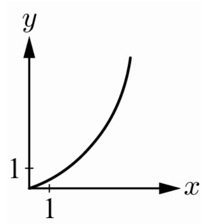
大學入學考試中心 112 學年度學科能力測驗試題 數學 B 考科

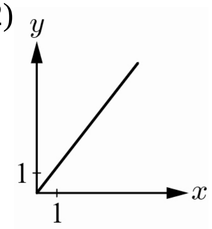
第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

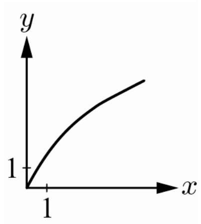
一、單選題(占 35 分)

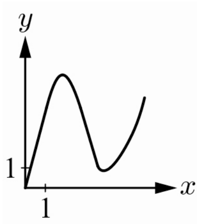
說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

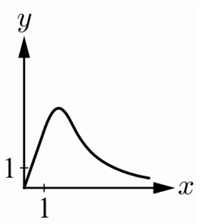
1.某抽水站發現其用電量(單位：度)與抽水馬達轉速(單位：rpm)的三次方成正比。根據上述，試問下列這五個圖中，哪一個最可以描述此抽水站的用電量 y (度)與抽水馬達轉速 x (rpm)的對應關係？

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


解：根據題意，電量 y 與轉速 x 的三次方成正比，即設 $y=kx^3$，其中 $k>0$

答：(1)

出處：第一冊，多項式函數

2.考慮實數二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，若 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$，則 $c-2b$ 的值為何？

(1) -11　(2) -4　(3) 1　(4) 10　(5) 11

解：由原式得知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{-2}\right)\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -9 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & \frac{7}{2} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a=-9$，$b=\frac{7}{2}$，$c=3$，$d=2$，所求 $c-2b=3-2(\frac{7}{2})=-4$

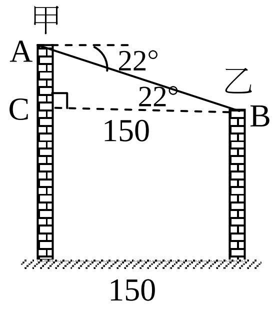
另解：$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & -2d \\ a & -2b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$，得知 $c=3$，$2b=7$，所求 $c-2b=-4$

答：(2)

出處：第四冊， 矩陣

3.地面上有甲、乙兩大樓，已知甲的高度大於乙，且甲、乙兩大樓的水平距離為 150 公尺。某人從甲樓頂拉一條繩索到乙樓頂，並從甲樓頂測得乙樓頂的俯角為 22°。假設該繩索被拉成直線，試問繩索的長度(單位：公尺)最接近下列哪個選項？(註：眼睛往下看目標物時，視線與水平線間的夾角稱為俯角)

(1) 150　(2) 150sin22°　(3) 150sin22°　(4) $\frac{150}{\cos 22^0}$　(5) $\frac{150}{\sin 22^0}$



解：根據題意，作簡圖如右，設繩索的長度(甲乙距離)為 x 公尺

在△ABC 中，$\cos 22°=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{150}{x}$，$\Rightarrow x=\frac{150}{\cos 22^0}$

答：(4)

出處：第二冊，三角

4.某校期中考試有 29 名考生，且成績均相異，統計後得到位於第 25、第 50、第 75 與第 95 百分位數的考生成績分別為 41、60、74 與 92 分。後來發現成績有誤需要調整分數，成績較高的前 15 名學生的分數應該要各加 5 分，其餘學生成績不變。假設調整後第 25、第 50、第 75 與第 95 百分位數的考生成績分別為 a、b、c 與 d 分，則數組(a，b，c，d)為下列哪個選項？

(1) (41，60，74，92)　(2) (41，60，74，97)　(3) (41，65，79，97)　(4) (46，65，79，92)　(5) (46，65，79，97)

解：1.設原始成績(由小至大)為數列$\langle a_n\rangle$，$n=1$，2，⋯，29

P_{25}：29×0.25＝7.25，$\Rightarrow a_8=41$　　P_{50}：29×0.5＝14.5，$\Rightarrow a_{15}=60$

P_{75}：29×0.75＝21.75，$\Rightarrow a_{22}=74$　　P_{90}：29×0.95＝27.55，$\Rightarrow a_{28}=92$

2.調整後成績：成績較高的前 15 名(即a_{15}，a_{16}，…，a_{29})學生要各加 5 分

P_{25}：$a_8=41=a$　P_{50}：$a_{15}=60+5=65=b$　P_{75}：$a_{22}=74+5=79=c$　P_{90}：$a_{28}=92+5=97=d$

$\Rightarrow$數組(a，b，c，d)＝(41，65，79，97)

答：(3)

出處：第二冊，數據分析

5.袋子裡有編號分別為 1，2，⋯，100 的 100 顆球，某甲從袋中隨機抽取一球，每顆球被抽到的機率均相等。試問在下列哪個選項的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率最大？

(1)某甲抽到球的號碼是奇數　(2)某甲抽到球的號碼是質數　(3)某甲抽到球的號碼是 7 的倍數
(4)某甲抽到球的號碼不是 5 的倍數　(5)某甲抽到球的號碼小於 10

解：(1)號碼是奇數共有 50 顆球，甲抽到 7 號球的條件機率＝$\frac{1}{50}$

(2) 1，2，⋯，100 號碼中是質數共有 25 顆球，甲抽到 7 號球的條件機率＝$\frac{1}{25}$

(3)號碼是 7 的倍數有(高斯符號)$\left[\frac{100}{7}\right]=14$ 顆球，甲抽到球的號碼是 7 的倍數的條件機率＝$\frac{1}{14}$

(4)號碼不是 5 的倍數共有 $100-\left[\frac{100}{5}\right]=80$ 顆球，甲抽到球的號碼不是 5 的倍數

(5)號碼小於 10 共有 9 顆球，甲抽到球的號碼小於 10 的條件機率＝$\frac{1}{9}$

$\Rightarrow$(5)的條件機率最大

答：(5)

出處：第四冊，條件機率與貝氏定理

6.某甲計算多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 除以 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的餘式，其中 a、b、c、d 為實數，且 $a\neq 0$。他誤看成 $g(x)$除以 $f(x)$，計算後得出餘式為 $-3x-17$。假設 $f(x)$除以 $g(x)$正確的餘式等於 px^2+qx+r，則 p 的值會等於下列哪個選項？ (1)－3　(2)－1　(3) 0　(4) 2　(5) 3

解：1.誤看成 $g(x)$除以 $f(x)$，$\Rightarrow g(x)=ax^3+bx^2+cx+d=af(x)+(-3x-17)$

得知 $f(x)=\frac{1}{a}[g(x)+(3x+17)]=\frac{1}{a}g(x)+(\frac{3}{a}x+\frac{17}{a})$

$\Rightarrow$餘式 $px^2+qx+r=\frac{3}{a}x+\frac{17}{a}$，$\Rightarrow p=0$

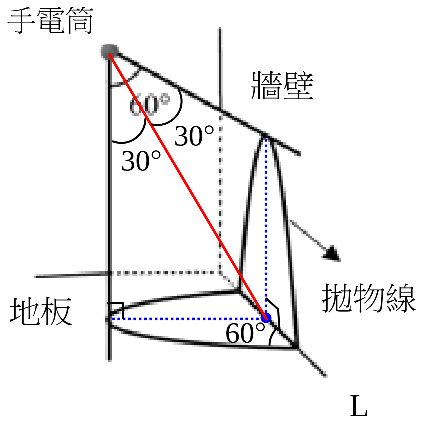
另解：$\because \deg f(x)=3$，$\deg g(x)=3$，$\Rightarrow f(x)$除以 $g(x)$的餘式至多為一次式，$\Rightarrow$二次式係數 $p=0$

答：(3)

出處：第一冊，多項式函數

7.已知某手電筒照射的光線為直圓錐狀，且光發散的夾角為 60°，如圖所示。設牆壁與地板垂直且交界處為直線 L，將此手電筒以垂直於 L 的方向照射，即此直圓錐的軸與 L 垂直。若手電筒照射在牆壁上的光線邊緣為拋物線的一部份，則在地板上的光線邊緣為下列哪種圖形的一部份？

(1)兩相交直線　(2)圓形　(3)拋物線　(4)長短軸不相等的橢圓　(5)雙曲線



解：如右圖，母線與軸心夾角為 30°

$\Rightarrow$地板與軸心夾角為 60°，得知地板與軸心夾角 60°＞母線與軸心的夾角 30°

$\Rightarrow$在地板上的光線邊緣圖形為長短軸不相等的橢圓

答：(4)

出處：第四冊，空間的幾何概念

二、多選題(占 25 分)

說明：第 8 題至第 12 題，每題 5 分。

8.某電子看板持續不斷的輪流播放 A、B 兩段廣告(A、B、A、B，⋯)，每個廣告播放時間皆為 T 分鐘(其中 T 為整數)。某甲經過時剛好開始播放 A 廣告，30 分鐘後，某甲回到該處，看到恰好開始播放 B 廣告。試選出可能是 T 值的選項

(1) 15　(2) 10　(3) 8　(4) 6　(5) 5

解：根據題意，設播放(A、B)、(A、B)，(A、B)，A、B⋯ 有 k 次的 A，$k=1$，3，5，7，⋯

$\Rightarrow T=\frac{30}{1}$，$\frac{30}{3}$，$\frac{30}{5}$，$\frac{30}{7}$，$\frac{30}{9}$，$\frac{30}{11}$，$\frac{30}{13}$，$\frac{30}{15}$，$\frac{30}{17}$，…，$\Rightarrow$得知整數 $T=30$，10，6，2

答：(2)(3)

出處：第二冊，數列與級數

9.已知 $a=6$、$b=\frac{20}{3}$、$c=2\sqrt{10}$ 和 d，且 d 為有理數，將這四個數標註在數線上，即 $A(a)$、$B(b)$、$C(c)$和 $D(d)$。試選出正確的選項。

(1) $a+b+c+d$ 必為一個有理數　(2) $abcd$ 必為一個無理數　(3)點 D 有可能與點 C 的距離等於 $2\sqrt{10}+6$

(4)點 A 和點 B 的中點位在點 C 的右邊　(5)數線上和點 B 距離小於 8 的所有點中，正整數有 14 個，負整數有 1 個

解：(1) a，b，d 皆為有理數，$c=2\sqrt{10}$ 為無理數，$\Rightarrow a+b+c+d$ 為一個無理數

(2)因 d 為有理數，當 $d=0$ 時，$abcd=0$ 為一個有理數

(3)點 D 有可能與點 C 的距離$=|d-c|=|d-2\sqrt{10}|=2\sqrt{10}+6$，求得 $d=-6$ 或 $4\sqrt{10}+6$(不合，無理數)

$\Rightarrow$當 $d=-6$ 時，點 D 有可能與點 C 的距離等於 $2\sqrt{10}+6$

(4)點 A 和點 B 的中點為 $\dfrac{6+\frac{20}{3}}{2}=\frac{19}{3}=\sqrt{\frac{361}{9}}>2\sqrt{10}=\sqrt{40}$，$\Rightarrow$中點位在點 C 的右邊

(5)設數線上和點 B 距離小於 8 的點為 x，$\Rightarrow|x-b|=|x-\frac{20}{3}|<8$，$\Rightarrow -8<x-\frac{20}{3}<8$，

$\Rightarrow -\frac{4}{3}<x<\frac{44}{3}$，得知整數 x 有 -1，0，1，…，14，即正整數有 14 個，負整數有 1 個

答：(3)(4)(5)

出處：第一冊， 數與式

10.某機構在 12 點時將兩種不同的營養劑分別投入培養皿甲與培養皿乙中，此時甲、乙的細菌數量分別為 X、Y。已知甲的數量每 3 小時成長為原來的 2 倍，例如 15 點時甲的數量為 $2X$。乙的數量每 2 小時成長為原來的 2 倍，例如 14 點時乙的數量為 $2Y$、16 點時乙的數量為 $4Y$，測量所得結果部分記錄於下表。該機構在 18 點時測量發現甲、乙的數量相同，欲以細菌數量隨時間呈指數成長的模型來預估甲、乙 12 點至 24 點的細菌數量。根據上述，試選出正確的選項。

時刻（點）	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
甲數量	X			$2X$									
乙數量	Y		$2Y$		$4Y$								

(1) $X>$Y　　(2)在 13 點時，甲的數量為 $\frac{4}{3}X$　　(3)在 15 點時，乙的數量為 $3Y$

(4)在 19 點時，乙的數量為甲的 1.5 倍　　(5)在 24 點時，乙的數量為甲的 2 倍

解：根據題意，列表如下

時刻（點）	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
甲數量	X			$2X$			$4X$			$8X$			$16X$
乙數量	Y		$2Y$		$4Y$		$8Y$		$16Y$		$32Y$		$64Y$

(1)在 18 點時測量發現甲、乙的數量相同，⇒$4X=8Y$，∴$X=2Y$，得知 $X=2Y>$Y

(2)根據題意，甲的數量每 3 小時成長為原來的 2 倍，⇒設甲的數量＝原有量$\times 2^{\frac{時間}{3}}$＝X$\times 2^{\frac{時間}{3}}$

⇒在 13 點時，經過時間為 1 小時，故甲的數量＝X$\times 2^{\frac{1}{3}}\neq\frac{4}{3}X$

(3)根據題意，乙的數量每 2 小時成長為原來的 2 倍，⇒設乙的數量＝原有量$\times 2^{\frac{時間}{2}}$＝Y$\times 2^{\frac{時間}{2}}$

在 15 點時，經過時間為 3 小時，故乙的數量＝Y$\times 2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$ Y$\neq 3Y$

(4)在 19 點時，從 18 點起經過時間為 1 小時，$\frac{乙的數量}{甲的數量}=\frac{8Y\times 2^{\frac{1}{2}}}{4X\times 2^{\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}\neq 1.5$

(5)在 24 點時，$\frac{乙的數量}{甲的數量}=\frac{64Y}{16X}=\frac{8Y\cdot 8}{4X\cdot 4}=\frac{8}{4}=2$，⇒乙的數量為甲的 2 倍

答：(1)(5)

出處：第三冊，按比例成長模型

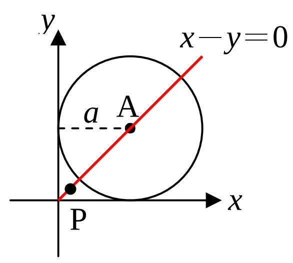
11.坐標平面上有一圓，其圓心為 $A(a，b)$，且此圓與兩坐標軸皆相切，另有一點 $P(c，c)$，其中 $a>c>0$，且已知 $\overline{PA}=a+c$，試選出正確的選項。

(1) $a=b$　　(2)點 P 位於直線 $x+y=0$ 上　　(3)點 P 在此圓內　　(4) $\frac{a+c}{a-c}=\sqrt{2}$　　(5) $\frac{a}{c}=2+3\sqrt{2}$

解：(1)因圓心為 $A(a，b)$，且此圓與兩坐標軸皆相切，⇒半徑＝$|a|=|b|$，∴$a=b$ 或 $a=-b$

得知圓心 A(a，a)或 A(a，$-a$)，其中 $a>0$，⇒半徑＝a，即圓在第一象限，如右圖，⇒故 $a=b$

(2)(3)因 $\overline{PA}=a+c>a$＝半徑，⇒點 P 位於**直線 $x-y=0$** 上，且點 P 在此**圓外**



(4) $\overline{PA}=\sqrt{(a-c)^2+(b-c)^2}=\sqrt{(a-c)^2+(a-c)^2}$ (∵$a=b$)$=\sqrt{2(a-c)^2}$

⇒$a+c=\sqrt{2(a-c)^2}=\sqrt{2}\,|a-c|=\sqrt{2}\,(a-c)$ (∵$a>c$)，得 $\frac{a+c}{a-c}=\sqrt{2}$

(5)令 $\frac{a}{c}=x>0$，由(4)知 $\sqrt{2}=\frac{a+c}{a-c}=\frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{a}{c}-1}=\frac{x+1}{x-1}$，⇒x$=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$

答：(1)(4)

出處：第一冊，　直線與圓

12.在球心為 O 的球形地球儀上，有 A、B、C、D、E 五個點，其中 A、B、C 三點都在赤道上，且經度分別為東經 0°、60°和 90°；D、E 兩點都在北緯 30°線上，且經度分別為東經 0°、180°。試選出正確的選項。

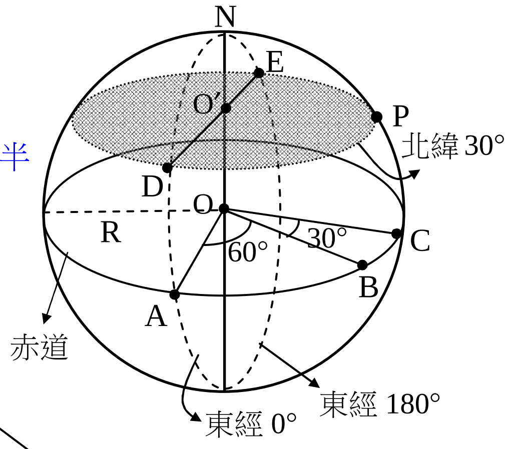
(1)赤道的長度等於東經 0°和 180°這兩條經線長度的總和

(2)北緯 45°線的長度等於赤道長度的 $\frac{1}{2}$

(3)「由 A 沿赤道移動到 B 的最短路徑長」等於「由 D 沿東經 0°經線移動到北極點的路徑長」

(4)「由 D 沿北緯 30°線移動到 E 的路徑長」等於「由 D 沿東經 0°經線移動到北極點，再由北極點沿東經 180°經線移動到 E 的路徑長的總和」

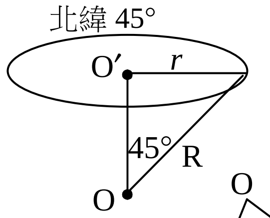
(5)通過北極點與 A 點的直線與通過北極點與 C 點的直線互相垂直



解：根據題意，作示意圖如右

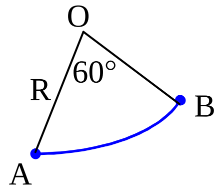
(1)赤道的長度為大圓的圓周長，所以東經 0°與 180°的弧長都是大圓弧長的一半

因此這兩條經線長度的總和＝赤道的長度＝圓周長



(2)如右圖，設赤道長度為 R，北緯 45°線的半徑為 r

$\Rightarrow \cos45° = \frac{r}{R}$，得 $r = R\cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}R$

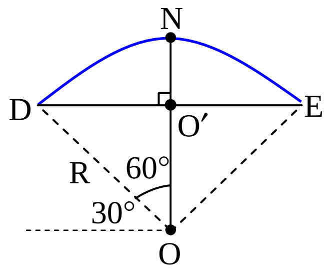


(3)由 A 沿赤道移動到 B(∠AOB＝60°)的最短路徑長 $\overset{\frown}{AB}$

$= 2\pi R \times \frac{60^0}{360^0} = \frac{\pi R}{3}$

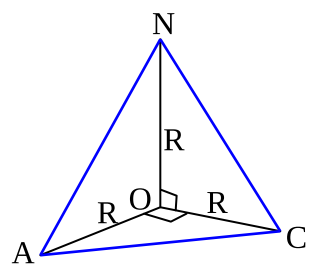
由 D 沿東經 0°經線移動到北極點的路徑長(∠DOA＝30°，∠DON＝60°)

$= \overset{\frown}{DN} = 2\pi R \times \frac{60^0}{360^0} = \frac{\pi R}{3}$



(4)北緯 30°線半徑＝R×sin60°＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$R，$\overset{\frown}{DNE}$＝半圓周長＝$\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi R$

由 D 沿北緯 30°線移動到 E (∠DPE＝120°＝$\frac{2\pi}{3}$)的路徑長＝$\overset{\frown}{DPE} = \frac{\sqrt{3}}{2}R \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi R \neq \frac{\sqrt{3}}{2}\pi R$



(5)如右圖，因 $\overline{OA} \perp \overline{ON}$，$\overline{OC} \perp \overline{ON}$，$\overline{OA} \perp \overline{OC}$

$\Rightarrow \overline{AN} = \overline{AC} = \overline{NC} = \sqrt{2}R$，⇒△ACN 為正△，$\overline{AN}$ 與 $\overline{NC}$ 不會垂直

另解：坐標化，取 A(R，0，0)，C(0，R，0)，N(0，0，R)

$\Rightarrow \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NC} = (R, 0, -R) \cdot (0, R, -R) = R^2 \neq 0$，⇒ $\overline{AN}$ 與 $\overline{NC}$ 不會垂直

答：(1)(3)

出處：第四冊，空間的幾何概念

三、選填題(占 25 分)

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13.有兩個正實數 a、b，已知 $ab^2 = 10^5$，$a^2b = 10^3$，則 $\log b = \frac{\text{13-1}}{\text{13-2}}$ (化為最簡分數)

解：$\begin{cases} ab^2 = 10^5 \cdots ① \\ a^2b = 10^3 \cdots ② \end{cases}$ ①×②：$a^3b^3 = 10^8$，$\Rightarrow ab = 10^{\frac{8}{3}} \ldots ③$

$\frac{①}{②} \Rightarrow b = \frac{10^5}{10^{\frac{8}{3}}} = 10^{\frac{7}{3}}$，得 $\log b = \log 10^{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3}$

答：$\frac{7}{3}$

出處：第三冊，按比例成長模型

14.從 1 到 20 的 20 個整數中，取出相異的 3 個數 a、b、c，使其成為等差數列，且 $a<b<c$，則(a，b，c)的取法有 14-1 14-2 種

解：a、b、c 為等差數列，$\Rightarrow 2b=a+c$，且 $a<b<c$

$\Rightarrow$ b 為偶數，即 $a+c$ 為偶數，$\Rightarrow a$、c 同取偶數或奇數，又 1 到 20 的整數中，有 10 個偶數，10 個奇數

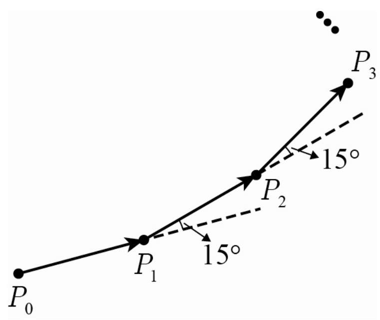
(i) a、c 同取偶數有 $C_2^{10}=45$　　(ii) a、c 同取奇數有 $C_2^{10}=45$

$\Rightarrow$(i)，(ii)皆使 b 為整數，且 $a<b<c$，故(a，b，c)的取法有 $45+45=90$ 種

答：90

出處：第三冊，按比例成長模型

15.如圖所示，平面上有一點 P_0 先朝某方向前進 2 個單位長到達點 P_1 後，依前進方向左轉 15 度；朝新方向前進 2 個單位長到達點 P_2 後，然後再依前進方向左轉 15 度；再朝新方向前進 2 個單位長到達點 P_3 後，…依此類推。則向量 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 與 $\overrightarrow{P_5P_6}$ 的內積為 16-1 $\sqrt{\text{16-2}}$ (化為最簡根式)



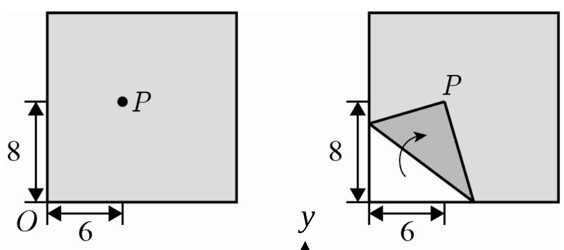
解：$\overrightarrow{P_2P_3}$ 與 $\overrightarrow{P_5P_6}$ 的夾角為 $15°\times3=45°$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_2P_3}\cdot\overrightarrow{P_5P_6}=|\overrightarrow{P_2P_3}||\overrightarrow{P_5P_6}|\cos45°=2\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

答：$2\sqrt{2}$

出處：第三冊，平面向量

16.正方形紙張上有一點 P，P 點距離紙張左邊界 6 公分，距離下邊界 8 公分。今將紙張的左下角 O 點往內摺至 P 點，如圖所示。則摺進去的三角形面積是 $\dfrac{\text{16-1 16-2 16-3}}{24}$ 平方公分



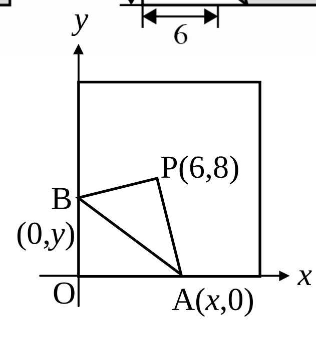
解 1：(1)坐標化，取 A(x，0)，B(0，y)，P(6，8)

(2)因對摺關係，得知：

$$\overline{OA}=\overline{AP}，即\ x=\sqrt{(x-6)^2+(0-8)^2}=\sqrt{x^2-12x+100}，\Rightarrow x=\frac{25}{3}$$

$$\overline{OB}=\overline{BP}，即\ y=\sqrt{(0-6)^2+(y-8)^2}=\sqrt{y^2-12y+100}，\Rightarrow y=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow 三角形\triangle OAB\ 面積=\frac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\frac{25}{3}\times\frac{25}{4}=\frac{625}{24}$$



解 2：(1)坐標化，取 A(x，0)，B(0，y)，P(6，8)

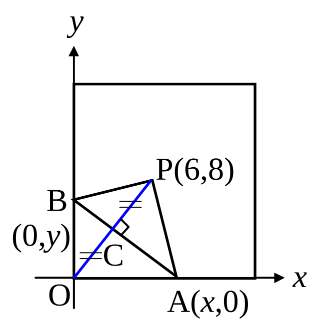
(2)$\because \overline{OA}=\overline{AP}$，$\overline{OB}=\overline{BP}$，$\Rightarrow$四邊形 OAPB 為鳶形

(3)連接 $\overline{OP}$，交 $\overline{AB}$ 於 C 點，則 $\overline{OP}\perp\overline{AB}$，且點 C 為 $\overline{OP}$ 之中點，即 C(3，4)

(4)$\because \overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\therefore m_{\overline{OP}}\times m_{\overline{AB}}=\frac{4}{3}m_{\overline{AB}}=-1$，得 $m_{\overline{AB}}=-\frac{3}{4}$

AB 直線方程式為 $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$，則 A($\frac{25}{3}$，0)，B(0，$\frac{25}{4}$)

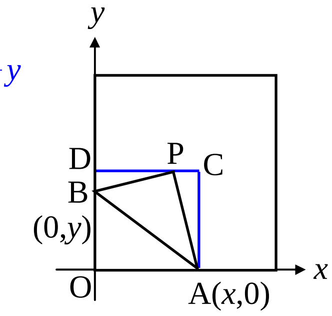
$$\Rightarrow\triangle OAB\ 面積=\frac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\frac{25}{3}\times\frac{25}{4}=\frac{625}{24}$$



解 3：(1)坐標化，取 A(x，0)，B(0，y)，P(6，8)

(2)$\overline{OA}=\overline{AP}=x$，$\overline{OB}=\overline{BP}=y$

(3)過 P 作$\overline{CD}\perp y$ 軸，作$\overline{AC}\perp x$ 軸，得知$\overline{DP}=6$，$\overline{PC}=x-6$，$\overline{AC}=8$，$\overline{DB}=8-y$



(4)∵△DBP 與△CAP 相似，則$\dfrac{y}{x}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{8-y}{x-6}$，$\Rightarrow\begin{cases}3x=4y\\3x+4y=50\end{cases}$

$\Rightarrow x=\dfrac{25}{3}$，$y=\dfrac{25}{4}$，即 A($\dfrac{25}{3}$，0)，B(0，$\dfrac{25}{4}$)

$\Rightarrow$△OAB 面積$=\dfrac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{25}{3}\times\dfrac{25}{4}=\dfrac{625}{24}$

答：$\dfrac{625}{24}$

出處：第一冊， 直線與圓

17.考慮所有只用 0、1、2 三種數字組成的序列，序列長度 n 是指該序列由 n 個數字組成(可重複出現)。令 $a(n)$為在所有長度 n 的序列中連續兩個零(即 00)出現的次數總和。例如長度 3 的序列中含有連續兩個零的有 000，001，002，100，200，其中 000 貢獻 2 次 00，其餘各貢獻 1 次 00，故 $a(3)=6$。則 $a(5)$的值為 ___17-1 17-2 17-3___

解 1：(1)長度 5 中連續兩個零，設為○○△△△，△○○△△，△△○○△，△△△○○共有 4 種

(2)其中○○△△△的△可排入 0，1，2，方法數有○○△△△＝1×1×3×3×3＝27 種

$\Rightarrow a(5)$的值＝4×27＝108 種

解 2：5 個 0：連續兩個零可能為$\boxed{00}$000，0$\boxed{00}$00，00$\boxed{00}$0，000$\boxed{00}$貢獻 4 次，方法數有 4 種

4 個 0：(1)$\boxed{00}$00△，0$\boxed{00}$0△，00$\boxed{00}$△貢獻 3 次，△排入 1，2，方法數有 2×3＝6 種

(2)△0000 與 0000△相同，方法數有 2×3＝6 種

(3)0△$\boxed{00}$0，0△0$\boxed{00}$ 或 $\boxed{00}$△$\boxed{00}$，或 $\boxed{00}$0△0，0$\boxed{00}$△0 貢獻 6 次，△排入 1，2，方法數有 2×6＝12 種

3 個 0：△△000，△0△00，△00△0，△000△，0△△00，0△00△，00△△0，00△0△，000△△貢獻 12 次

△排入 1，2，方法數有 12×2×2＝48 種

2 個 0：00△△△，△00△△，△△00△，△△△00，貢獻 4 次，△排入 1，2，方法數有 $1\times2^3\times4=32$ 種

$\Rightarrow a(5)$的值＝4＋24＋48＋32＝108 種

答：108

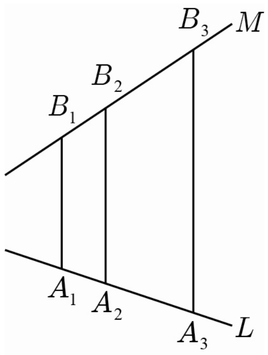
出處：第二冊， 排列組合

第貳部分、混合題或非選擇題(占 15 分)

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶(液)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

空地上有三根與地面垂直且等高的電線桿，其底座在一直線上且間距相等。某甲以單點透視法在畫布上畫這三根電線桿。在畫布上設坐標系，使得電線桿皆與 y 軸平行，三根底座的點分別為 $A_1(0，0)$、A_2、A_3，都在直線 $L：x+3y=0$ 上；三根頂端的點分別為 $B_1(0，3)$、B_2、B_3，都在直線 $M：2x-3y+9=0$ 上，如圖所示。已知 $\overline{A_3B_3}=2\overline{A_1B_1}$，且由單點透視法可知直線 A_1B_3 與直線 A_3B_1 的交點在直線 A_2B_2 上。設 L 和 M 相交於 P 點（此點又稱為「消失點」）。根據上述，試回答下列問題



18.若向量 $\overrightarrow{PA_1}=k\overrightarrow{PA_3}$，則 k 的值為 $\dfrac{\text{(18-1)}}{\text{(18-2)}}$。(化為最簡分數)(選填題，3 分)

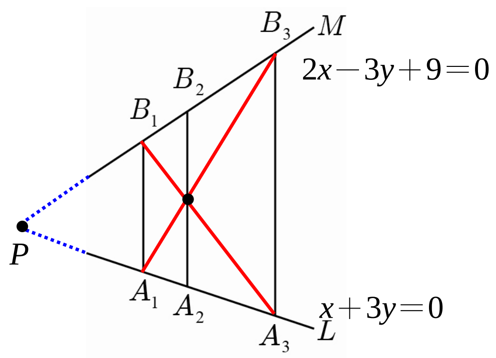
解：如圖，延長 L，M 交於 P 點

因 $\overline{A_1B_1}\,//\,\overline{A_2B_2}\,//\,\overline{A_3B_3}\,//\,y$ 軸

$\Rightarrow \overline{PA_1}：\overline{PA_3}=\overline{A_1B_1}：\overline{A_3B_3}=1：2$

$\Rightarrow \overline{PA_1}=\dfrac{1}{2}\overline{PA_3}$，得知 $\overrightarrow{PA_1}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA_3}$

故 $k=\dfrac{1}{2}$



答：$\dfrac{1}{2}$

出處：第三冊， 平面向量

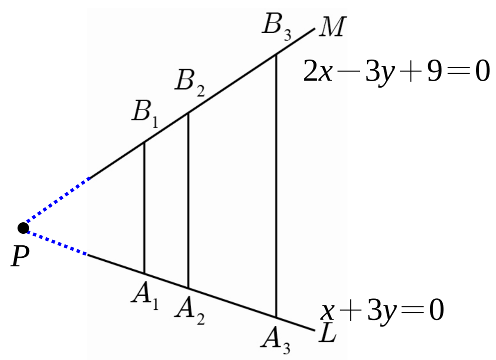
19.試求 P 與 B_3 這兩點的坐標。(非選擇題，6 分)

解：(1) P 點 $\begin{cases} L: x+3y=0 \\ M: 2x-3y+9=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$，$\Rightarrow P(-3，1)$

(2)由 18 題，因 $\overline{A_1B_1}\,//\,\overline{A_3B_3}$，設 $B_3(x，y)$

$\Rightarrow \overline{PA_1}：\overline{PA_3}=\overline{PB_1}：\overline{PB_3}=1：2$，$B_1$ 是 $\overline{PB_3}$ 的中點

$\Rightarrow \left(\dfrac{-3+x}{2}，\dfrac{1+y}{2}\right)=B_1(0，3)$，得 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$，$\Rightarrow B_3(3，5)$



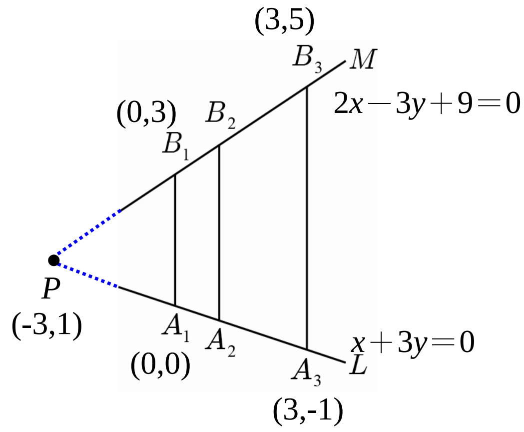
另解：由 18 題知 $2\overline{PA_1}=\overline{PA_3}$，$\Rightarrow 2\overline{PB_1}=\overline{PB_3}$

設 $B_3(x，y)$，$\Rightarrow 2(3，2)=(x+3，y-1)$，得 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$，$\Rightarrow B_3(3，5)$

答：$P(-3，1)$，$B_3(3，5)$

出處：第一冊， 數與式 ch2 直線與圓

20.若有隻蜜蜂恰好停在中間那根電線桿上距離底座與頂端的長度比為 1：2 的位置上。某甲想在這個畫布的線段 A_2B_2 上畫出這隻蜜蜂，假設畫布上蜜蜂位置為 Q 點，即點 Q 到線段 A_2B_2 的底座 A_2 與到線段 A_2B_2 頂端 B_2 的長度比為 1：2，試求 Q 點坐標。(非選擇題，6 分)



解：(1)因 B_1 是 $\overline{PB_3}$ 的中點，同理 A_1 是 $\overline{PA_3}$ 的中點

設 $A_3(x，y)$，$(0，0)=(\dfrac{-3+x}{2}，\dfrac{1+y}{2})$，得 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$，⇒$B_3(3，-1)$

(2)直線 A_1B_3：$\dfrac{y-0}{x-0}=\dfrac{5-0}{3-0}$，⇒$5x-3y=0$

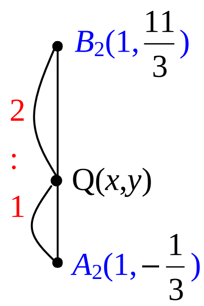
直線 B_1A_3：$\dfrac{y-3}{x-0}=\dfrac{-1-3}{3-0}$，⇒$4x+3y=9$

交點 $\begin{cases} 5x-3y=0 \\ 4x+3y=9 \end{cases}$，$\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$，⇒$(1，\dfrac{5}{3})$在 $\overline{A_2B_2}$ 上

⇒將 $x=1$ 代入 L：$1+3y=0$，得 $y=-\dfrac{1}{3}$，即 $A_2(1，-\dfrac{1}{3})$

將 $x=1$ 代入 M：$2-3y+9=0$，得 $y=\dfrac{11}{3}$，即 $B_2(1，\dfrac{11}{3})$

(3)根據分點公式，如右圖



$$Q(x，y)=\frac{2(1,-\frac{1}{3})+(1,\frac{11}{3})}{1+2}=(1，1)$$

答：$Q(1，1)$

出處：第一冊， 數與式