大學入學考試中心 111 學年度學科能力測驗試題 數學 A 考科

第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1.某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」。試問來店顧客從 n 桶中任選兩球(可為同一口味)共有幾種方法？

(1) 101 (2) 105 (3) 115 (4) 120 (5) 225

解：1.$C_2^n>100$，$\dfrac{n(n+1)}{2}>100$，$\therefore n(n+1)>200$，取 $n\geq 15$ (取至少 $n=15$)

2.選同一口味有 $C_1^{15}=15$ 種，選不同口味有 $C_2^{15}=105$ 種，共 $15+105=120$ 種

註：可利用巴斯卡計算 $C_1^{15}+C_2^{15}=C_2^{16}=\dfrac{16\times 15}{2}=120$

答：(4)

2.某品牌計算機在計算對數 $\log_a b$ 時需按 $\boxed{\log}\ \boxed{(}\ \boxed{b}\ \boxed{,}\ \boxed{a}\ \boxed{)}$。某生在計算 $\log_a b$ 時(其中 $a>1$ 且 $b>1$)順序弄錯，誤按 $\boxed{\log}\ \boxed{(}\ \boxed{b}\ \boxed{,}\ \boxed{a}\ \boxed{)}$，所得為正確值的 $\dfrac{9}{4}$ 倍。試選出 a，b 間的關係式。

(1) $a^2=b^3$ (2) $a^3=b^2$ (3) $a^4=b^9$ (4) $2a=3b$ (5) $3a=2b$

解：1.$\because a>1$ 且 $b>1$，表示 $\log_a b$ ，$\log a$ ，$\log b$ 皆為正數

2.根據題意，$\log_b a=\dfrac{9}{4}\log_a b$ ，$4\dfrac{\log a}{\log b}=9\dfrac{\log b}{\log a}$ ，$\Rightarrow 4(\log a)^2=9(\log b)^2$

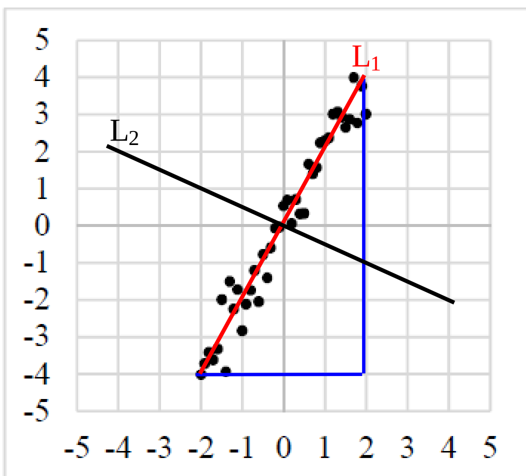
取正平方根，$\therefore 2\log a=3\log b$ ，得 $\log a^2=\log b^3$ ，$\Rightarrow a^2=b^3$

另解：利用 $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$ 關係，$\Rightarrow\because \log_b a=\dfrac{9}{4}\log_a b$ ，$\therefore \dfrac{1}{\log_a b}=\dfrac{9}{4}\log_a b$ ，得知 $(\log_a b)^2=\dfrac{4}{9}$

取正平方根，$\log_a b=\dfrac{2}{3}$ ，$\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}=b$，化簡得 $a^2=b^3$

答：(1)

3.在處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異。下圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？



(1) $y=2x$ (2) $y=-2x$ (3) $y=-x$ (4) $y=\dfrac{x}{2}$ (5) $y=-\dfrac{x}{2}$

解：根據題意，求數據的變異數(σ^2)最小值，即標準差 σ (分散程度)最小值

$\Rightarrow$即求數據的投影量(分散程度最小，或集中程度大)

由圖中得知數據分布在斜率$=\dfrac{8格}{4格}=2$ 的直線 L_1 上

$\Rightarrow$投影量最小時，與數據直線 L_1 夾角為 90°，即斜率為 $-\dfrac{1}{2}$ 的直線 L_2 上

$\therefore$一維投影的直線為 L_2：$y=-\dfrac{x}{2}$

答：(5)

4.設等差數列$\langle a_n\rangle$之首項a_1與公差 d 皆為正數，且$\log a_1$，$\log a_3$，$\log a_6$依序也成等差數列。試選出數列$\log a_1$，$\log a_3$，$\log a_6$的公差。

(1) $\log d$ (2) $\log\frac{3}{2}$ (3) $\log\frac{2}{3}$ (4) $\log 2d$ (5) $\log 3d$

解：1.設$\langle a_n\rangle$：a_1，a_1+d，a_1+2d，…

2.根據題意$\log a_1$，$\log a_3$，$\log a_6$成等差數列，$\therefore 2\log a_3=\log a_1+\log a_6$，$\Rightarrow 2\log a_3=\log a_1+\log a_6=\log a_1a_6$

$\therefore a_3{}^2=a_1a_6$，$\Rightarrow (a_1+2d)^2=a_1(a_1+5d)$，(公差 d 為正數)得知$a_1=4d$

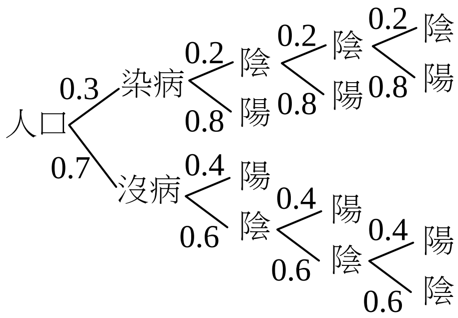
3.將$a_1=4d$ 代入

所求數列$\log a_1$，$\log a_3$，$\log a_6$的公差 $d=\log a_3-\log a_1=\log\frac{a_3}{a_1}=\log\frac{a_1+2d}{a_1}=\log\frac{6d}{4d}=\log\frac{3}{2}$ $(d>0)$

答：(3)

5.已知某地區有 30%的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為 80%，將未染病者判為陰性的機率則為 60%。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情況，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為 P；而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為 P'。試問$\frac{P}{P'}$最接近哪一選項？(1) 7 (2) 8 (3) 9 (4) 10 (5) 11

解：如右樹狀圖



$P(\text{染病}\mid\text{判為陰性})=\frac{0.3\times0.2}{0.3\times0.2+0.7\times0.6}=\frac{1}{8}$

$P'(\text{染病}\mid\text{三次皆判為陰性})=\frac{0.3\times(0.2)^3}{0.3\times(0.2)^3+0.7\times(0.6)^3}=\frac{24}{1536}=\frac{1}{64}$

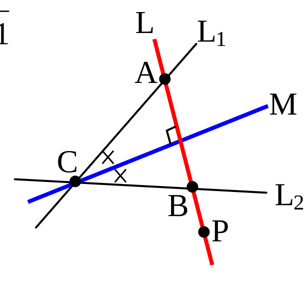
$\Rightarrow\frac{P}{P'}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{64}}=8$

答：(2)

6.設坐標平面上兩直線 L_1，L_2 的斜率皆為正，且 L_1，L_2 有一夾角的平分線斜率為$\frac{11}{9}$。另一直線 L 通過點$(2，\frac{1}{3})$且與 L_1，L_2 所圍的有界區域為正三角形，試問 L 的方程式為下列哪一選項？

(1) $11x-9y=19$ (2) $9x+11y=25$ (3) $11x+9y=25$ (4) $27x-33y=43$ (5) $27x+33y=65$

解：如圖，ΔABC 為正三角形，且直線 M 平分$\angle$ACB，$\Rightarrow$L 垂直 M，$\therefore$直線 M 的斜率為$-\frac{9}{11}$



$\Rightarrow$直線 L 通過 P$(2，\frac{1}{3})$，利用點斜式直線 L：$y-\frac{1}{3}=-\frac{9}{11}(x-2)$

$\Rightarrow$通分化簡得 $27x+33y=65$

答：(5)

二、多選題(占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7.設整數 n 滿足 $|5n-21|\geq 7|n|$。試選出正確的選項。

(1) $|5n-7n|\geq 21$ (2) $-1\leq\dfrac{7n}{5n-21}\leq 1$ (3) $7n\leq 5n-21$

(4) $(5n-21)^2\geq 49n^2$ (5)滿足題設不等式的整數 n 有無窮多個

解：當 $5n-21=0$，$n=0$，得關鍵點 $n=4.2$，$n=0$，分段討論如下：

①當 $n\geq 4.2$ 時，$5n-21\geq 7n$，$\therefore n\leq -10.5$，$\Rightarrow$得 n 無解

②當 $0\leq n<4.2$ 時，$21-5n\geq 7n$，$\therefore n\leq\dfrac{21}{12}$，得整數 $n=0$，1

③當 $n<0$ 時，$21-5n\geq -7n$，$\therefore n>-10.5$，得整數 $n=-1$，-2，…，-10

$\Rightarrow$解得滿足 $|5n-21|\geq 7|n|$ 的整數 $n=0$，1，-1，-2，…，-10

(1)(3)取 $n=0$，皆不合

(5)整數 n 有 12 個，不是無窮多個

(2) $|5n-21|\geq 7|n|=|7n|$，$\Rightarrow 1\geq\dfrac{|7n|}{|5n-21|}=\left|\dfrac{7n}{5n-21}\right|$，$\therefore -1\leq\dfrac{7n}{5n-21}\leq 1$

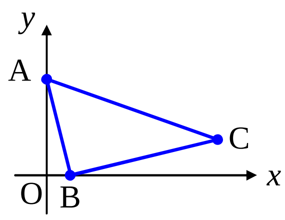
(4) $|5n-7n|$ 與 $7|n|$ 皆為正數，兩邊平方，得 $(5n-21)^2\geq 49n^2$，$\Rightarrow$亦可解得 $-\dfrac{21}{2}\leq n\leq\dfrac{7}{4}$

答：(2)(4)

8.坐標平面上，ΔABC 三頂點的坐標分別為 A(0，2)，B(1，0)，C(4，1)，試選出正確的選項。

(1) ΔABC 的三邊中，$\overline{AC}$ 最長 (2) $\sin A<\sin C$ (3) ΔABC 為銳角三角形

(4) $\sin B=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ (5) ΔABC 的外接圓半徑比 2 小



解：(1)正確，$\overline{AB}=\sqrt{5}$，$\overline{BC}=\sqrt{10}$，$\overline{AC}=\sqrt{17}$，$\therefore\overline{AC}$ 最長

(2)錯誤，根據正弦定理，$\sin A:\sin C=\overline{BC}:\overline{AB}=\sqrt{10}:\sqrt{5}$，$\therefore\sin A>\sin C$

(3)錯誤，$\because(\sqrt{17})^2>(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2$，$\Rightarrow$ΔABC 為鈍角三角形

另解：根據餘弦定理，最大角為∠B，$\Rightarrow\cos B=\dfrac{\sqrt{10}^2+\sqrt{5}^2-\sqrt{17}^2}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{5}}<0$，即∠B$>90°$，∴∠B 為鈍角

(4)正確，由(3)，利用平方關係，$\Rightarrow\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

(5)正確，設外接圓半徑 R，根據正弦定理，$R=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{5\sqrt{17}}{7\sqrt{2}}=2.08\cdots>2$

答：(1)(4)

9.已知 P 為ΔABC 內一點，且 $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$，其中 a，b 為相異實數。設 Q，R 在同一平面上，且 $\overrightarrow{AQ}=b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AR}=a\overrightarrow{AB}+(b-0.05)\overrightarrow{AC}$，試選出正確的選項。

(1) Q，R 也都在ΔABC 內 (2) $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|$ (3) ΔABP 面積＝ΔACQ 面積

(4) ΔBCP 面積＝ΔBCQ 面積 (5) ΔABP 面積＞ΔABR 面積

解：(1) P 為ΔABC 內一點，且 $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$，$\Rightarrow a$，$b$ 皆為正數，且 $a+b<1$

① $\overrightarrow{AQ}=b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}$，$\Rightarrow a$，$b$ 皆為正數，且 $a+b<1$，$\Rightarrow$Q 為ΔABC 內一點

②在 $\overrightarrow{AR}=a\overrightarrow{AB}+(b-0.05)\overrightarrow{AC}$ 中，無法判斷 $b-0.05$ 正負，與 $a+(b-0.05)$之值，$\Rightarrow$R 點位置不確定

(例如：當 $0<b<0.05$ 時，$b-0.05<0$，R 點在ΔABC 外部)

(2) $|\overrightarrow{AP}|^2=|a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}|^2$ 與 $|\overrightarrow{AQ}|^2=|b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}|^2$ 不一定相等

(3) ΔABP 面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AP}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ b\,\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|b|\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|$

ΔACQ 面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AQ}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AC}\\ b\,\overrightarrow{AB}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|b|\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}\end{vmatrix}\right|$，$\Rightarrow\Delta$ABP 面積$=\Delta$ACQ 面積

另解：ΔABP 面積$=\frac{1}{2}\left(\left|\begin{vmatrix}1 & 0\\ a & b\end{vmatrix}\right|\right)\Delta$ABC 面積$=\frac{1}{2}|b|\Delta$ABC 面積$=\frac{b}{2}(\Delta$ABC 面積)，$b>0$

ΔACQ 面積$=\frac{1}{2}\left(\left|\begin{vmatrix}0 & 1\\ b & a\end{vmatrix}\right|\right)\Delta$ABC 面積$=\frac{1}{2}|-b|\Delta$ABC 面積$=\frac{b}{2}(\Delta$ABC 面積)，$\Rightarrow\Delta$ABP 面積$=\Delta$ACQ 面積

(4)因 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(a-1)\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\Delta$ABP 面積$=\frac{1}{2}\left(\left|\begin{vmatrix}-1 & 1\\ a-1 & b\end{vmatrix}\right|\right)\Delta$ABC 面積$=\frac{1}{2}|-a-b+1|\Delta$ABC 面積

因 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(b-1)\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\Delta$BCQ 面積$=\frac{1}{2}\left(\left|\begin{vmatrix}-1 & 1\\ b-1 & a\end{vmatrix}\right|\right)\Delta$ABC 面積$=\frac{1}{2}|-a-b+1|\Delta$ABC 面積，$\Rightarrow\Delta$ABP 面積$=\Delta$BCQ 面積

(5)由(3)得ΔABP 面積$=\frac{1}{2}\left(\left|\begin{vmatrix}1 & 0\\ a & b\end{vmatrix}\right|\right)\Delta$ABC 面積$=\frac{1}{2}|b|\Delta$ABC 面積

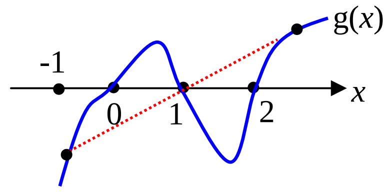
ΔABR 面積$=\frac{1}{2}\left(\left|\begin{vmatrix}1 & 0\\ a & b-0.05\end{vmatrix}\right|\right)\Delta$ABC 面積$=\frac{1}{2}|b-0.05|\Delta$ABC 面積，$\Rightarrow\Delta$ABP 面積$<\Delta$ABR 面積

答：(3)(4)

10.給定一實係數三次多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+3$。令 $\mathrm{g}(x)=f(-x)-3$，已知 $y=\mathrm{g}(x)$圖形的對稱中心為(1，0)且 $\mathrm{g}(-1)<0$。試選出正確的選項。

(1) $\mathrm{g}(x)=0$ 有三相異整數根
(2) $a<0$
(3) $y=f(x)$圖形的對稱中心為$(-1，-3)$
(4) $f(100)<0$
(5) $y=f(x)$的圖形在點$(-1，f(-1))$附近會近似於一條斜率為 a 的直線

解：$\mathrm{g}(x)=f(-x)-3$，表示將函數 $f(x)$對 y 軸對稱，再向下平移 3 單位



(1)$\mathrm{g}(x)=f(-x)-3=a(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)=-ax^3+bx^2-cx$

對稱中心為(1，0)，表示 $\mathrm{g}(1)=-a+b-c=0$ 且 $1=-\dfrac{b}{3(-a)}$

$\therefore b=3a$，$c=2a$，代入 $\mathrm{g}(x)=-ax^3+bx^2-cx=-ax^3+3ax^2-2ax=-ax(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow\mathrm{g}(x)=0$ 時，得 $x=0，1，2$ 有三相異整數根

另解：$\mathrm{g}(x)=f(-x)-3=-ax^3+bx^2-cx$

$y=\mathrm{g}(x)$圖形的對稱中心為(1，0)，$\Rightarrow\mathrm{g}(x)=-a(x-1)^3+p(x-1)=-ax^3+3ax^2+(-3a+p)x+(a-p)$

$\therefore a-p=0$，$\Rightarrow\mathrm{g}(x)=-a(x-1)^3+a(x-1)=-a(x-1)[(x-1)^2-1]=-ax(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow\mathrm{g}(x)=0$ 時，得 $x=0，1，2$ 有三相異整數根

(2)由 $\mathrm{g}(-1)=-a(-1)(-1-1)(-1-2)=6a<0$，$\therefore a<0$

(3) $f(-x)=\mathrm{g}(x)+3=a(x-1)^3+p(x-1)+3$，$\therefore f(x)=a(-x-1)^3+p(-x-1)+3$，$\Rightarrow f(x)$的對稱中心為$(-1，3)$

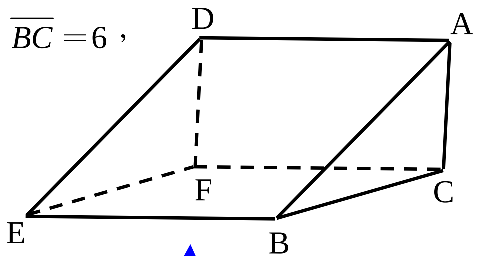
(4) $f(100)=\mathrm{g}(-100)+3=-a(-100)(-100-1)(-100-2)+3=a(100)(101)(102)+3$ 且 $a<0$，$\Rightarrow$無法判斷正負

(5)由(1)另解，得 $y=f(x)=\mathrm{g}(-x)+3=-a(-x-1)^3+a(-x-1)+3=a(x+1)^3-a(x+1)+3$

$\Rightarrow$在 $x=-1$ 處 $f(x)$近似於一條直線 $y=-a(x+1)+3$，其斜率為$-a$ 的直線

答：(1)(2)

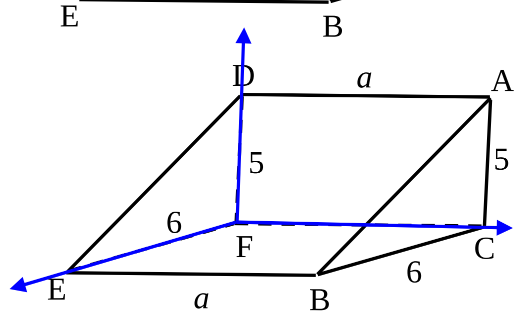
11.下圖為一個積木的示意圖，其中 ABC 為一直角三角形，∠ACB＝90°，$\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=6$，且 ADEB 與 ADFC 皆為矩形。試選出正確的選項。



(1)將此積木沿平面 ACE 切下，可切得兩個四面體

(2)平面 ADEB 與 ADFC 所夾銳角大於 45°

(3)∠CEB＜∠AEB　(4) tan∠AEC＜sin∠CEB　(5) ∠CEB＜∠AEC



解：坐標化，F(0，0，0)，E(6，0，0)，B(6，a，0)，C(0，a，0)，A(0，a，5)

(1)沿平面 ACE 切下，得四面體 ACBE 與五面體 ACEDF

(2)平面 ADEB 與 ADFC 所夾銳角為∠BAC

在ΔABC 中，tan∠BAC＝$\frac{6}{5}>1=\tan 45°$，⇒∠BAC＞45°

(3)在ΔCEB 中，tan∠CEB＝$\frac{6}{a}>0$，ΔAEB 中，tan∠AEB＝$\frac{\overline{AB}}{a}=\frac{\sqrt{61}}{a}>0$

∵$\frac{6}{a}<\frac{\sqrt{61}}{a}$，⇒ tan∠CEB＜tan∠AEB，∴∠CEB＜∠AEB

另解：$\overrightarrow{EC}=(-6，a，0)$，$\overrightarrow{EB}=(0，a，0)$，⇒cos(∠CEB)＝$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+36}\cdot a}=\frac{a}{\sqrt{a^2+36}}>0$

$\overrightarrow{EA}=(-6，a，5)$，$\overrightarrow{EB}=(0，a，0)$，⇒cos(∠AEB)＝$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+61}\cdot a}=\frac{a}{\sqrt{a^2+61}}>0$

⇒∵$\frac{a}{\sqrt{a^2+36}}>\frac{a}{\sqrt{a^2+61}}$，⇒ cos(∠CEB)＞cos(∠AEB)，∴∠CEB＜∠AEB

(4)在直角ΔAEC 中，$\overline{EC}=\sqrt{a^2+36}$，⇒ tan∠AEC＝$\frac{5}{\sqrt{a^2+36}}$

在直角ΔBEC 中，sin∠CEB＝$\frac{6}{\sqrt{a^2+36}}$，⇒ tan∠AEC＜sin∠CEB

(5)由(4)得 sin ∠AEC＝$\frac{5}{\sqrt{a^2+61}}$，與 sin∠CEB＝$\frac{6}{\sqrt{a^2+36}}$，⇒∵$\frac{5}{\sqrt{a^2+61}}<\frac{6}{\sqrt{a^2+36}}$，⇒∠AEC＜∠CEB

另解：由(3)，cos(∠CEB)＝$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+36}\cdot a}=\frac{a}{\sqrt{a^2+36}}>0$

在直角ΔAEC 中，cos(∠AEC)＝$\frac{a^2+36}{\sqrt{a^2+61}\cdot\sqrt{a^2+36}}>0$

$$\because \frac{a^2+36}{\sqrt{a^2+61}\cdot\sqrt{a^2+36}}-\frac{a}{\sqrt{a^2+36}}=\frac{(a^2+36)-a\sqrt{a^2+61}}{\sqrt{a^2+61}\cdot\sqrt{a^2+36}}=\frac{\sqrt{a^4+72a^2+36^2}-\sqrt{a^4+61a^2}}{\sqrt{a^2+61}\cdot\sqrt{a^2+36}}>0$$

⇒ cos(∠AEC)＞cos(∠CEB)，∴∠AEC＜∠CEB

答：(2)(3)(4)

12.設 $f(x)$，g(x)皆為實係數多項式，其中 g(x)是首項係數為正的二次式。已知$(g(x))^2$除以 $f(x)$的餘式為 g(x)，且 $y=f(x)$的圖形與 x 軸無交點。試選出<u>不可能</u>是 y＝g(x)圖形頂點的 y 坐標之選項。

(1)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2) 1　(3) $\sqrt{2}$　(4) 2　(5)π

解：根據題意，設$(g(x))^2=f(x)Q(x)+g(x)$，⇒ $g(x)[g(x)-1]=f(x)Q(x)$

∵g(x)是首項係數為正且 $y=f(x)$的圖形與 x 軸無交點，表示 $f(x)>0$ (恆正)

($(g(x))^2$ 為四次式，餘式 g(x)為二次式，故除式 $f(x)$為三次、四次式，商式 Q(x)為常數。但是 $f(x)$的圖形與 x 軸無交點，則 $f(x)$不為奇數次，⇒除式 $f(x)$為四次式，且 $f(x)>0$ (恆正)，圖形在 x 軸上方)

⇒ $g(x)[g(x)-1]=f(x)Q(x)>0$，得知 $g(x)>1$ 或 $g(x)<0$

函數 g(x)之值，表示函數 y＝g(x)圖形頂點的 y 坐標，⇒$y>1$ 或 $y<0$

答：(1)(2)

三、選填題(占 25 分)

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13.有一款線上遊戲推出「十連抽」的抽卡機制，「十連抽」意思為系統自動做十次的抽卡動作。若每次「十連抽」需用 1500 枚代幣，抽中金卡的機率在前九次皆為 2%，在第十次為 10%。今某生有代幣 23000 枚，且不斷使用「十連抽」，抽到不能再抽為止。則某生抽到金卡張數的期望值為 ⑬-1 . ⑬-2 張。

解：代幣 23000 枚，每次需用 1500 枚，$\therefore \frac{23000}{1500}=15.3\cdots$，最多可使用「十連抽」連抽 15 次

$\Rightarrow$機率為 2%共抽 15×9＝135 次，機率為 10%共抽 15×1＝15 次，如右表

期望值＝135×2%＋15×10%×＝4.2(張)

事件	1~9 次	第 10 次
數值	135	10
機率	2%	10%

答：4.2

14.已知 a、b 為實數，且方程組 $\begin{cases} ax+5y+12z=4 \\ x+ay+\frac{8}{3}z=7 \\ 3x+8y+az=1 \end{cases}$ 恰有一組解，又此方程組經過一系列的高斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right]$。則 $a=$ ⑭-1，$b=\dfrac{⑭\text{-}2}{⑭\text{-}3}$ (化為最簡分數)

解：1.由 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right]$，$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+bz=7 \\ by+5z=-5 \\ bz=0 \end{cases}$，得知 z＝0，$y=\frac{-5}{b}$，$x=7-2y=7+\frac{10}{b}$

2.代回 $3x+8y+az=1$，$\Rightarrow 3(7+\frac{10}{b})+8(\frac{-5}{b})=1$，得 $b=\frac{1}{2}$，則 $x=7+\frac{10}{b}=27$，$y=\frac{-5}{b}=-10$

3.代回 $ax+5y+12z=4$，$\Rightarrow 27a+5(-10)=4$，得 $a=2$

另解：1.由 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$，$\Rightarrow \begin{cases} by+5z=-5 \\ bz=0 \end{cases}$，得知 z＝0，$b=\frac{-5}{y}$

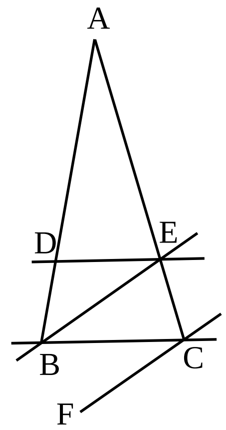
2.將 z＝0 代入 $\begin{cases} ax+5y+12z=4 \\ x+ay+\frac{8}{3}z=7 \\ 3x+8y+az=1 \end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases} ax+5y=4 \\ x+ay=7 \\ 3x+8y=1 \end{cases}$

分別由 $\begin{cases} ax+5y=4 \\ 3x+8y=1 \end{cases}$ 解得 $x=\frac{27}{8a-5}$，與 $\begin{cases} x+ay=7 \\ 3x+8y=1 \end{cases}$ 解得 $x=\frac{56-a}{8-3a}$

$\Rightarrow$利用 $x=\frac{27}{8a-5}=\frac{56-a}{8-3a}$，得 $a=2$，代回 $x=\frac{27}{8a-5}=27$

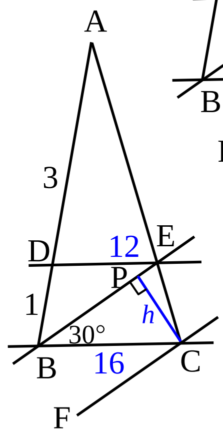
3.將 $a=2$，$x=27$ 代入 $x+ay=7$，得 $y=-10$，代回 $b=\frac{-5}{y}=\frac{-5}{-10}=\frac{1}{2}$，$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

答：$a=2$，$b=\frac{1}{2}$



15.如圖，王家有塊三角形土地ΔABC，其中$\overline{BC}$＝16 公尺。政府擬徵收其中梯形 DBCE 部分，開闢以直線 DE，BC 為邊線的馬路，其路寬為 h 公尺，這讓王家土地只剩原有面積的$\frac{9}{16}$。經協商，改以開闢平行直線 BE，FC 為邊線的馬路，且路寬不變，其中∠EBC＝30°，則只需徵收ΔBCE 區域。依此協商，王家剩餘的土地ΔABE 有(15-1)(15-2)(15-3)平方公尺。

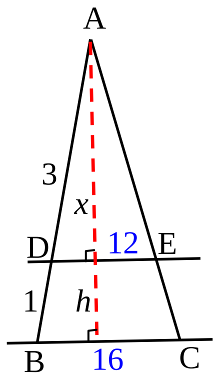
解：1.如圖，過 C 作$\overline{CP}\perp\overline{BE}$於 P，則在ΔBCP 中，得知$\overline{CP}=h=\frac{1}{2}\overline{BC}=8$ 公尺



2.因$\frac{\Delta ADE}{\Delta ABC}=\frac{9}{16}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2}$，∴$\overline{AD}:\overline{AB}=3:4=\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{DE}:16$，⇒$\overline{DE}=12$

3.∵路寬不變，∴線 DE，BC 的距離＝h＝8 公尺

如右圖，$\overline{AD}:\overline{DB}=3:1=x:h=x:8$，⇒$x=24$



4.土地ΔABE 面積＝ΔADE 面積＋ΔBDE 面積

$=\frac{1}{2}(x)\times\overline{DE}+\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times h$

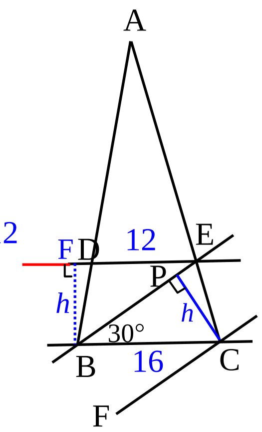
$=\frac{1}{2}\times24\times12+\frac{1}{2}\times12\times8$

$=144+48=192$

另解：1.如圖，過 C 作$\overline{CP}\perp\overline{BE}$於 P，則在ΔBCP 中，得知$\overline{CP}=h=\frac{1}{2}\overline{BC}=8$ 公尺

∵路寬不變，∴線 DE，BC 的距離＝$\overline{BF}=h=8$ 公尺

在ΔBEF 中，∠BED＝30°，$\overline{BE}=2h=16$ 公尺



2.因$\frac{\Delta ADE}{\Delta ABC}=\frac{9}{16}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2}$，∴$\overline{AD}:\overline{AB}=3:4=\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{DE}:16$，⇒$\overline{DE}=12$

3. ΔBDE 面積＝$\frac{1}{2}\overline{DE}\times h=\frac{1}{2}\times12\times8=48$

ΔADE 面積：ΔBDE 面積＝$\overline{AD}:\overline{DB}=3:1$，⇒ΔADE 面積＝3×48＝144

⇒土地ΔABE 面積＝ΔADE 面積＋ΔBDE 面積＝144＋84＝192

另解：梯形 DBCE 面積＝$\frac{1}{2}(12+16)\,h=224$

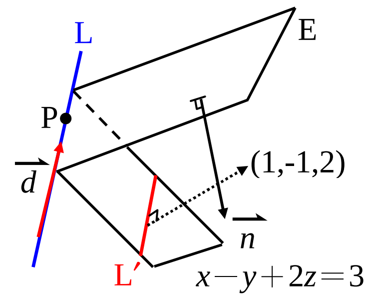
ΔADE 面積：梯形 DBCE 面積＝9：7＝ΔADE 面積：112，⇒ΔADE 面積＝144

ΔBDE 面積：梯形 DBCE 面積＝12：16＝ΔBDE 面積：112，⇒ΔBDE 面積＝84

⇒土地ΔABE 面積＝ΔADE 面積＋ΔBDE 面積＝144＋84＝192

答：192

16.坐標空間中，平面 $x-y+2z=3$ 上有兩相異直線 L：$\frac{x}{2}-1=y+1=-2z$ 與 L′。已知 L 也在另一平面 E 上，且 L′在 E 的投影與 L 重合。則 E 的方程式為 $x+$ 16-1 16-2 $y+$ 16-3 16-4 $z=$ 16-5



解：1.直線 L：$\frac{x}{2}-1=y+1=-2z$，$\Rightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$取 L 的方向向量 $\overrightarrow{d}=(4，2，-1)$，且通過點 P(2，－1，0)

2.如圖，∵L′在 E 的投影與 L 重合(表示平面 E 與平面 $x-y+2z=3$ 垂直)

$\Rightarrow$ L′// L，且取 L′的方向向量也為 $\overrightarrow{d}=(4，2，-1)$

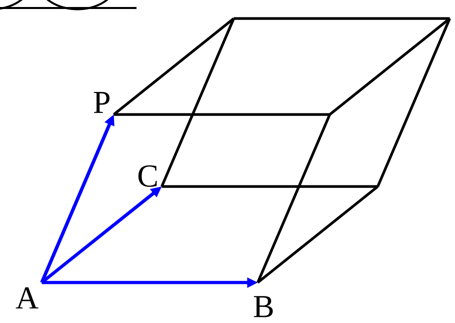
3.設平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}$，$\Rightarrow \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{d}$，且 $\overrightarrow{n}\perp(1，-1，2)$(平面 $x-y+2z=3$ 的法向量)

$\Rightarrow \overrightarrow{n}\,//\,[\overrightarrow{d}\times(1，-1，2)]=(3，-9，-6)=3(1，-3，-2)$，取平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}=(1，-3，-2)$

4.設平面 E：$x-3y-2z=k$，通過點(2，－1，0)，代入 E，得 $k=5$，$\Rightarrow$得知平面 E：$x-3y-2z=5$

答：$x-3y-2z=5$

17.坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為(－1，2，1)，(－4，1，3)，(2，0，－3)，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為 17-1 17-2



解：1.令 A(－1，2，1)，B(－4，1，3)，C(2，0，－3)，作圖如右

2.設在 xy 平面上的頂點為 P(x，y，0)，

點 P 與原點距離為 1，∴$\sqrt{x^2+y^2}=1$，即 $x^2+y^2=1$

3. $\overrightarrow{AP}=(x+1，y-2，-1)$，$\overrightarrow{AB}=(-3，-1，2)$，$\overrightarrow{AC}=(3，-2，-4)$

平行六面體體積＝$\left|\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}\right|=|8x-6y+11|$

4.利用柯西不等式 $(x^2+y^2)(8^2+(-6)^2)\geq(8x-6y)^2$，即 $100\geq(8x-6y)^2$

$\Rightarrow -10\leq 8x-6y\leq 10$，$\Rightarrow 1\leq 8x-6y+11\leq 21$，所求 $|8x-6y+11|$ 的最大值為 21

$\Rightarrow$平行六面體的最大體積為 21

答：21

第貳部分、混合題或非選擇題(占 15 分)

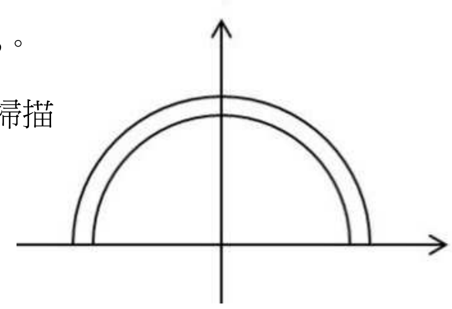
說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標餘題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標平面上有一環狀區域由圓 $x^2+y^2=3$ 的外部與圓 $x^2+y^2=4$ 的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 C_1：$x^2+y^2=3\ (y\geq 0)$

C_2：$x^2+y^2=4\ (y\geq 0)$上移動。開始時掃描棒黑端在點 A($\sqrt{3}$，0)，白端在 C_2 的點 B。

接著黑、白兩端各沿著 C_1、C_2 逆時針移動，直至白端碰到 C_2 的點 B′(－2，0)便停止掃描



18.試問點 B 的坐標為下列哪一選項？(單選題，3 分)

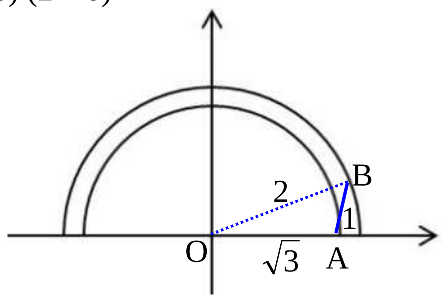
(1) (0，2)　(2) (1，$\sqrt{3}$)　(3) ($\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$)　(4) ($\sqrt{3}$，1)　(5) (2，0)

解：根據題意，作圖如右，連接$\overline{OB}=2$

在ΔOAB 中，滿足$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2$，即$\angle$OAB＝90°

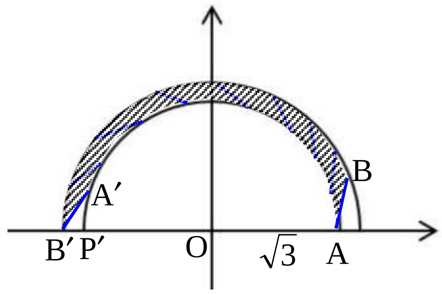
$\Rightarrow$B($\sqrt{3}$，1)

答：(4)



19.令 O 為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為 A′，B′。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域 R；並於求解區內求 cos∠OA′B′及點 A′的極坐標。(非選擇題，6 分)

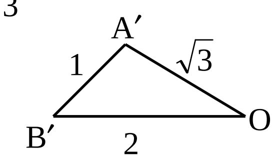
解：1.掃描棒掃過的區域 R，如圖斜線區域



2.(1)在ΔOA′B′中，根據餘弦定理 $\cos\angle OA'B'=\dfrac{1^2+\sqrt{3}^2-2^2}{2\times1\times\sqrt{3}}=0$

(2)由(1)，得知$\angle$A′OB′＝30°，$\therefore\angle$AOA′＝150°

點 A′的極坐標為[$\sqrt{3}$，150°]



另解：設 A′(x，y)

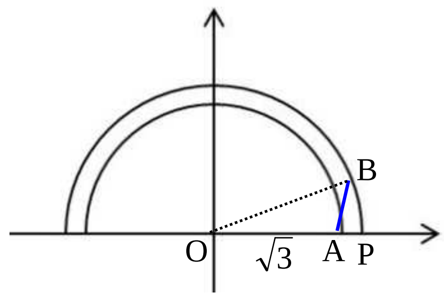
滿足 A′在半圓 C_1：$x^2+y^2=3$ 上，$\Rightarrow x^2+y^2=3$，且$\overline{A'B'}=1$，$\Rightarrow (x+2)^2+y^2=1$

$\begin{cases}x^2+y^2=3\\(x+2)^2+y^2=1\end{cases}$，得 $x=-\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\Rightarrow$A′$\left(-\dfrac{3}{2}，\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$＝[$\sqrt{3}$，150°]

20.(承 19 題)令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求 Ω 與 R 的面積。(非選擇題，6 分)

解：(1)Ω 的面積＝$\dfrac{1}{4}$(圓 C_1 面積－圓 C_2 面積)－弓形 BAP 面積

$=\dfrac{1}{4}(\pi\times2^2-\pi\times\sqrt{3}^2)-\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}$



其中弓形 BAP 面積＝扇形 BOP 面積－直角ΔOAB 面積

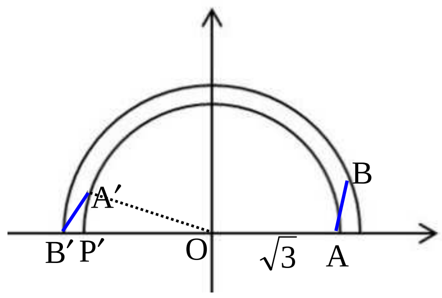
$=\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)區域 A′B′P′面積＝直角ΔOA′B′面積－扇形 A′OP′面積

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}^2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

R 的面積＝$\dfrac{1}{2}$(圓 C_1 面積－圓 C_2 面積)－弓形 BAP 面積－區域 A′B′P′面積

$=\dfrac{1}{2}(\pi\times2^2-\pi\times\sqrt{3}^2)-\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5\pi}{12}$



另解：如右圖，兩斜線區域面積相等

R 的面積＝(圓 C_1 面積－圓 C_2 面積)×$\dfrac{150^0}{360^0}$

$=(\pi\times2^2-\pi\times\sqrt{3}^2)\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{5\pi}{12}$