

102 年大學入學指定科目考試 數學乙 試題

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 12 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 a, b, c 為實數，且二次多項式 $f(x) = ax(x-1) + bx(x-3) + c(x-1)(x-3)$ 滿足 $f(0) = 6, f(1) = 2, f(3) = -2$ 。請問 $a+b+c$ 等於下列哪一個選項？

- (1) 0 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $-\frac{4}{3}$

解 1：利用拉格朗日二次插值多項式：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} + f(1) \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} + f(3) \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} \\ &= 6 \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} + 2 \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} + (-2) \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} \end{aligned}$$

$$\text{整理得 } f(x) = 2(x-1)(x-3) - x(x-3) - \frac{1}{3}x(x-1), \text{ 知 } a+b+c = \left(-\frac{1}{3}\right) + (-1) + 2 = \frac{2}{3}$$

解 2：利用牛頓式，即令 $f(x) = ax(x-1) + bx(x-3) + c(x-1)(x-3)$

$$\text{當 } x=0 \text{ 時, } f(0) = c(0-1)(0-3) = 6, \text{ 得 } c = 2$$

$$\text{當 } x=1 \text{ 時, } f(1) = b(1-3) = 2, \text{ 得 } b = -1$$

$$\text{當 } x=3 \text{ 時, } f(3) = a(3)(3-1) = -2, \text{ 得 } a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a+b+c = \left(-\frac{1}{3}\right) + (-1) + 2 = \frac{2}{3}$$

答：(2)

出處：第一冊(Ch2 多項式函數)

2. 綜合數種糧食的【糧食自給率】定義為 $\frac{A}{B}$ ，其中 A 為「每一種糧食之國內生產量乘以該糧食每單位產生熱量之後的總和」，B 為「每一種糧食之國內消費量乘以該糧食每單位產生熱量之後的總和」。已知甲、乙、丙三種糧食相關數據如下表：

糧食	國內生產量 (單位：千公噸)	國內消費量 (單位：千公噸)	單位糧食產生的熱量 (單位：大卡/每百公克)
甲	1000	1200	300
乙	280	320	100
丙	100	1000	600

請問綜合甲、乙、丙這三種糧食的【糧食自給率】最接近下列哪一個選項？

- (1) 37% (2) 39% (3) 41% (4) 43% (5) 45%

解：1 千公噸 = 10^7 百公克

$$\frac{A}{B} = \frac{(1000 \times 300 + 280 \times 100 + 100 \times 600) \times (\text{千公噸})}{(1200 \times 300 + 320 \times 100 + 1000 \times 600) \times (\text{千公噸})} = \frac{388 \times 10^{10} (\text{百公克})}{992 \times 10^{10} (\text{百公克})} \approx 39.1\%$$

答：(2)

出處：第二冊(Ch4 數據分析之貝氏定理)

二、多選題(占 40 分)

說明：第 3 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

3. 坐標平面上兩點(4, 1)和(5, 9)在直線 $3x - y - k = 0$ 的兩側, 其中 k 為整數。請選出正確的選項?

- (1) 滿足上式的 k 最少有 5 個
 (2) 所有滿足上式的 k 的總和是 35
 (3) 所有滿足上式的 k 中, 最小的是 7
 (4) 所有滿足上式的 k 的平均是 9
 (5) 所有滿足上式的 k 中, 奇數與偶數的個數相同

解: 根據題意:

點(4, 1)和(5, 9)在直線 $3x - y - k = 0$ 的兩側, $(12 - 1 - k)(15 - 9 - k) = (11 - k)(6 - k) < 0$

$\Rightarrow 6 < k < 11$, 且 k 為整數, 得知 $k = 7, 8, 9, 10$

(1) k 只有 4 個

(2) k 的總和 $= 7 + 8 + 9 + 10 = 34$

(3) 最小的 k 是 7

(4) k 的平均 $= \frac{7+8+9+10}{4} = \frac{17}{2} = 8.5$

(5) k 值中, 奇數有 2 個(7, 9), 偶數有 2 個(8, 10)

答: (3)(5)

出處: 第一冊(Ch2 多項式函數), 第三冊(Ch2 直線與圓)

4. 下列有關循環小數的敘述中, 請選出正確的選項。

(1) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = 0.\overline{6} + 0.\overline{4}$ (2) $0.\overline{72} + 0.\overline{28} = 1.\overline{1}$ (3) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = 1$

(4) $0.\overline{5} + 0.\overline{5} = 1.\overline{1}$ (5) $0.\overline{49} = 0.5$

解: (1) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = \frac{7}{9} + \frac{3}{9} = \frac{10}{9}$, $0.\overline{6} + 0.\overline{4} = \frac{6}{9} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}$, \therefore 正確

(2) $0.\overline{72} + 0.\overline{28} = \frac{72}{99} + \frac{28}{99} = \frac{100}{99}$, $1.\overline{1} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$, \therefore 不正確

(3) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = \frac{7}{9} + \frac{3}{9} = \frac{10}{9} \neq 1$, \therefore 不正確

(4) $0.\overline{5} + 0.\overline{5} = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{10}{9}$, $1.\overline{1} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$, \therefore 正確

(5) $0.\overline{49} = \frac{45}{90} = \frac{5}{10} = 0.5$, \therefore 正確

答: (1)(4)(5)

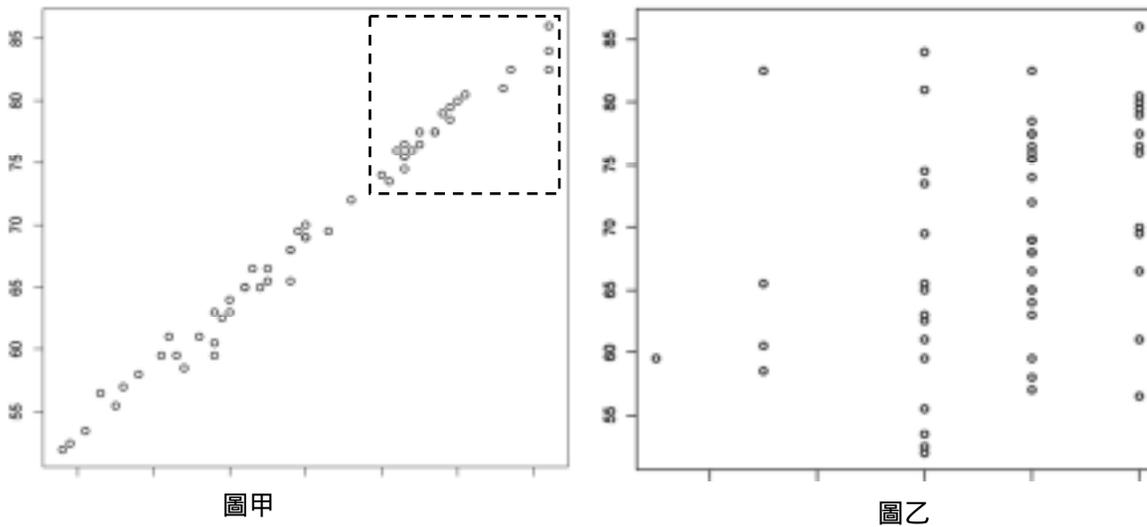
出處: 第二冊(數列與級數), 選修數乙(下)(Ch1 極限與函數)

5. 某研究所處理個人申請入學, 其甄選總成績係採計測驗 A 分數及測驗 B 分數各占 50%。50 位申請同學依甄選總成績高低排序, 錄取前 20 名。現依准考證號碼順序, 將這些同學的成績列表如下: (例如, 第一位同學的測驗 A 分數及測驗 B 分數分別為 93 分及 28 分)

測驗A	93	98	100	100	100	98	96	96	98	96	96	98	98
測驗B	28	50	59	22	52	67	30	15	46	11	72	21	59
測驗A	93	100	100	100	100	98	98	96	98	100	96	100	96
測驗B	24	13	53	33	61	57	55	26	35	40	9	60	23
測驗A	96	96	96	100	100	96	98	98	91	100	96	100	98
測驗B	66	29	34	58	55	35	16	28	28	72	51	39	40
測驗A	98	96	96	93	98	96	98	98	98	98	93		
測驗B	18	43	8	38	32	53	38	53	30	54	72		

所有學生測驗 A 分數的平均數為 97.38, 而測驗 B 分數的平均數為 40.22。現從甄選總成績、測驗 A 分數及測驗 B 分數之中任選兩種成績作散佈圖, 圖甲及圖乙為其中之二; 兩圖中各有 50 個資料點, 每一點代表一位同學; 兩個橫軸與縱軸之單位長可能皆不相同。請選出正確的選項。

- (1)圖乙的橫軸為測驗A分數
- (2)圖乙的縱軸為甄選總成績
- (3)圖甲的橫軸為甄選總成績
- (4)若只以測驗B分數高低錄取20位同學(不採計測驗A分數)，錄取的同學與以甄選總成績高低錄取的同學完全相同
- (5)甄選總成績的平均數為97.38及40.22的平均數



解：(1)由成績列表中，測驗 A 只有 91，93，96，98，100 五種分數，而圖乙的橫軸為測驗 A 分數。正確

(2)由成績列表中，甄選總成績最低成績為 $\frac{96+8}{2} = 52$ ，最高成績為 $\frac{100+72}{2} = 86$

得知圖乙的的縱軸為甄選總成績。正確

(3)圖甲的縱軸為甄選總成績(選項(2)得知)，而橫軸為測驗 B 分數(分布多數 8~72)

(4)只以測驗 B 分數高低錄取 20 位同學，即為圖甲的橫軸成績，亦為圖甲的縱軸成績(如圖甲中圈選處)

(5)設 x_i 表示測驗 A 分數， y_i 表示測驗 B 分數

$$\Rightarrow \text{根據題意，得 } \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{50}}{50} = 97.38, \quad \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{50}}{50} = 40.22$$

$$\begin{aligned} \text{又甄選總成績的平均數} &= \frac{1}{50} \left(\frac{x_1 + y_1}{2} + \frac{x_2 + y_2}{2} + \cdots + \frac{x_{50} + y_{50}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{50}}{50} + \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{50}}{50} \right) \\ &= \frac{1}{2} (97.38 + 40.22), \text{ 正確} \end{aligned}$$

答：(1)(2)(4)(5)

出處：第二冊(Ch4 數據分析)

6. 想要了解選民對某候選人真正的支持度(支持率) p ，四家媒體所做的民意調查結果如下表所示：

	媒體A	媒體B	媒體C	媒體D
\hat{p}	0.30	0.40	0.30	0.28
$\hat{\sigma}$	0.02	$\hat{\sigma}_B$	0.01	0.01

其中 \hat{p} 表示抽樣支持度， $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ， n 為抽樣人數。請選出正確的選項。

- (1)在95%的信心水準之下，媒體A抽樣所得 p 的信賴區間為 $[0.28, 0.32]$
- (2)如果媒體B抽樣的人數與媒體A相同，則 $\hat{\sigma}_B$ 大於0.02
- (3)媒體C抽樣人數約為媒體A抽樣人數的兩倍
- (4)媒體A的抽樣支持度比媒體B的抽樣支持度更接近候選人真正的支持度 p
- (5)在95%的信心水準之下，至少有一家媒體抽樣所得 p 的信賴區間會包含真正的支持度 p

解：(1)信賴區間為 $[\hat{p} - 2\hat{\sigma}, \hat{p} + 2\hat{\sigma}]$

$$= [0.30 - 2 \times 0.02, 0.30 + 2 \times 0.02] = [0.26, 0.34], \text{ 不正確}$$

$$(2) \text{媒體 A: } \hat{\sigma}_A = 0.02 = \sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{n_A}}, \text{ 得 } n_A = 525$$

$$\text{媒體 B: } \hat{\sigma}_B = \sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{525}} = \frac{1}{50} \sqrt{\frac{24}{21}} > \frac{1}{50} = 0.02, \text{ 正確}$$

$$(3) \text{媒體 C : } \hat{\sigma}_c = 0.01 = \sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{n_c}}, \text{ 得 } n_c = 2100$$

$$\text{媒體 C 抽樣人數 : 媒體 A 抽樣人數} = \frac{n_c}{n_A} = \frac{2100}{525} = 4 \neq 2, \text{ 不正確}$$

$$\text{另解 : } \hat{p} \text{ 相同, } n\hat{\sigma}^2 = \hat{p}(1-\hat{p}), \therefore \frac{n_c}{n_A} = \frac{(\hat{\sigma}_A)^2}{(\hat{\sigma}_C)^2} = \frac{(0.02)^2}{(0.01)^2} = 4, \text{ 不正確}$$

(4)(5) 支持度 p 的真正值未知, 故無法判斷

答 : (2)

出處 : 選修數學乙(Ch1 機率與統計)

7. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。請選出正確的選項。

$$(1) A \text{ 的行列式(值)為 } 6 \quad (2) A^2 = 5A - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(4) A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (5) [1 \ 1]A = [5 \ 7]$$

解 : 根據題意, $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(1) A \text{ 的行列式值} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \text{ 正確}$$

$$(2) \text{方陣 } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 滿足 } A^2 - 5A + 6I = 0, \text{ 故 } A^2 = 5A - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 正確}$$

$$\text{另解 : } A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5A - 6I = 5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 即 } A^2 = 5A - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 不正確}$$

$$(4) A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ 正確}$$

$$(5) [1 \ 1]A = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [3 \ 4], \text{ 不正確}$$

答 : (1)(2)(4)

三、選填題(占 24 分)

說明 : 1. 第 A 至 C 題, 將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(8 - 14)

2. 每題完全答對給 8 分, 答錯不倒扣, 未完全答對不給分

A. 從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選出四盆靠在牆邊排成一列, 其中杜鵑及山茶都被選到, 且此兩盆花位置相鄰的排法有 8 9 10 種。

$$\text{解 : } \underbrace{C_2^5}_{\text{其他 5 盆選出 2 盆}} \times \underbrace{3!}_{\text{相鄰視為一體, 共 3 盆排列}} \times \underbrace{2!}_{\text{杜鵑、山茶排列}} = 120$$

答 : 120

出處 : 第二冊(Ch2 排列組合)

B.袋中有3顆白球與1顆黑球，每次隨機從袋中抽出1球，袋中每一球被抽到的機率皆相同，抽出後不放回，直到抽中黑球時遊戲結束。若在第 k 次抽到黑球，則得到 k 元獎金。

此遊戲可獲得獎金的數学期望值為 $\frac{5}{2}$ 元 (化為最簡分數)。

$$\text{解 1: } P(\text{黑球}) = \frac{1}{4}, k=1, 2, 3, 4, \text{期望值} = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\text{解 2: 期望值} = \underbrace{1 \times \frac{1}{4}}_{\text{第1次抽到}} + \underbrace{2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}_{\text{第2次抽到}} + \underbrace{3 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{\text{第3次抽到}} + \underbrace{4 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1}_{\text{第4次抽到}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{5}{2}$$

事件 X	1	2	3	4	合計
機率 P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1$	1

$$\text{答: } \frac{5}{2}$$

出處：選修數學乙(Ch1 機率與統計)

C.在坐標平面上，設 O 為原點，向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ， $\vec{c} = (1, 1)$ ， $\vec{d} = (-1, 1)$ 。

P 為平面上的動點，令點集合 $A = \{P \mid \vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b} \text{ 且 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1\}$ ，點集合

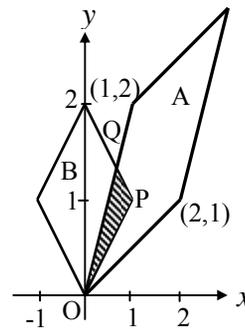
$B = \{P \mid \vec{OP} = x\vec{c} + y\vec{d} \text{ 且 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 1\}$ ，則區域 $A \cap B$ 的面積為 $\frac{13}{14}$ (化為最簡分數)。

解：根據題意，區域 A、B 如右圖， $P(1, 1)$ ， $Q(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

$$\text{斜線區域為 } A \cap B = \Delta OPQ = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{答: } \frac{1}{3}$$

出處：第三冊(Ch3 平面向量)



———以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷———

第貳部份：非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、)同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末

一、已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$

(1)請以對數律計算 $\log 1.5$ (不必四捨五入)。(3 分)

(2)請以對數律計算 $\log(1.5)^{60}$ (不必四捨五入)。(3 分)

(3)請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分是幾位數？請說明理由。(3 分)

(4)請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分中，最左邊的數字是幾？請說明理由。(3 分)

解：(1) $\log 1.5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$

(2) $\log(1.5)^{60} = 60 \times \log 1.5 = 60 \times 0.1761 = 10.566$

(3) $\log(1.5)^{60} = 10.566 = 10 + 0.566$ ，首數為 10，得知 $(1.5)^{60}$ 整數部分是 11 位數

(4) 尾數 = 0.566 且 $\log 3 < 0.566 < \log 4$ ，即 $0.566 \approx \log 3. \dots$ ，得知最左邊的數字是 3

出處：第一冊(Ch3 指數與對數函數)

二、某工廠使用三種貴金屬元素合成兩種合金，其中每單位的甲合金是由 5 公克的 A 金屬、3 公克的 B 金屬以及 3 公克的 C 金屬組成，而每單位的乙合金是由 3 公克的 A 金屬、6 公克的 B 金屬與 3 公克的 C 金屬所組成。已知甲、乙合金每單位的獲利分別為 600、700 元。若工廠此次進了 1000 公克的 A 金屬、1020 公克的 B 金屬與 660 公克的 C 金屬投入生產這兩種合金，試問甲、乙兩種合金各應生產多少單位，才能獲得最大利潤？又時利潤為多少？(12 分)

解：根據題意，列表如下：

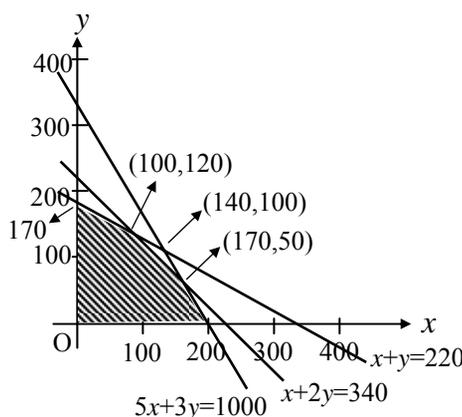
	A	B	C	獲利	設
甲	5	3	3	600	x
乙	3	6	3	700	y
限制	1000	1020	660	最大	

設甲、乙兩種合金各應生產 x, y 單位

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y \leq 1000 \\ 3x + 6y \leq 1020 \\ 3x + 3y \leq 660 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y \leq 1000 \\ x + 2y \leq 340 \\ x + y \leq 220 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

目標函數 $P(x, y) = 600x + 700y$

依據可行解(斜線)區域，如右圖



頂點	(0, 0)	(200, 0)	(170, 50)	(100, 120)	(0, 170)
$P(x, y)$	0	120,000	137,000	144,000	119,000

得知當 $x = 100, y = 120$ 時，有最大值 144000

⇒甲、乙兩種合金各應生產 100, 120 單位，獲得最大利潤為 144000 元

出處：第三冊(Ch3 直線與圓)