大學入學考試中心 112 學年度學科能力測驗試題 數學 A 考科

第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1.若在計算器中鍵入某正整數 N，接著連按「$\sqrt{\ }$」鍵(取正平方根) 3 次，視窗顯示得到答案為 2， 則 N 等於下列哪一個選項？ (1) 2^3　(2) 2^4　(3) 2^6　(4) 2^8　(5) 2^{12}

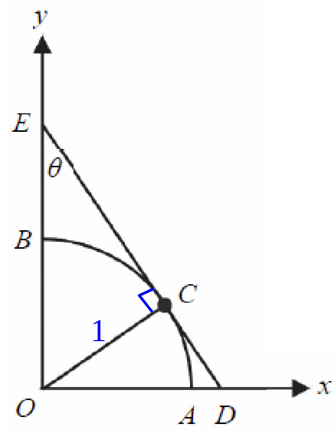
解：$N \xrightarrow{①} \sqrt{N} \xrightarrow{②} \sqrt{\sqrt{N}} = \sqrt[4]{N} \xrightarrow{③} \sqrt{\sqrt{\sqrt{N}}} = \sqrt{\sqrt[4]{N}} = \sqrt[8]{N} = 2$，得 $N = 2^8$

答：(4)

出處：第一冊， 數與式

2.坐標平面上，以原點 O 為圓心、1 為半徑作圓，分別交坐標軸正向於 A、B 兩點。在第一象限的圓弧上取一點 C 作圓的切線分別交兩軸於點 D、E，如圖所示。令∠OEC＝θ，試選出為 $\tan\theta$ 的選項。

(1) $\overline{OE}$　(2) $\overline{OC}$　(3) $\overline{OD}$　(4) $\overline{CE}$　(5) $\overline{CD}$

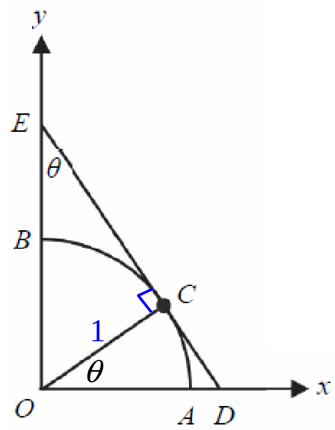


解 1：1.由題意得知 $\overline{OC} \perp \overline{DE}$ 且 $\overline{OC} = 1$(半徑)

2.在直角△OCE 中，$\tan\theta = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{CE}} = \dfrac{1}{\overline{CE}}$

3.因△OCD 與△OCE 相似，$\Rightarrow \overline{OC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CE} = 1$，$\therefore \dfrac{1}{\overline{CE}} = \overline{CD}$

故 $\tan\theta = \dfrac{1}{\overline{CE}} = \overline{CD}$



解 2：1.如右圖，∠COD＝∠OEC＝θ，$\overline{OC} \perp \overline{DE}$ 且 $\overline{OC} = 1$(半徑)

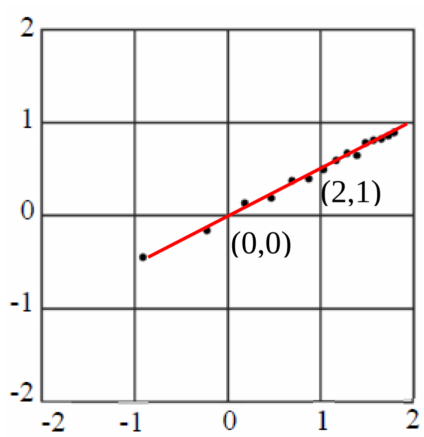
2.在△OCD 中，$\tan\theta = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \overline{CD}$

答：(5)

出處：第二冊， 三角

3.某生推導出兩物理量 s，t 應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到 15 筆兩物理量的數據(s_k, t_k)，$k=1, \cdots, 15$。老師建議他將其中的t_k 先取對數，在坐標平面上標出對應的點$(s_k, \log t_k)$，$k=1, \cdots, 15$，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得 s，t 的關係式最可能為下列哪一選項？

(1) $s=2t$　(2) $s=3t$　(3) $t=10^s$　(4) $t^2=10^s$　(5) $t^3=10^s$



解 1：由散布圖形得知，迴歸直線通過點$(1, \dfrac{1}{2}) = (s_k, \log t_k)$

$\Rightarrow \log t_k = \dfrac{1}{2}$，得 $t_k = 10^{\frac{1}{2}}$，即 $t_k^{\ 2} = 10 = 10^{s_k}$，$\therefore t^2 = 10^s$

解 2：由散布圖形得知，迴歸直線通過點(0，0)，(2，1)，得方程式為 $y=\dfrac{1}{2}x$

$\Rightarrow \log t = \dfrac{1}{2}s$，$\therefore t = 10^{\frac{1}{2}s}$，得 $t^2 = 10^s$

答：(4)

出處：第二冊， 數據分析

4.將數字 1、2、3、…、9 等 9 個數字排成九位數(數字不得重覆)，使得前 5 位從左至右遞增、且後 5 位從左至右遞減。問共有幾個滿足條件的九位數？

(1) $\dfrac{8!}{4!4!}$　(2) $\dfrac{8!}{5!3!}$　(3) $\dfrac{9!}{5!4!}$　(4) $\dfrac{8!}{5!}$　(5) $\dfrac{9!}{5!}$

解：由題意得知中間數為 9，「前 5 位從左至右遞增、且後 5 位從左至右遞減」表示限定位置，則視為相同物排列

⇒即□□□□9○○○○，故排列數＝$\dfrac{(9-1)!}{4!\times 4!}=\dfrac{8!}{4!4!}$

答：(1)

出處：第二冊， 排列組合

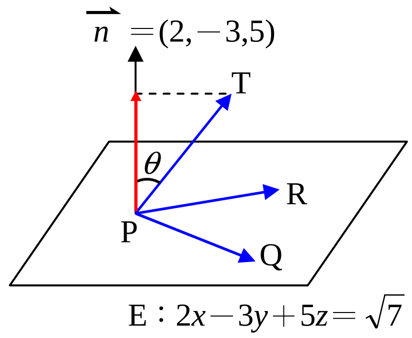
5.已知坐標空間中 P、Q、R 為平面 $2x-3y+5z=\sqrt{7}$ 上不共線三點。令 $\overrightarrow{PQ}=(a_1，b_1，c_1)$，$\overrightarrow{PR}=(a_2，b_2，c_2)$，試選出下列行列式中**絕對值**為最大的選項。

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

解：1.由選項中行列式中**絕對值**為最大，表示由 $\overrightarrow{PT}$，$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ 所形成的平行六面體體積，如圖

當 $\overrightarrow{PT}$ 在法向量 $\overrightarrow{n}$ 上投影長(平行六面體的高)有最大時，則此平行六面體體積最大

其中投影長＝$|\overrightarrow{PT}|\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PT}}{|\overrightarrow{n}|}\right|\propto|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PT}|$



2.(1) $|(2，-3，5)\cdot(-1，1，1)|=0$

(2) $|(2，-3，5)\cdot(1，-1，1)|=10$

(3) $|(2，-3，5)\cdot(1，1，-1)|=6$

(4) $|(2，-3，5)\cdot(-1，-1，1)|=6$

(5) $|(2，-3，5)\cdot(-1，-1，-1)|=4$

⇒得知(2) $\left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right|$的平行六面體體積最大

答：(2)

出處：第四冊， 空間向量

6.坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點 O。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點， 設此兩點為 P、Q，試問所得的內積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 之期望值為下列哪一個選項？(1) $\dfrac{4}{7}$　(2) $\dfrac{5}{7}$　(3) $\dfrac{6}{7}$　(4) 1　(5) $\dfrac{8}{7}$

解：坐標化如右圖

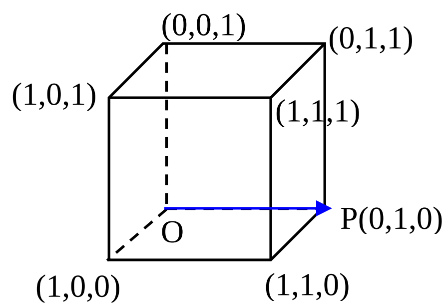
1.樣本空間 n(S：7 頂點選取 2 頂點)＝$C^7_2=21$

2.$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 可能值有 0，1，2

(1) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ 有(1,0,0)·(0,1,0)，(1,0,0)·(0,0,1)，(1,0,0)·(0,1,1)
(0,1,0)·(0,0,1)，(0,1,0)·(1,0,1)，(0,0,1)·(1,1,0)共 6 種

(2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2$ 有(1,1,1)·(0,1,1)，(1,1,1)·(1,1,0)，(1,1,1)·(0,1,1)共 3 種

(3) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1$ 有 21－6－3＝12 種



⇒期望值＝$0\times\dfrac{6}{21}+1\times\dfrac{12}{21}+2\times\dfrac{3}{21}=\dfrac{6}{7}$

答：(3)

出處：第二冊，古典機率，第四冊　空間向量

二、多選題(占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7.某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時間入職且起薪相同。公司承諾給甲、乙兩員工調薪的方式如下：

甲：工作滿 3 個月，下個月開始月薪增加 200 元；以後再每滿 3 個月皆依此方式調薪。

乙：工作滿 12 個月，下個月開始月薪增加 1000 元；以後再每滿 12 個月皆依此方式調薪。

根據以上敘述，試選出正確的選項。

(1)甲工作滿 8 個月後，第 9 個月的月薪比第 1 個月的月薪增加 600 元

(2)工作滿一年後，第 13 個月甲的月薪比乙的月薪高

(3)工作滿 18 個月後，第 19 個月甲的月薪比乙的月薪高

(4)工作滿 18 個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少

(5)工作滿兩年後，在第 3 年的 12 個月中，恰有 3 個月甲的月薪比乙的月薪高

解：(1)第 4~6 個月加月薪 200 元，第 7~9 個月加月薪 200×2＝400 元

(2)甲：(12－3)÷3＝3，共加月薪 200×3 元＝600 元，第 13 個月起加月薪 800 元
乙：(12－3)÷12＜1，共加 1 次月薪 1000 元，故甲的月薪＜乙的月薪

(3)甲：(18－3)÷3＝5，共加月薪 200×5 元＝1000 元，第 19 個月起加月薪 1200 元
乙：(18－12)÷12＜1，共加 1 次月薪 1000 元，故甲的月薪＞乙的月薪

(4)設起薪為 x 元，則工作滿 18 個月時：

甲總共領到 $18x+3[0+200+400+600+800+1000]=18x+9000$

乙總共領到 $12x+6(x+1000)=18x+6000$，故甲的月薪＞乙總共領到的薪水

(5)甲：(24－3)÷3＝7，第 3 年起加月薪 1600 元，1800 元，2000 元，2200 元
乙：(24－12)÷12＝1，第 3 年起整年加月薪 2000 元，故恰有 3 個月甲的月薪(2200 元)比乙的月薪(2000 元)高

答：(3)(5)

出處：第二冊，數列與級數

8.某抽獎遊戲單次中獎機率為 0.1，每次中獎與否皆為獨立事件。對每一正整數 n，令 p_n 為玩此遊戲 n 次至少中獎 1 次的機率。試選出正確的選項。

(1) $p_{n+1}>p_n$　(2) $p_3=0.3$　(3) $\langle p_n\rangle$ 為等差數列

(4)玩此遊戲兩次以上，第一次未中獎且第二次中獎的機率等於 p_2-p_1

(5)玩此遊戲 n 次且 $n\geq 2$ 時，至少中獎 2 次的機率等於 $2p_n$

解：(1)根據題意，$p_n=1-(1-0.1)^n=1-0.9^n$，$p_{n+1}=1-(1-0.1)^{n+1}=1-0.9^{n+1}$，故 $p_{n+1}>p_n$

(2) $p_3=1-0.9^3=0.271\neq 0.3$

(3)因 $p_{n+1}-p_n=0.9^n-0.9^{n+1}=0.9^n\times 0.1$ 不是定值，故 $\langle p_n\rangle$ 不為等差數列

或 $p_2-p_1=(1-0.9^2)-(1-0.9)=0.09$，$p_3-p_2=(1-0.9^3)-(1-0.9^2)=0.081$，⇒故 $\langle p_n\rangle$ 不為等差數列

(4) $p_1=1-0.9=0.1$，$p_2=1-0.9^2=0.19$，⇒ $p_2-p_1=0.19-0.1=0.09$

⇒第一次未中獎且第二次中獎的機率＝(1－0.1)(0.1)＝0.09，故等於 p_2-p_1

(5)至少中獎 2 次的機率＝1－P(中獎 0 次)－P(中獎 1 次)＝$1-0.9^n-n\times 0.1\times 0.9^{n-1}\neq 2p_n=2(1-0.9^n)$

答：(1)(4)

出處：第四冊，條件機率與貝氏定理

9.設 a_1，a_2，a_3，…，a_n 是首項為 3 且公比為 $3\sqrt{3}$ 的等比數列。試選出滿足不等式

$\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}\log_3 a_n > 18$ 的項數 n 之可能選項。

(1) 23　(2) 24　(3) 25　(4) 26　(5) 27

解：等比數列 $\langle a_n\rangle$：3，$9\sqrt{3}$，81，$243\sqrt{3}$，……，公比 $r=3\sqrt{3}=3^{\frac{3}{2}}$

(i)當 n 為偶整數，設 $n=2k$，k 為整數

$\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \cdots$

$=\log_3\left(\dfrac{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}\right)=\log_3\left(\dfrac{1}{r r \cdots r}\right)=\log_3 r^{-k}=\log_3 3^{\frac{-3k}{2}}=\dfrac{-3k}{2}>18$，$\Rightarrow k<-12$(不合)

(ii)當 n 為奇整數，設 $n=2k+1$，k 為整數

$\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \cdots$

$=\log_3\left(\dfrac{a_1 a_3 \cdots a_{2k+1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}\right)=\log_3\left(\dfrac{a_{2k+1}}{r r \cdots r}\right)=\log_3 a_1 \times r^{2k} \times r^{-k}=\log_3 3\times 3^{\frac{3k}{2}}=\dfrac{3k+1}{2}>18$，$\Rightarrow k>\dfrac{35}{3}$

$\Rightarrow n=2k+1>\dfrac{73}{3}=24.3\cdots$，取奇整數 $n=25$，27，…

答：(3)(5)

出處：第二冊，數列與級數，第三冊，指數函數與對數函數

10.考慮坐標平面上的直線 L：$5y+(2k-4)x-10k=0$ (其中 k 為一實數)，以及長方形 $OABC$，其頂點坐標為 $O(0，0)$、$A(10，0)$、$B(10，6)$、$C(0，6)$。設 L 分別交直線 OC、直線 AB 於點 D、E。試選出正確的選項。

(1)當 $k=4$ 時，直線 L 通過點 A

(2)若直線 L 通過點 C，則 L 的斜率為 $-\dfrac{5}{2}$

(3)若點 D 在線段 $\overline{OC}$ 上，則 $0\le k\le 3$

(4)若 $k=\dfrac{1}{2}$，則線段 $\overline{DE}$ 在長方形 $OABC$ 內部(含邊界)

(5)若線段 $\overline{DE}$ 在長方形 $OABC$ 內部(含邊界)，則 L 的斜率可能為 $\dfrac{3}{10}$

解：(1)當 $k=4$ 時，直線 L：$4x+5y-40=0$，將 $A(10，0)$代入 L：$40+0-40=0$，故直線 L 通過點 A

(2) $C(0，6)$代入 L：$30-10k=0$，得 $k=3$，故直線 L：$2x+5y-30=0$，斜率為 $-\dfrac{2}{5}$

(3)令 $x=0$ 代入 L：$5y-10k=0$，得 $y=2k$，$\Rightarrow 0\le y=2k\le 6$，$\Rightarrow 0\le k\le 3$

(4)若 $k=\dfrac{1}{2}$，L：$-3x+5y-5=0$，則 D(0，1)，E(10，7)，知 E(10，7)不在長方形 $OABC$ 內部

(5)當點 D 在線段 $\overline{OC}$ 上，則 $0\le k\le 3$，當點 E 在線段 $\overline{AB}$ 上，則 $1\le k\le 4$

$\Rightarrow \overline{DE}$ 在長方形 $OABC$ 內部(含邊界)，則 $1\le k\le 3$，

又直線 L 的斜率 $=\dfrac{4-2k}{5}$，得 $\dfrac{-2}{5}\le$ 斜率 $\le\dfrac{2}{5}$，故 L 的斜率可能為 $\dfrac{3}{10}$

答：(1)(3)(5)

出處：第一冊，直線與圓

11.坐標平面上， 設 A、B 分別表示以原點為中心，順時針、逆時針旋轉 90°的旋轉矩陣。設 C、D 分別表示以直線 $x=y$、$x=-y$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。

(1) A、C 將點(1，0)映射到同一點　(2) A＝－B　(3)C＝ D^{-1}　(4)AB＝CD　(5)AC＝BD

解：(i)變換矩陣 A＝$\begin{bmatrix}\cos(-90^0) & -\sin(-90^0)\\ \sin(-90^0) & \cos(-90^0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}\cos 90^0 & -\sin 90^0\\ \sin 90^0 & \cos 90^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(ii)直線 $x=y$，若斜角為 θ，斜率 $\tan\theta=1$，得 $\theta=45°$，

變換矩陣 C＝$\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 90^0 & \sin 90^0\\ \sin 90^0 & -\cos 90^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(iii)直線 $x=-y$，若斜角為 θ，斜率 $\tan\theta=-1$，得 $\theta=135°$，

變換矩陣 D＝$\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 270^0 & \sin 270^0\\ \sin 270^0 & -\cos 270^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

(1)A$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$，C$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，故不同一點

(2)－B＝$-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$＝A，正確

(3)detD＝$\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1$，$\Rightarrow D^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\neq$ C＝$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(4)AB＝$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，CD＝$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，知 AB≠ CD

(5)AC＝$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，BD＝$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，知 AC＝BD

答：(2)(5)

出處：第四冊，矩陣

12.令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，試選出正確的選項。

(1)鉛直線 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 為 $y=f(x)$圖形的對稱軸

(2)若鉛直線 $x=a$ 和 $x=b$ 均為 $y=f(x)$圖形的對稱軸，則 $f(a)=f(b)$

(3)在區間[0，2π) 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x)=\sqrt{3}$

(4)在區間[0，2π) 中滿足 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π

(5) $y=f(x)$的圖形可由 $y=4\sin^2\dfrac{x}{2}$ 的圖形經適當(左右、上下)平移得到

解：$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

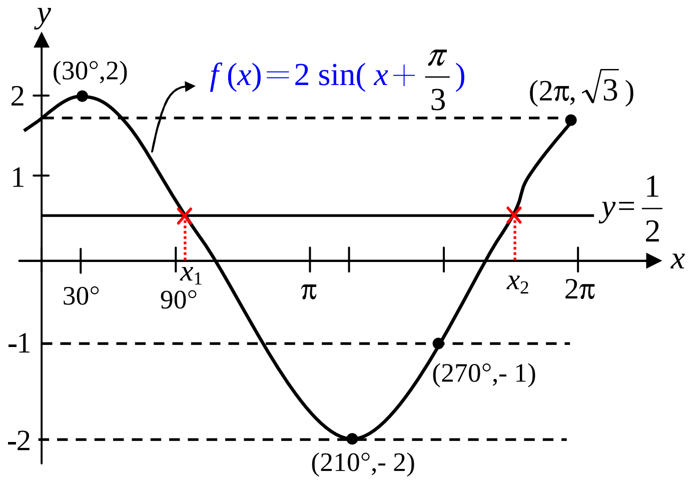
(1) $x=\dfrac{\pi}{6}$ 代入 $f(\dfrac{\pi}{6})=2\sin\dfrac{\pi}{2}=2$，又 $-2\le f(x)\le 2$，$f(\dfrac{\pi}{6})=2$ 為最大值，故 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 為 $y=f(x)$圖形的一對稱軸

(2) $x=a$ 和 $x=b$ 為圖形的對稱軸，$f(a)$，$f(b)$可能值為最大值 2，最小值－2，故 $f(a)$，$f(b)$不一定相等

(3)區間[0，2π) ，$\Rightarrow \dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7\pi}{3}$，

則當 $f(x)=\sqrt{3}=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$，$\Rightarrow \sin(x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$，解得 $x=0$ 或 $\dfrac{\pi}{3}$，有 2 實數解

(4)令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$，$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}$，圖解如下：



得解 $x_1>\frac{\pi}{2}$ 或 $x_2>\frac{3\pi}{2}$，⇒所有實數 x 之和 $=x_1+x_2>\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=2\pi$

(5) $y=4\sin^2\frac{x}{2}=4\frac{1-\cos x}{2}=2-2\cos x=2+2\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$

可由 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 向左平移 $\frac{7\pi}{6}$ 單位，再向上平移 2 單位得到

答：(1)(5)

出處：第三冊，三角函數

三、選填題(占 25 分)

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13.某間新開幕飲料專賣店推出果汁、奶茶、咖啡三種飲料，前 3 天各種飲料的銷售數量(單位：杯)與收入總金額(單位：元)如下表，例如第一天果汁、奶茶、咖啡的銷售量分別為 60 杯、80 杯與 50 杯，收入總金額為 12900 元。

已知同一種飲料每天的售價皆相同，則咖啡每杯的售價為 13-1 13-2 元

	果汁(杯)	奶茶(杯)	咖啡(杯)	收入總金額(元)
第 1 天	60	80	50	12900
第 2 天	30	40	30	6850
第 3 天	50	70	40	10800

解：設果汁、奶茶、咖啡每杯分別為 x 元，y 元，z 元

根據題意：$\begin{cases} \text{第一天 } 60x+80y+50z=12900 & \cdots(1) \\ \text{第二天 } 30x+40y+30z=6850 & \cdots(2) \\ \text{第三天 } 50x+70y+30z=10800 & \cdots(3) \end{cases}$

將(2)×2：$60x+80y+60z=13700 \cdots (4)$

(4)－(3)：$10z=800$，得 $z=80$，故咖啡每杯 80 元

答：80

出處：第四冊，空間中的平面與直線

14.設 a，b 為實數(其中 $a>0$)，若多項式 $ax^2+(2a+b)x-12$ 除以 $x^2+(2-a)x-2a$ 所得餘式為 6，

則數對$(a，b)=($ 14-1 ， 14-2 14-3 $)$

解：利用長除法，如右圖

$$\begin{array}{r|l} & \quad a \\ x^2+(2-a)x-2a & ax^2+(2a+b)x-12 \\ & ax^2+(2a-a^2)x-2a^2 \\ \hline & (b+a^2)x+(2a^2-12) \end{array}$$

$\Rightarrow\begin{cases} b+a^2=0\cdots(1) \\ 2a^2-12=6\cdots(2) \end{cases}$，由(2)得知 $a=3$，-3(不合)

代回(1)，得 $b=-9$，故數對$(a，b)=(3，-9)$

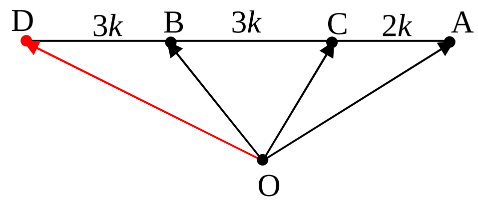
答：$(3，-9)$

出處：第一冊，多項式函數

15.設 O、A、B 為坐標平面上不共線三點，其中向量$\overrightarrow{OA}$垂直$\overrightarrow{OB}$。若 C、D 兩點在直線 AB 上，滿足$\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$

、$3\overline{AD}=8\overline{BD}$，且$\overrightarrow{OC}$垂直$\overrightarrow{OD}$，則$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{15\text{-}1}{15\text{-}2}$ (化為最簡分數)

解：1.由$\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$及$3\overline{AD}=8\overline{BD}$，作圖如右



$\Rightarrow$得知$\overline{BD}:\overline{BC}:\overline{AC}=3:3:2$

2.由內分點公式得$\overrightarrow{OB}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OD}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}$，$\Rightarrow\overrightarrow{OD}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{5}\overrightarrow{OB}$

3.因$\overrightarrow{OC}$垂直$\overrightarrow{OD}$，$\Rightarrow\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$，且$\overrightarrow{OA}$垂直$\overrightarrow{OB}$，$\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\Rightarrow(\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB})\cdot(-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{5}\overrightarrow{OB})=0$，$\Rightarrow-\frac{9}{25}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{18}{25}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{16}{25}|\overrightarrow{OB}|^2=0$

$\Rightarrow\frac{9}{25}|\overrightarrow{OA}|^2=\frac{16}{25}|\overrightarrow{OB}|^2$，$\Rightarrow\frac{|\overrightarrow{OB}|^2}{|\overrightarrow{OA}|^2}=\frac{9}{16}$，故$\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{3}{4}$

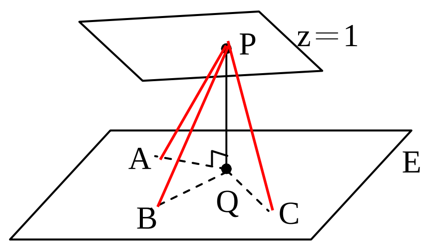
答：$\frac{3}{4}$

出處：第三冊，平面向量

16.令 $E：x+z=2$ 為坐標空間中過三點 $A(2，-1，0)$、$B(0，1，2)$、$C(-2，1，4)$的平面。另有一點 P 在平面 $z=1$ 上

且其於 E 之投影點與 A、B、C 三點等距離。則點 P 與平面 E 的距離為 16-1 $\sqrt{\text{16-2}}$ (化為最簡根式)

解：1.點 P 在平面 $z=1$ 上，設 $P(x，y，1)$



2.如右圖，若 P 點在 E 之投影點為 Q，$\Rightarrow\overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QC}$

由畢氏定理得知$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\Rightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+1}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+9}$

平方化檢得 $x=-3$，$y=-4$，即 $P(-3，-4，1)$

3.點 P 與平面 E 的距離$=\frac{|-3+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

答：$2\sqrt{2}$

出處：第四冊，空間中的平面與直線

17.坐標空間中有兩不相交直線 L_1：$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$，$t$ 為實數、L_2：$\begin{cases} x=2+2s \\ y=5+s \\ z=6-s \end{cases}$，$s$ 為實數，另一直線 L_3 與 L_1、L_2 皆相交且垂直。若 P、Q 兩點分別在 L_1、L_2 上且與 L_3 之距離皆為 3，則 P、Q 兩點的距離為 17-1$\sqrt{\text{17-2}}$ (化為最簡根式)

解：1.由題意得知直線 L_1 與 L_2 互為歪斜線

設 L_3 交 L_1 與 L_2 分別為 A，B 點，則 $\overline{AB}$ 為公垂線線長

2.取直線 L_1 與 L_2 的方向向量分別為 $\overrightarrow{d_1}=(1，-1，1)$，$\overrightarrow{d_2}=(2，1，-1)$

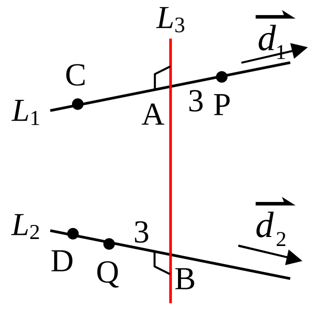
又在直線 L_1 與 L_2 分別任取點 C(1，1，2)，D(2，5，6)，

得 $\overrightarrow{CD}=(1，4，4)$，$\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=(0，3，3)$

則由 $\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$ 所形成的平行六面體體積$=|\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2})|=24$

由 $\overrightarrow{d_1}$、$\overrightarrow{d_2}$ 所形成的平行四邊形面積$=|(0，3，3)|=3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$公垂線線長 $\overline{AB}=\dfrac{24}{3\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$



3.P、Q 兩點的距離$=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{AB}^2+\overline{QB}^2}=\sqrt{3^2+(4\sqrt{2})^2+3^2}=5\sqrt{2}$

答：$5\sqrt{2}$

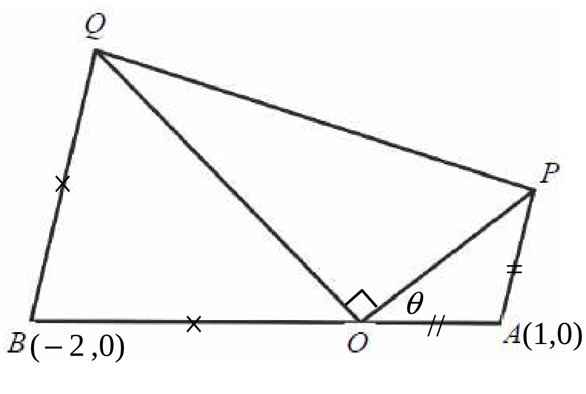
出處：第四冊，空間中的平面與直線

第貳部分、混合題或非選擇題(占 15 分)

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標平面上 O 為原點，給定 $A(1，0)$、$B(-2，0)$兩點。另有兩點 P、Q 在上半平面，且滿足 $\overline{AP}=\overline{OA}$、$\overline{BQ}=\overline{OB}$、$\angle POQ$ 為直角，如圖所示。令$\angle AOP=\theta$。根據上述，試回答下列問題。



18.線段 $\overline{OP}$ 長為下列哪一選項？(單選題，3 分)

(1) $\sin\theta$　(2) $\cos\theta$　(3) $2\sin\theta$　(4) $2\cos\theta$　(5) $\cos 2\theta$

解：在$\triangle AOP$ 中，$\angle OAP=180°-2\theta$

根據餘弦定理 $\overline{OP}^2=\overline{OA}^2+\overline{AP}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{AP}\cos(180°-2\theta)$

$=1+1-2\times1\times1\times(-\cos2\theta)$

$=2+2\cos2\theta$

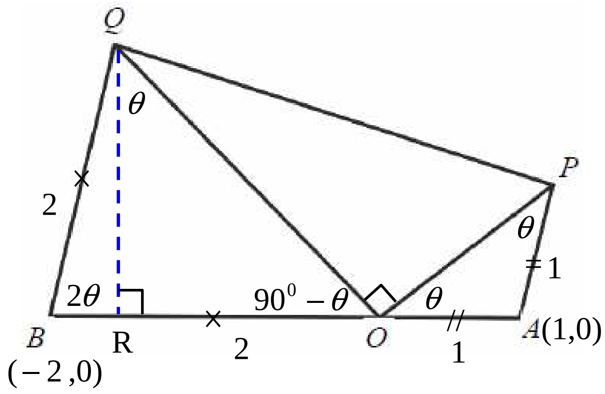
$=2+2(2\cos^2\theta-1)=4\cos^2\theta$

$\Rightarrow\overline{OP}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$　(θ 為銳角)

答：(4)

出處：第二冊，三角

19.若 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，試求點 Q 的坐標，並說明 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$。 (非選擇題，6 分)



解：(I)(1)在△BOQ 中，$\angle QOB=180°-90°-\theta=90°-\theta=\angle BQO$

$\Rightarrow\angle B=180°-2\angle QOB=180°-2(90°-\theta)=2\theta$

(2)根據餘弦定理 $\overline{OQ}^2=\overline{OB}^2+\overline{BQ}^2-2\times\overline{OB}\times\overline{BQ}\times\cos2\theta$

$=2^2+2^2-2\times2\times2\times(1-2\sin^2\theta)=16\sin^2\theta$

$\Rightarrow\overline{OQ}=\sqrt{16\sin^2\theta}=4\sin\theta=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

(3)作 $\overline{QR}\perp\overline{OB}$ 於 Q 點，則：

$\overline{QR}=\overline{OQ}\sin(90°-\theta)=\frac{12}{5}\times\cos\theta=\frac{12}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{48}{5}$

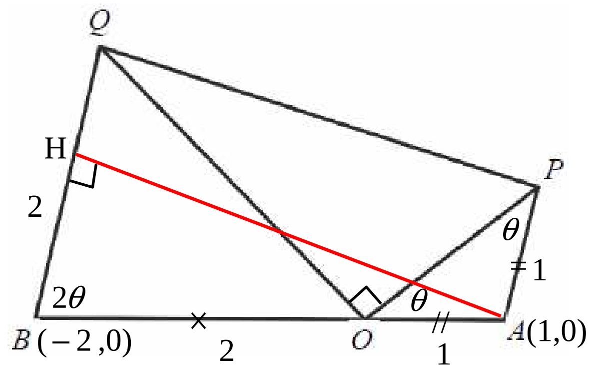
$\overline{OR}=\overline{OQ}\cos(90°-\theta)=\frac{12}{5}\times\sin\theta=\frac{12}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{36}{5}$，$\Rightarrow Q(-\frac{36}{5},\frac{48}{5})$

(II)因 $\angle B+\angle OAP=2\theta+(180°-2\theta)=180°$，$\Rightarrow\overline{BQ}\,//\,\overline{AP}$ (根據內錯角互補)

又 $\overline{BQ}=2=2\overline{AP}$，故 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$

出處：第三冊， 三角函數 ，第三冊， 平面向量

20.(承 19 題) 試求點 A 到直線 BQ 的距離，並求四邊形 PABQ 的面積。 (非選擇題，6 分)



解：(I)作 $\overline{AH}\perp\overline{BQ}$ 於 H，$\Rightarrow\overline{AH}$ ＝點 A 到直線 BQ 的距離

在直角△ABH 中，

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin2\theta=3\times2\sin\theta\times\cos\theta=6\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{72}{25}$

(II)四邊形 PABQ 為梯形

$\Rightarrow$面積$=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{BQ})\times\overline{AH}=\frac{1}{2}(1+2)\times\frac{72}{25}=\frac{108}{25}$

出處：第一冊，直線與圓