+b+1$，$\therefore a=2$

$\Rightarrow(x+1)f(x)=(x^3+2)(ax+b)+(x+2)=(x^3+2)(2x+1)+(x+2)$

將 $x=2$ 代入，$3f(2)=10\times5+4=54$，$\therefore f(2)=18$

答：(4)

出處：第一冊，ch2 多項式函數(多項式的運算)

6.坐標平面上有一邊長為 3 的正六邊形 ABCDEF，其中 A(3，0)，D(－3，0)，試問橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 與正六邊形 ABCDEF 有多少個交點？(1) 0　(2) 2　(3) 4　(4) 6　(5) 8

解：橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 的中心為 O(0，0)，且 $a=4$，$b=\sqrt{7}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=3$，如右圖

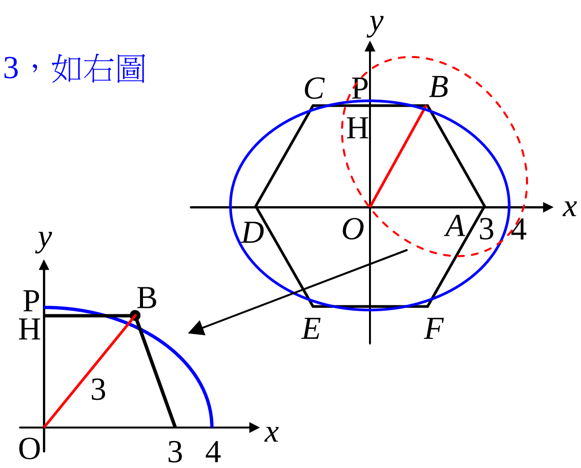
正六邊形 ABCDEF 的頂點 A，D 分別為橢圓的焦點，B$(\frac{3}{2}，\frac{3\sqrt{3}}{2})$

且 $\overline{BA}+\overline{BD}=3+3\sqrt{3}\approx8.2>2a=8$，即 B 點在橢圓的外部

$\overline{OH}=\frac{3\sqrt{3}}{2}<\overline{OP}=b=\sqrt{7}=\frac{\sqrt{28}}{2}$，即 H 點在橢圓的內部

⇒如右圖，上半橢圓與正六邊形 ABCDEF 交於 4 個點，

∴橢圓與正六邊形 ABCDEF 交於 4×2＝8 個點



答：(5)

出處：第四冊，ch4 二次曲線(橢圓方程式)

二、多選題(占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7.心理學家找了 1 0 0 0 位受試者進行暗室實驗，每位受試者都要觀看及辨識 6、8、9 三張數字卡，發現將實際數字看成某個數字的機率如下表：

看成數字 / 實際數字	6	8	9	其他
6	0.4	0.3	0.2	0.1
8	0.3	0.4	0.1	0.2
9	0.2	0.2	0.5	0.1

例如：實際數字 6 被看成 6、8、9 的機率分別為 0.4、0.3、0.2，而被看成其他數字的機率是 0.1。根據上述實驗結果，試選出正確的選項。

(1)如果實際數字是 8，則至少有一半的可能性會被看成是 8

(2)如果實際數字是 6，則有六成的可能性會被看成不是 6

(3)在 6、8、9 三數字中，被誤認的可能性以 9 最低

(4)如果被看成的數字是 6，則實際上就是 6 的可能性不到一半

(5)如果被看成的數字是 9，則實際上就是 9 的可能性超過 $\frac{2}{3}$

解：(1)X：實際數字是 8 被看成是 8 的機率＝0.4，所以可能性不到一半

(2)O：實際數字是 6 被看成不是 6 的機率＝0.3＋0.2＋0.1＝0.6，所以有六成的可能性

(3)O：數字 6 被誤認的機率＝1－0.4＝0.6

數字 8 被誤認的機率＝1－0.4＝0.6

數字 9 被誤認的機率＝1－0.5＝0.5，⇒得知數字 9 被誤認的機率最低

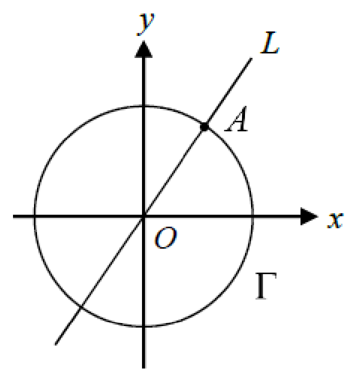
(4)O：P(實際數字 6|被看成數字 6)＝$\frac{P(\text{被看成數字6且實際數字6})}{P(\text{被看成數字6})}=\frac{0.4}{0.4+0.3+0.2}=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$

(5)X：P(實際數字 9|被看成數字 9)＝$\frac{P(\text{被看成數字9且實際數字9})}{P(\text{被看成數字9})}=\frac{0.5}{0.2+0.1+0.5}=\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$

答：(2)(3)(4)

出處：第二冊，ch3 機率(條件機率)

8.如圖，L 為坐標平面上通過原點 O 的直線，Γ 是以 O 為圓心的圓，且 L 與 Γ 有一個交點 A(3，4)。已知 B，C 為 Γ 上的相異兩點滿足 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$。試選出正確的選項。



(1) L 與 Γ 的另一個交點為(－4，－3)

(2)直線 BC 的斜率為 $\frac{3}{4}$

(3) $\angle AOC=60°$

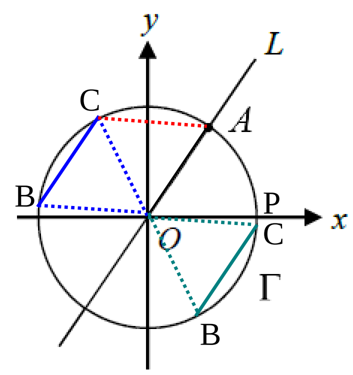
(4)ΔABC 的面積為 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

(5) B 與 C 在同一象限內

解：(1)X：另一個交點為 A 點關於原點 O 的對稱點，坐標為(－3，－4)

(2)X：因 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$，直線 BC 的斜率＝直線 OA 的斜率＝$\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$

(3)O：如圖，作 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$，連接 OC，OB，AC，四邊形 OACB 為平行四邊形



∵ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$，且 $\overline{OA}=\overline{BC}=\overline{OB}=\overline{OC}=|\overrightarrow{OA}|=5$

∴ΔOAC，ΔOBC 皆為正三角形，⇒$\angle AOC=60°$

(4)X：ΔABC 的面積＝$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin 120°=\frac{25\sqrt{3}}{4}$

(5) O：直線 L 與 x 軸正向的銳夾角$\angle AOP=\tan\theta=\frac{4}{3}$，∵$\tan 45°=1<\frac{4}{3}<\sqrt{3}=\tan 60°$

∴$45°<\theta<60°$，∴B 與 C 可能在第二或四象限內，即 B 與 C 在同一象限內

答：(3)(5)

出處：第三冊，ch3 平面向量(向量概念)

9.某村的村長選舉設有兩個投票所。已知兩位候選人在各投票所得到的有效票數比例如下表(廢票不列入計算)：

	甲候選人	乙候選人
第一投票所	40%	60%
第二投票所	55%	45%

假設第一投票所與第二投票所的有效票數分別為 x 與 y (其中 $x>0$，$y>0$)，且以總得票數較高者為當選人。根據上述表格，試選出正確的選項。

(1)當有效票數的總和 $x+y$ 已知時，就可決定當選人

(2)當 $x:y$ 的比值小於 $\frac{1}{2}$ 時，就可決定當選人

(3)當 $x>y$ 時，就可決定當選人

(4)當甲候選人在第一投票所的有效票數比在第二投票所的有效票數多時，就可決定當選人

(5)當乙候選人在第二投票所的有效票數比在第一投票所的有效票數多時，就可決定當選人

解：(1)X：以總得票數較高者為當選人，因此

若甲當選時，則 $0.4x+0.55y>0.6x+0.45y$，$\Rightarrow 0.2x<0.1y$，$\Rightarrow \frac{x}{y}<\frac{1}{2}$

若乙當選時，則 $0.4x+0.55y<0.6x+0.45y$，$\Rightarrow 0.2x>0.1y$，$\Rightarrow \frac{x}{y}>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$當有效票數的總和 $x+y$ 已知時，$\frac{x}{y}$ 無法確定，故無法決定當選人

(2)O：當 $x:y$ 的比值小於 $\frac{1}{2}$ 時，即 $\frac{x}{y}<\frac{1}{2}$，$\Rightarrow$甲當選

(3)O：當 $x>y$ 時，$\Rightarrow \frac{x}{y}>1>\frac{1}{2}$，$\Rightarrow$乙當選

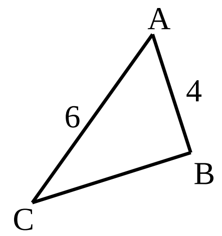
(4)O：即當 $0.4x>0.55y$ 時，$\frac{x}{y}>\frac{0.55}{0.4}=\frac{11}{8}>\frac{1}{2}$，$\Rightarrow$乙當選

(5)X：即當 $0.45y>0.6x$ 時，$\frac{x}{y}<\frac{0.45}{0.6}=\frac{3}{4}$，則無法確定 $\frac{x}{y}$ 與 $\frac{1}{2}$ 的大小關係，，故無法決定當選人

答：(2)(3)(4)

出處：第二冊，ch4 數據分析(圖表解讀，數據分析)

10.在ΔABC 中，已經知道 $\overline{AB}=4$ 和 $\overline{AC}=6$，此時尚不足以確定ΔABC 的形狀與大小。但是，只要再知道某些條件(例如：再知道 $\overline{BC}$ 的長度)，就可確定ΔABC 唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。



(1)如果再知道 cos A 的值，就可確定ΔABC 唯一的形狀與大小

(2)如果再知道 cos B 的值，就可確定ΔABC 唯一的形狀與大小

(3)如果再知道 cos C 的值，就可確定ΔABC 唯一的形狀與大小

(4)如果再知道ΔABC 的面積，就可確定ΔABC 唯一的形狀與大小

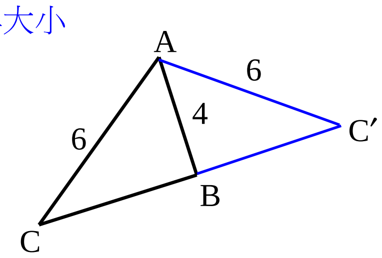
(5)如果再知道ΔABC 的外接圓半徑，就可確定ΔABC 唯一的形狀與大小

解：(1)O：知道 cos A 的值，就可知道∠A，如右圖，根據 SAS 條件，可唯一確定ΔABC 的形狀與大小

(2)O：根據正弦定理 $\frac{6}{\sin B}=\frac{4}{\sin C}$，$\therefore \sin C=\frac{2}{3}\sin B<1$(知道 cos B 的值，cos B≤ 1)，$\Rightarrow$∠C 為銳角

$\Rightarrow$可以確定 $\overline{BC}$ 或形成一個三角形，(根據 SSS 條件)可唯一確定ΔABC 的形狀與大小

(3)X：根據正弦定理 $\frac{6}{\sin B}=\frac{4}{\sin C}$，$\therefore \sin B=\frac{3}{2}\sin C$，且 $\overline{AC}>\overline{AB}$，得知∠B>∠C



當知道 cos C 的值時，∠B 可能為銳角或鈍角(此兩角互補，SSA 為相似三角形)

$\Rightarrow$如右圖，無法確定△ABC 的形狀與大小

(4)X：知道ΔABC 的面積，利用公式面積 $\Delta=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin A$，$\therefore \sin A=\frac{\Delta}{12}$

$\Rightarrow$∠A 可能為銳角或鈍角(此兩角互補)。故無法確定△ABC 的形狀與大小

(5)X：知道ΔABC 的外接圓半徑 R，根據正弦定理 $\dfrac{6}{\sin B}=\dfrac{4}{\sin C}=2R$，得知∠B＞∠C，$\sin B=\dfrac{3}{R}$

⇒∠B 可能為銳角或鈍角(此兩角互補)。故無法確定△ABC 的形狀與大小

答：(1)(2)

出處：第三冊，ch1 三角(三角函數值，正弦定理)

11.平面上有一梯形 ABCD，其上底 $\overline{AB}=10$、下底 $\overline{CD}=15$，且腰長 $\overline{AD}=\overline{BC}+1$。試選出正確的選項。

(1)∠A＞∠B (2) ∠B＋∠D＜180° (3) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$ (4) $\overline{BC}$ 的長度可能是 2 (5) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}<30$

解：設 $\overline{BC}=x$，∴ $\overline{AD}=x+1$，梯形可能如右所示

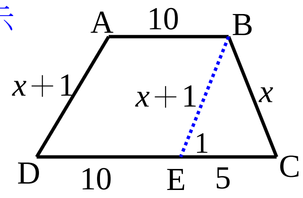


圖 1

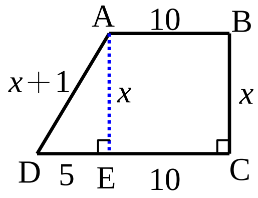


圖 2

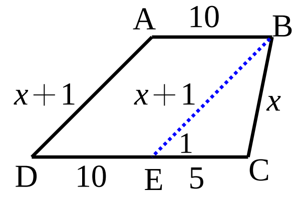


圖 3

(1)右圖 2 中∠C＞∠D，

右圖 1，3，在ΔBCE 中

∵ $\overline{BE}>\overline{BC}$，∴∠C＞∠1＝∠D

又∠A＋∠D＝180°＝∠B＋∠C，且∠C＞∠D，⇒∠A＞∠B

(2)O：∵180°＝∠A＋∠D＞∠B＋∠D，即∠B＋∠D＜180°

(3)X：在圖 1，∠ABC 為鈍角，∴ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$

但在圖 2，∠ABC 為直角，∴ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$；在圖 3，∠ABC 為銳角 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$

(4)X：在ΔBCE 中，$x+(x+1)>5$(兩邊和大於第三邊)，∴$x>2$，即 $\overline{BC}>2$

(5)X：在圖 2，因∠BCD＝90°，∴ $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

圖 1，3，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overline{CB}\times\overline{CD}\times\cos C=(x)(15)\left(\dfrac{5^2+x^2-(x+1)^2}{2\times5\times x}\right)=36-3x<36-3\times2=30$ (∵$x>2$)

答：(1)(2)(5)

出處：第三冊，ch3 平面向量(向量內積)

12.設表示事件 X 發生的機率，而 P(X｜Y)表示在事件 Y 發生的條件下，事件 X 發生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。設事件 A 為 2 顆黑球相鄰的事件，事件 B 為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件 C 為任 2 顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。

(1)P(A)＞P(B) (2)P(C)＝$\dfrac{2}{7}$ (3) 2P(C｜A)＋5 P(C｜B)＜2 (4) P(C｜A)＞0.2 (5) P(C｜B)＞0.3

解：(1)X：樣本空間個數 n(S：黑黑白白紅紅紅排列)＝$\dfrac{7!}{2!\times2!\times3!}=210$

n(A：$\boxed{\text{黑黑}}$白白紅紅紅排列)＝$\dfrac{6!}{1!\times2!\times3!}=60$，⇒ P(A)＝$\dfrac{60}{210}=\dfrac{2}{7}$

n(B：白白紅紅紅排列，6 個空隙排入黑黑)＝$\dfrac{5!}{2!\times3!}\times P_2^6\times\dfrac{1}{2!}$(黑黑相同物)＝10×15＝150，⇒ P(B)＝$\dfrac{150}{210}=\dfrac{5}{7}$

或 P(B)＝1－P(A)＝$\dfrac{5}{7}$，得知 P(A)＜P(B)

(2)O：n(C：黑黑白白排列，5 個空隙排入紅紅紅)＝$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times P_3^5\times\dfrac{1}{3!}$紅紅紅相同物)＝6×10＝60，⇒ P(C)＝$\dfrac{60}{210}=\dfrac{2}{7}$

(3)X：n(A∩C：$\boxed{\text{黑黑}}$白白排列，4 個空隙排入紅紅紅)＝$\dfrac{3!}{1!\times2!}\times P_3^4\times\dfrac{1}{3!}$紅紅紅相同物)＝3x4＝12

n(B∩C)＝n(A′∩C)＝n(C)－n(A∩C)＝60－12＝48

⇒2P(C｜A)＋5 P(C｜B)＝$2\times\dfrac{n(A\cap C)}{n(A)}+5\times\dfrac{n(B\cap C)}{n(B)}=2\times\dfrac{12}{60}+5\times\dfrac{48}{150}=2$

(4)X： P(C｜A)＝$\dfrac{n(A\cap C)}{n(A)}=\dfrac{12}{60}=0.2$

(5)O：P(C|B)＝$\dfrac{n(B\cap C)}{n(B)}$＝$\dfrac{48}{150}$＝0.32＞0.3

答：(2)(5)

出處：第二冊，ch3 機率(機率，條件機率)

13.設多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中 a，b，c 均為有理數。試選出正確的選項。

(1)函數 $y=f(x)$與拋物線 $y=x^2+100$ 的圖形可能沒有交點

(2)若 $f(0)f(1)<0<f(0)f(2)$，則方程式 $f(x)=0$ 必有三個相異實根

(3)若 $1+3i$ 是方程式 $f(x)=0$ 的複數根，則方程式 $f(x)=0$ 有一個有理根

(4)存在有理數 a，b，c 使得 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$依序形成等差數列

(5)存在有理數 a，b，c 使得 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$依序形成等比數列

解：(1)X：即 $x^3+ax^2+bx+c=x^2+100$，$\Rightarrow x^3+(a-1)x^2+bx+(c-100)=0$

$\Rightarrow$根據三次(奇數)方程式至少一實根，所以兩圖形至少有一個交點

(2)O：$f(0)f(1)<0$，由勘根定理知方程式 $f(x)=0$ 在 0 與 1 之間有一個實數根

$f(0)f(1)<0<f(0)f(2)$，表示 $f(1)f(2)<0$，知方程式 $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間有一個實數根

根據實係數多項方程式虛根成對定理，第三根必為實數根，$\Rightarrow$方程式 $f(x)=0$ 必有三個相異實根

(3)O：$1+3i$ 是方程式 $f(x)=0$ 的複數根，$\Rightarrow 1-3i$ 也是方程式 $f(x)=0$ 的複數根

$\Rightarrow[x-(1+3)][x-(1-3i)]=x^2-2x+10$ 是 $f(x)$的因式

$\Rightarrow\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+c=(x^2-2x+10)(x+\dfrac{c}{10})=0$ 時，有一個有理根為 $x=-\dfrac{c}{10}$

(4)X：$f(1)=a+b+c+1$，$f(2)=4a+2b+c+8$，$f(3)=9a+3b+c+27$，$f(4)=16a+4b+c+64$

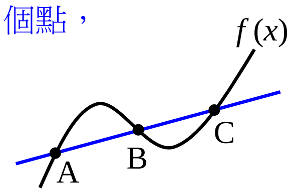
$\Rightarrow f(2)-f(1)=3a+b+7$，$f(3)-f(2)=5a+b+19$，$f(4)-f(3)=7a+b+37$

$\Rightarrow\begin{cases}f(2)-f(1)=f(3)-f(2)\\f(2)-f(1)=f(4)-f(3)\end{cases}$，$\begin{cases}3a+b+7=5a+b+19\\3a+b+7=7a+b+37\end{cases}$，$\begin{cases}2a+12=0\\4a+30=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=-6\\a=-\dfrac{15}{2}\end{cases}$(不合)，故不成等差數列

另解：若 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$成等差數列，則$(1，f(1))$，$(2，f(2))$，$(3，f(3))$，$(4，f(4))$必在一直線上

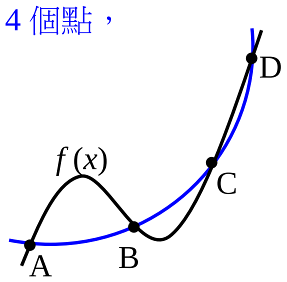
但是，$\because \deg f(x)=3$，與一次函數(等差數列視為斜率為公差的直線)不可能交於 4 個點，

故不成等差數列，如右圖所示



(5)O：$\because \deg f(x)=3$，與指數函數(視等比數列為指數型式)可能交於 4 個點，

故可能形成等比數列，如右圖所示



例 1：公比 $r=-1$ 時，$f(2)=-f(1)$，$f(3)=f(1)$，$f(4)=-f(1)$

解聯立方程式，求得 $f(x)=-\dfrac{15}{2}x^3+17x^2-\dfrac{45}{4}x$

例 2：公比 $r=2$，$f(1)=6$，$f(2)=12$，$f(3)=24$，$f(4)=48$

解聯立方程式，求得 $f(x)=x^3-3x^2+8x$

答：(2)(3)(5)

出處：第一冊，ch2 多項式函數(勘根定理，虛根成雙定理，代數基本定理)

第貳部分：選填題(占 35 分)

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14－32)。 2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.某機器貓從數線上原點位置朝數線的正向移動，其移動方式如下：以 8 秒為一週期，每一週期先以每秒 4 單位長等速度移動 6 秒，再休息 2 秒。如此繼續下去，則此機器貓在開始移動後__⑭⑮__秒會抵達數線上坐標為 116 的位置。

解：(1)每一週期移動 4 單位×6＝24 單位，∴116＝24×4＋20，即共移動 4 週期又 20 單位

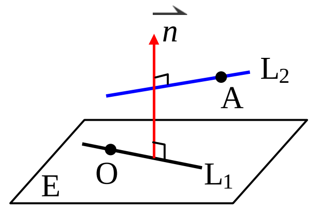
(2)時間共花 4×8 秒＋$\dfrac{20}{4}$秒＝32＋5＝37 秒

答：37

出處：第一冊，ch1 數與式(數線上的幾何)

B.坐標空間中有兩條直線 L_1，L_2 與一平面 E，其中直線 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-5}$，而 L_2 的參數式為$\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=1+3t \end{cases}$ (t 為實數)。

若 L_1 落在平面 E 上，且 L_2 與 E 不相交，則 E 的方程式為 $x-$__⑯__$y+$__⑰__$z=$__⑱__



解：1.直線 L_1 通過點 O(0，0，0)，方向向量 $\overrightarrow{d_1}=(2，-3，-5)$

直線 L_2 通過點 A(1，1，1)，方向向量 $\overrightarrow{d_2}=(0，2，3)$

2.設平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}$，⇒ $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{d_1}$，$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{d_2}$，∴ $\overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2})$，如圖

又 $\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=(\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}，\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix})=(1，-6，4)$，⇒取 $\overrightarrow{n}=(1，-6，4)$

3.根據點法式，平面 E：$1\times(x-0)-6\times(y-0)+4\times(z-0)=0$，得 E：$x-6y+4z=0$

答：$x-6y+4z=0$

出處：第四冊，ch2 空間中的平面與直線(空間中直線，平面方程式，向量外積)

C.從 1，2，3，4，5，6，7，8，9 這九個數中任意取出三個相異的數，每數被取出的機率皆相等，則三數乘積是一完全平方數的機率為 $\dfrac{⑲}{⑳㉑}$ 。(化成最簡分數)

解：1.樣本空間 n(S：任意取出三個相異數)＝C_3^9＝84

2.三數乘積最小值＝1×2×3＝6，最大值＝7×8×9＝504

而在 6 與 504 之間的完全平方數有 3^2，4^2，……，22^2，其中三數乘積如下表：

完全平方數	$4^2=16$	$6^2=36$	$8^2=64$	$12^2=144$	合計
三數乘積	1×2×8	1×4×9＝2×3×6	2×4×8	2×8×9＝3×6×8	6 個

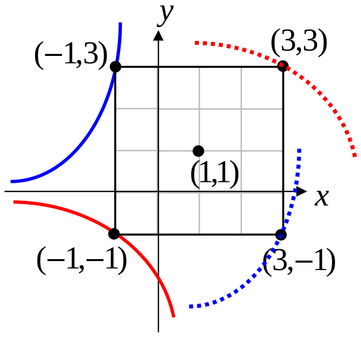
∴事件 n(A：三數乘積是一完全平方數)＝6

⇒機率＝$\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{6}{84}=\dfrac{1}{14}$

答：$\dfrac{1}{14}$

出處：第二冊，ch3 機率(古典機率定義)

D.在坐標平面上，Γ是邊長為 4 的正方形，其中心位在點(1，1)，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y=a\times 2^x$ 的圖形與Γ相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍 ㉒㉓ $\le a\le$ ㉔



解：如右圖，正方形Γ的四個頂點為(3，3)，(－1，3)，(－1，－1)，(3，－1)

當 $y=a\times 2^x$ 通過(－1，3)時，代入 $3=a\times\frac{1}{2}$，得 $a=6$

當 $y=a\times 2^x$ 通過(3，－1)時，代入 $-1=a\times 8$，得 $a=-\frac{1}{8}$

當 $y=a\times 2^x$ 通過(－1，－1)時，代入 $-1=a\times\frac{1}{2}$，得 $a=-2$

當 $y=a\times 2^x$ 通過(3，3)時，代入 $3=a\times 8$，得 $a=\frac{3}{8}$

⇒得知 $-2\le a\le 6$

答：$-2\le a\le 6$

出處：第一冊，ch3 指數、對數函數(指數函數的性質)

E.將 $(\sqrt[3]{49})^{100}$ 寫成科學記號 $(\sqrt[3]{49})^{100}=a\times 10^n$，其中 $1\le a<10$，且 n 為整數。若 a 的整數部分為 m，則數對$(m，n)=($ ㉕ ， ㉖㉗ $)$

解：∵ $(\sqrt[3]{49})^{100}=(7^{\frac{2}{3}})^{100}=7^{\frac{200}{3}}$

∴取 log，⇒$\log 7^{\frac{200}{3}}=\frac{200}{3}\log 7\approx\frac{200}{3}\times 0.8451=56.34=56+0.34$，得知首數＝56，尾數＝0.34

(1)首數＝56，得 $n=56$

(2)∵$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，得 $\log 2<$尾數$=0.34<\log 3$，即尾數$=0.34\approx\log 2.\cdots$，⇒ $m=2$

即 $\log 7^{\frac{200}{3}}\approx 56+0.34=\log 10^{56}+\log 2.\cdots=\log(2.\cdots\times 10^{56})$，∴$a\times 10^n=2.\cdots\times 10^{56}$

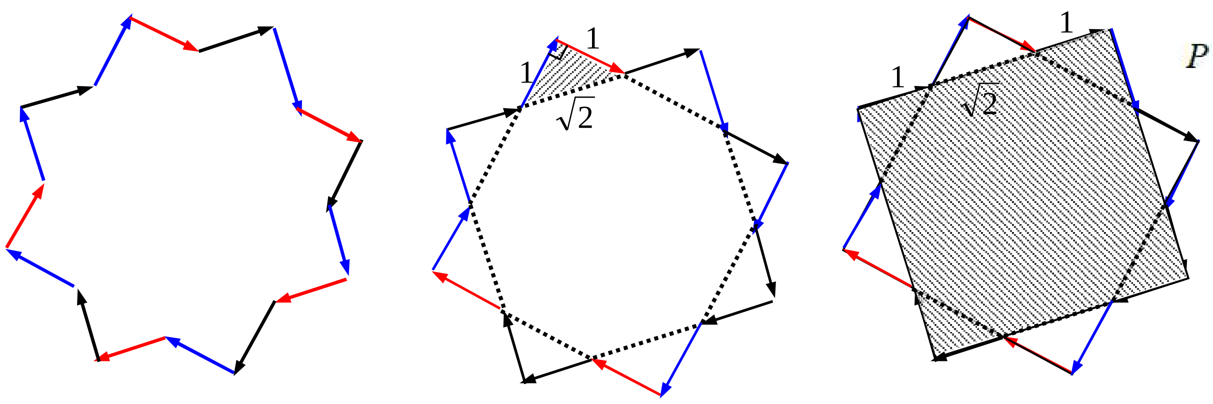
⇒數對$(m，n)=(2，56)$

答：(2，56)

出處：第一冊，ch3 指數、對數函數(科學記號，對數函數的首數與尾數)

F.如圖，機器人在地面上從一點 P 出發，按照以下規則移動：先朝某方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45°；朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90°；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45°；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90°，……，以此類推。已知機器人移動的路徑會形成一個封閉區域，則此封閉區域的面積為 ㉘＋ ㉙$\sqrt{㉚}$ 平方公尺(化成最簡根式)

解：



封閉區域的面積＝(邊長為 $2+\sqrt{2}$ 的斜線區域正方形面積)＋(4 個腰長為 1 的等腰直角三角形面積)

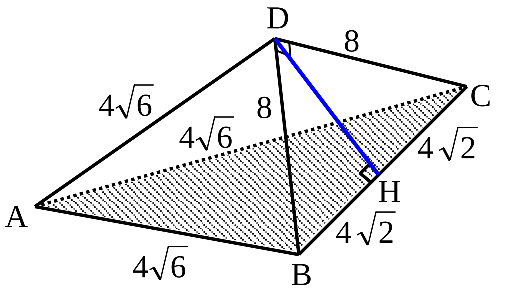
$=(2+\sqrt{2})^2+4(\frac{1}{2}\times 1\times 1)=8+4\sqrt{2}$

答：$8+4\sqrt{2}$

出處：第三冊，ch1 三角(廣義角，極坐標)

G.在四面體 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4\sqrt{6}$、$\overline{BD}=\overline{CD}=8$，且 $\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$，則點 D 到平面 ABC 的距離

為 ㉛$\sqrt{㉜}$ (化成最簡根式)



解：如右圖

(1)在ΔBAC 中，根據餘弦定理

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\angle BAC$

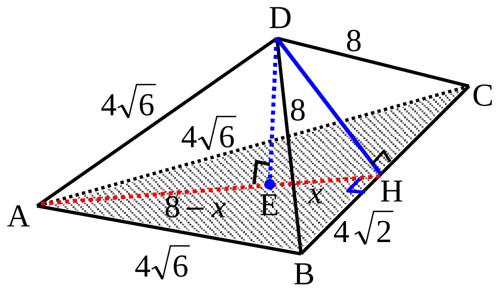
$=(4\sqrt{6})^2+(4\sqrt{6})^2-2\times4\sqrt{6}\times4\sqrt{6}\times\frac{1}{3}=128$

$\therefore\overline{BC}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

(2)在ΔBCD 中，$\overline{BD}=\overline{CD}=8$，$\overline{BC}=8\sqrt{2}$，∴ΔBCD 為直角三角形

(3)作 $\overline{DH}\perp\overline{BC}$ 於 H，$\therefore\overline{BH}=\overline{CH}=4\sqrt{2}$

⇒點 D 到平面 ABC 的距離$=\overline{DH}=\sqrt{8^2-(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{2}$



另解：如右圖

(1)在ΔBAC 中，根據餘弦定理

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\angle BAC$

$=(4\sqrt{6})^2+(4\sqrt{6})^2-2\times4\sqrt{6}\times4\sqrt{6}\times\frac{1}{3}=128$，$\therefore\overline{BC}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

(2)作 $\overline{DH}\perp\overline{BC}$ 於 H，∴∴ $\overline{BH}=4\sqrt{2}$

(3)連接 $\overline{AH}$，$\therefore\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 於 H，且 $\overline{AH}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-(4\sqrt{2})^2}=8$

並作 $\overline{DE}\perp\overline{AH}$ 於 E，則 $\overline{DE}$ 為點 D 到平面 ABC 的距離

(4)令 $\overline{EH}=x$，$\therefore\overline{AE}=8-x$

在ΔADE 中，$\overline{DE}^2=(4\sqrt{6})^2-(8-x)^2$

在ΔHDE 中，$\overline{DE}^2=(4\sqrt{2})^2-x^2$

$\Rightarrow(4\sqrt{6})^2-(8-x)^2=(4\sqrt{2})^2-x^2$，得知 $x=0$，$\overline{DE}=4\sqrt{2}$，故點 D 到平面 ABC 的距離$=4\sqrt{2}$

答：$4\sqrt{2}$

出處：第四冊，ch1 空間向量(直線與平面距離)