

105 年大學入學指定科目考試 數學乙 試題

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 下列哪一個選項是方程式 $7x^5 - 2x^4 + 14x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = 0$ 的根？

- (1) -1 (2) $\frac{1}{7}$ (3) $-\frac{1}{7}$ (4) $\frac{2}{7}$ (5) $-\frac{2}{7}$

解 1：利用因式分解：

$$7x^5 - 2x^4 + 14x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = (7x^5 + 14x^3 + 7x) + (-2x^4 - 4x^2 - 2)$$

$$0 = 7x(x^4 + 2x^2 + 1) - 2(x^4 + 2x^2 + 1) = (x^4 + 2x^2 + 1)(7x - 2) = (7x - 2)(x^2 + 1)^2, \therefore x = \frac{2}{7}$$

解 2：利用牛頓定理(一次因式檢驗法)

設 $f(x) = 7x^5 - 2x^4 + 14x^3 - 4x^2 + 7x - 2$ ，且 $ax - b$ 為 $f(x)$ 的一次因式， $(a, b) = 1$ $\therefore a \mid 7, b \mid 2$ ，取 $a = 1, 7, b = 1, -1, 2, -2$ $\Rightarrow f(x)$ 可能因式有 $x - 1, x + 1, 7x - 1, 7x + 1, x - 2, x + 2, 7x - 2, 7x + 2$ 利用綜合除法，得知 $f(\frac{2}{7}) = 0$ ，即 $f(x) = 7x^5 - 2x^4 + 14x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = (7x - 2)(x^4 + 2x^2 + 1) = 0, \therefore x = \frac{2}{7}$

答：(4)

出處：第一冊(多項式函數、牛頓定理)

2. 考慮有理數 $\frac{n}{m}$ ，其中 m, n 為正整數且 $1 \leq mn \leq 8$ 。則這樣的數值(例如 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{4}$ 同值，只算一個)共有幾個？

- (1) 14 個 (2) 15 個 (3) 16 個 (4) 17 個 (5) 18 個

解：由 $1 \leq mn \leq 8$ ，分析如下表：

n	1~8	1,2,3,4	1,2	1,2	1	1	1	1
m	1	2	3	4	5	6	7	8

當 $m = 1$ 時， $n = 1 \sim 8, \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}$ 有 8 個當 $m = 2$ 時， $n = 1, 2, 3, 4, \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$ 有 $4 - 2 = 2$ 個 ($\frac{2}{2}, \frac{4}{2}$ 表示重複)當 $m = 3$ 時， $n = 1, 2, \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 有 2 個當 $m = 4$ 時， $n = 1, 2, \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ 有 1 個當 $m = 5, 6, 7, 8$ 時， $n = 1, \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ 有 4 個共有 $8 + 2 + 2 + 1 + 4 = 17$ 個

答：(4)

出處：第一冊(數與式)

3. 坐標平面上有兩向量 $\vec{u} = (5, 10), \vec{v} = (-4, 2)$ 。請問下列哪一個向量的長度最大？

- (1) $-3\vec{u}$ (2) $6\vec{v}$ (3) $-2\vec{u} - 5\vec{v}$ (4) $2\vec{u} - 5\vec{v}$ (5) $\vec{u} + 7\vec{v}$

解 1：(1) $-3\vec{u} = -3(5, 10), \therefore |-3\vec{u}| = |-3(5, 10)| = 3\sqrt{125} = \sqrt{1125}$ (2) $6\vec{v} = 6(-4, 2), \therefore |6\vec{v}| = |6(-4, 2)| = 6\sqrt{20} = \sqrt{720}$ (3) $-2\vec{u} - 5\vec{v} = (10, -30), \therefore |-2\vec{u} - 5\vec{v}| = |(10, -30)| = \sqrt{1000}$ (4) $2\vec{u} - 5\vec{v} = (30, 10), \therefore |2\vec{u} - 5\vec{v}| = |(30, 10)| = \sqrt{1000}$ (5) $\vec{u} + 7\vec{v} = (-23, 24), \therefore |\vec{u} + 7\vec{v}| = |(-23, 24)| = \sqrt{1105}$

6. 設 $a = 10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $b = a^{\sqrt{2}}$ 。請選出正確的選項。

- (1) $1 < a$ (2) $a < \sqrt{3}$ (3) $a^2 < b^{\sqrt{3}}$ (4) $10^{0.4} < b < 10^{0.5}$ (5) $(ab)^{\sqrt{2}} < 10$

解：(1) $10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10^{1-0.707} = 10^{0.293} > 10^0 = 1$ (錯誤)

(2) $\because \sqrt{3} = 10^{\log \sqrt{3}} = 10^{0.2386}$, $\Rightarrow a = 10^{0.293} > 10^{0.2386} = \sqrt{3}$ (錯誤)

(3) $a^2 < b^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{6}}$ (正確)

(4) $b = a^{\sqrt{2}} = (10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}})^{\sqrt{2}} = 10^{\sqrt{2}-1} = 10^{0.414}$, $\therefore 10^{0.4} < b = 10^{0.414} < 10^{0.5}$ (正確)

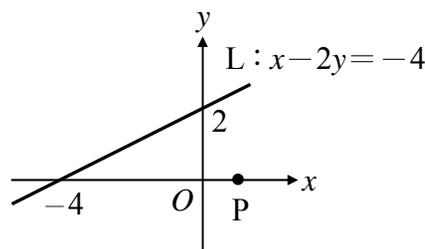
(5) $(ab)^{\sqrt{2}} = (a \cdot a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (a^{1+\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (10^{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(1+\sqrt{2})})^{\sqrt{2}} = 10^{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})} = 10^1 = 10$ (錯誤)

答：(3)(4)

出處：第二冊(指數與對數函數)

7. 坐標平面上 O 為原點， P 點坐標為 $(1, 0)$ ，直線 L 的方程式為 $x - 2y = -4$ 。請選出正確的選項。

- (1) 在直線 L 上可以找到一點 A ，滿足向量 \vec{OP} 與 \vec{OA} 平行
 (2) 在直線 L 上可以找到一點 B ，滿足向量 \vec{OP} 與 \vec{OB} 垂直
 (3) 在直線 L 上可以找到一點 C ，滿足向量 \vec{OC} 與 \vec{PC} 垂直
 (4) 在直線 L 上可以找到一點 D ，滿足向量 $\vec{PD} = 2$
 (5) 在直線 L 上可以找到一點 E ，滿足 $\triangle EOP$ 為等腰三角形



解：(1) 如圖(1)，找到 $A(-4, 0) \in L$ ，使得 \vec{OP} 與 \vec{OA} 平行

(2) 如圖(2)，找到 $B(0, 2) \in L$ ，使得 \vec{OP} 與 \vec{OB} 垂直

(3) 設 $C(-4+2k, k) \in L$, $\therefore \vec{OC}$ 垂直 \vec{PC}

$$\therefore \vec{OC} \cdot \vec{PC} = (-4+2k, k) \cdot (-5+2k, k) = 0$$

$$\Rightarrow 5k^2 - 18k + 20 = 0$$

$$\therefore \text{判別式} = (-18)^2 - 4(5)(20) = -76 < 0, \therefore \text{無實數根}$$

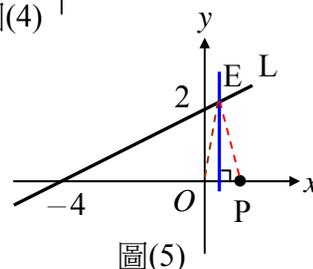
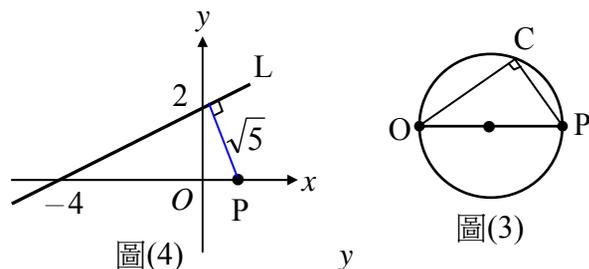
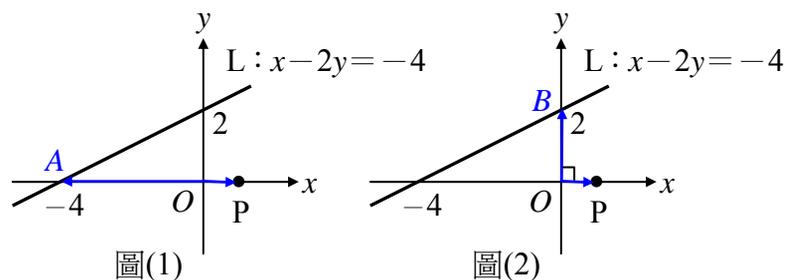
\Rightarrow 即 k 不存在， \therefore 找不到一點 C

另解： $\because \vec{OC}$ 與 \vec{PC} 垂直， \therefore 點 C 必在以 O, P 為直徑的圓周上

$\therefore C$ 不在直線 L 上，如圖(3)

(4) $\because d(P, L) = \frac{|1-0+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \sqrt{5} > 2$ ，如圖(4)， \therefore 找不到點 D

(5) 作 \vec{OP} 的中垂線交 L 於 E 點，則 $\triangle EOP$ 為等腰三角形，如圖(5)



答：(1)(2)(5)

出處：第三冊(平面向量應用)

8. 某社區有一千位居民，其個人月所得少於 10,000 元者占 30%，介於 10,000 元及 20,000 元間者 10%，介於 20,000 元及 40,000 元間者占 30%，介於 40,000 元及 80,000 元間者占 30%。請選出正確的選項。

- (1) 該社區個人月所得的中位數介於 20,000 元及 40,000 元間
 (2) 使用簡單隨機抽樣自該社區中抽出一位居民，其個人月所得在上述的四個區間中，以介於 10,000 元及 20,000 元間的機率最低
 (3) 該社區的個人月所得平均，不可能高過 40,000 元
 (4) 該社區的個人月所得平均，不可能低過該社區的個人月所得中位數
 (5) 若該社區新搬入一位居民，其月所得為 200,000 元，則該社區的個人月所得平均將增加，但增加量不會多過 200 元

解：根據題意，製作資料分配表如下：

月所得(元)	0~1 萬	1~2 萬	2~4 萬	4~8 萬
比例(%)	30%	10%	30%	30%
累積比例	30%	40%	70%	100%

(1)所得的中位數位居 50%，由分配表得知中位數在 2~4 萬元間

(2)由分配表得知，比例最低為 1~2 萬元，占 10%，故隨機抽樣的機率為最低

(3)(4)最低月所得平均數 = $0 \times 30\% + 1 \times 10\% + 2 \times 30\% + 4 \times 30\% = 1.9$ (萬元)

最高月所得平均數 = $1 \times 30\% + 2 \times 10\% + 4 \times 30\% + 8 \times 30\% = 4.1$ (萬元)， $\therefore 1.9$ (萬元) \leq 月所得平均 ≤ 4.1 (萬元)

(5)將 20 萬元平均給 $1000+1$ 人， $\therefore \frac{200000}{1001} < \frac{200000}{1000} = 200$ ， \Rightarrow 增加量不會多過 200 元

答：(1)(2)(5)

出處：第二冊(數據分析)

三、選填題(占 18 分)

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(9-18)

2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分

A.不透明袋中有三顆白球及三顆紅球。從袋中每次取出一球依序置於桌面，每次每顆球被取出的機率相同。全部取出後，

前三顆球中有相鄰兩球同為白球的機率為 $\frac{\textcircled{9}}{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。(請化為最簡分數)

解：前三顆球中有相鄰兩球同為白球的可能情形與機率，如下表：

可能情形	白白白	白白紅	紅白白
機率	$\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$	$\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$	$\frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{20}$

$$\text{機率} = \frac{1}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$$

答： $\frac{7}{20}$

出處：第二冊(機率)

B.設 x, c 為實數，方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ 。已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍(其中 $c \neq 0$)，

則數對 $(x, c) = (\textcircled{12}, \frac{\textcircled{13}}{\textcircled{14}\textcircled{15}})$ 。(請化為最簡分數)

解 1：(1) $\det A = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 3x + 4$ ， \Rightarrow A 的反方陣為 $\frac{1}{3x+4} \begin{bmatrix} x & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$(2) B \text{ 的 } c \text{ 倍} = c \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c & -2c \\ 2c & cx \end{bmatrix}$$

$$(3) \frac{1}{3x+4} \begin{bmatrix} x & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c & -2c \\ 2c & cx \end{bmatrix}, \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2c(3x+4) \\ 3 = cx(3x+4) \end{cases}, \text{相除, 解得} \begin{cases} x = 3 \\ c = \frac{1}{13} \end{cases}$$

解 2：根據題意 $A^{-1} = cB$ ，利用左乘 A ， $\Rightarrow AA^{-1} = AcB$ ， $\therefore I = cAB$ ， I 是單位矩陣

$$\text{即 } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 13 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2+9 \end{bmatrix}, \Rightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \\ 1=13c \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} x=3 \\ c=\frac{1}{13} \end{cases}$$

答： $(3, \frac{1}{13})$

出處：第四冊(矩陣)

C. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等則差數列。已知 $a_2 + a_4 + a_6 = 186$ ， $a_3 + a_7 = 110$ 。令 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

則極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{\textcircled{16}\textcircled{17}}{\textcircled{18}}$ 。(請化為最簡分數)

解：(1) 設 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a_1 ，公差為 d

$$\text{由 } a_2 + a_4 + a_6 = 186, \Rightarrow (a_1 + d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 186, \text{ 得 } 3a_1 + 9d = 186, \text{ 化簡 } a_1 + 3d = 62$$

$$\text{由 } a_3 + a_7 = 110, \Rightarrow (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) = 110, \text{ 得 } 2a_1 + 8d = 110, \text{ 化簡 } a_1 + 4d = 55$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + 3d = 62 \\ a_1 + 4d = 55 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 83 \\ d = -7 \end{cases}, \therefore S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n[2 \times 83 + (n-1)(-7)]}{2} = \frac{-7n^2 + 173n}{2}$$

$$(2) \therefore \frac{S_n}{n^2} = \frac{-7n^2 + 173n}{2n^2}, \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n^2 + 173n}{2n^2} = \frac{-7}{2}$$

答： $\frac{-7}{2}$

出處：選修數乙上(極限)

—— — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 —— — — —

第貳部份：非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、……)同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設隨機變數 X 表示投擲一不公正骰子出現的點數， $P(X=k)$ 表示隨機變數 X 取值為 k 的機率。已知 X 的機率分布如下表： $(x, y$ 為未知常數)

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	x	y	y	x	y	y

又知 X 的期望值等於 3。

(1) 試求 x, y 之值。(6 分)

(2) 投擲此骰子兩次，試求點數和為 3 的機率。(6 分)

解：(1) 機率總和為 1， $\therefore x + y + y + x + y + y = 1$ ， $\therefore 2x + 4y = 1$

期望值等於 3， $\therefore 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot y + 4 \cdot x + 5 \cdot y + 6 \cdot y = 3$ ， $\therefore 5x + 16y = 3$

$$\Rightarrow \text{由 } \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 5x + 16y = 3 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{12} \end{cases}$$

(2)由(1)得知 $P(X=1)=\frac{1}{3}$ ， $P(X=2)=\frac{1}{12}$ ，且點數和為 3 的可能情形與機率如下表：

可能情形	(1, 2)	(2, 1)
機率	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{36}$	$\frac{1}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$

$$\therefore \text{機率} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

出處：選修數乙下(機率)

二、某農業公司計畫向政府承租一筆平地和一筆山坡地，分別種植平地作物 A 和山坡地作物 B。已知平地每一單位面積的年租金是 30 萬元，山坡地每一單位面積的年租金是 20 萬元；公司一年能夠提供土地租金的上限是 80 萬元。平地作物 A 的種植成本每單位面積一年是 40 萬元，山坡地作物 B 的種植成本每單位面積一年是 50 萬元；公司一年能夠提供種植成本的上限是 130 萬元。每年收成後，作物 A 每單位面積的利潤是 120 萬元，作物 B 每單位面積的利潤是 90 萬元。請問公司一年應租平地和山坡地各多少單位面積，收成後可以獲得最大利潤？又此時的最大利潤為何？

(12 分)(註：所租土地的面積並不限制一定要是整數單位)

解：1. 根據題意，列表如下：

	租金	成本	利潤	設
平地(作物 A)	30 萬	40 萬	120 萬	x 單位
山坡地(作物 B)	20 萬	50 萬	90 萬	y 單位
限制	≤ 80 萬	≤ 130 萬	最大	

設租平地 x 單位面積，山坡地 y 單位面積

$$\text{列聯立不等式} \begin{cases} x, y \geq 0 \\ 30x + 20y \leq 80 \\ 40x + 50y \leq 130 \end{cases}, \text{目標函數 } f(x, y) = 120x + 90y \text{ 的最大值}$$

2. 作圖求可行解區域，如右圖

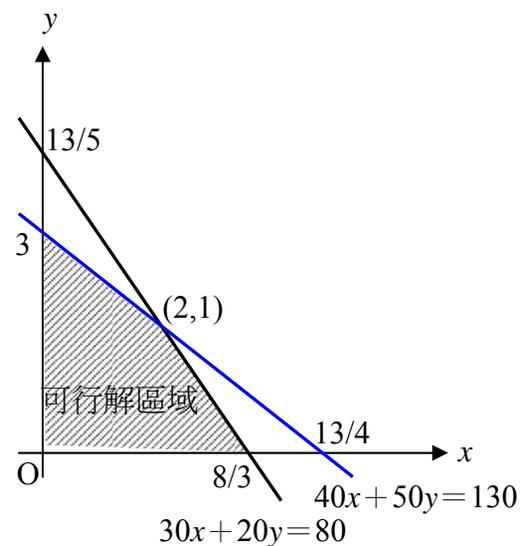
3. 利用頂點法求最大值

頂點	(0, 3)	(0, 0)	$(\frac{8}{3}, 0)$	(2, 1)
$f(x, y)$	270	0	320	330

$$\therefore \text{當} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{時，有最大值 330}$$

即租平地 2 單位，山坡地 1 單位

可獲得最大利潤為 330 萬元



出處：第三冊(線性規劃)