107 年大學入學指定科目考試 數學甲 試題

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1.設 A 為 3×3 矩陣，且對任意實數 a，b，c，$A\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\c\\a\end{bmatrix}$ 均成立。試問矩陣 $A^2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ 為何？

(1) $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

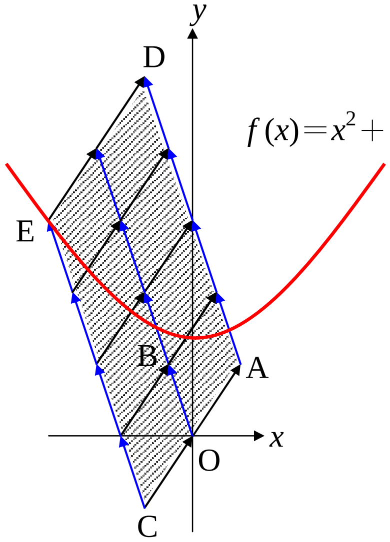
解：$A^2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=A\cdot A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

答：(2)

出處：矩陣

2.坐標平面上，考慮 $A(2，3)$與 $B(-1，3)$兩點，並設 O 為原點。令 E 為滿足 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $-1\le a\le 1$，$0\le b\le 4$。考慮函數 $f(x)=x^2+5$，試問當限定 x 為區域 E 中的點 $P(x，y)$的橫坐標時，$f(x)$的最大值為何？

(1) 5 (2) 9 (3) 30 (4) 41 (5) 54



解：1.$\overrightarrow{OP}=a(2，3)+b(-1，3)$所形成的區域為四邊形 CADE

2.函數 $f(x)=x^2+5$ 為頂點(0，5)開口向上的拋物線

3.E$(x，y)$＝C$(-2，-3)+4(-1，3)=(-6，9)$

由圖得知 E 點的橫坐標 $x=-6$ 時，使得 $f(x)$有最大值

$\Rightarrow$最大值$=(-6)^2+5=41$

另解：代數法

1.$\overrightarrow{OP}=a(2，3)+b(-1，3)=(2a-b，3a+3b)$

2. $\because -1\le a\le 1$，$\Rightarrow -2\le 2a\le 2$

$0\le b\le 4$，$\Rightarrow -4\le -b\le 0$

$\therefore -6\le x$ 分量 $x=2a-b\le 2$，$\Rightarrow 0\le x$ 分量平方 $x^2=(2a-b)\le 36$

3. $0+5\le f(x)=x^2+5\le 36+5$，$\Rightarrow 5\le x^2+5\le 41$，$\Rightarrow$最大值$=41$

答：(4)

出處：平面向量

3.某零售商店販賣「熊大」與「皮卡丘」兩種玩偶，其進貨來源有 A，B，C 三家廠商。已知此零售商店從每家廠商進貨的玩偶總數相同，且三家廠商製作的每一種玩偶外觀也一樣，而從 A，B，C 這三家廠商進貨的玩偶中，「皮卡丘」所占的比例分別 $\frac{1}{4}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{2}$。阿德從這家零售商店隨機挑選一隻「皮卡丘」送給小安作為生日禮物，試問此「皮卡丘」出自 C 廠商的機率為何？

(1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{2}{5}$　(3) $\frac{10}{23}$　(4) $\frac{10}{19}$　(5) $\frac{5}{9}$

解：設每家進貨的玩偶總數為 n，$\therefore P(C\text{ 廠}\mid\text{皮卡丘})=\dfrac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{4}n+\frac{2}{5}n+\frac{1}{2}n}=\dfrac{10}{23}$

答：(3)

出處：機率 (條件機率、貝式定理)

二、多選題(占 40 分)

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4.設 $f(x)=-x^2+499$，且 $A=\int_0^{10} f(x)dx$、$B=\sum_{n=0}^{9} f(n)$、$C=\sum_{n=1}^{10} f(n)$、$D=\sum_{n=0}^{9}\dfrac{f(n)+f(n+1)}{2}$

試選出正確的選項。

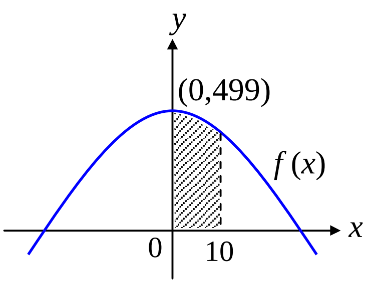
(1) A 表示在坐標平面上函數 $y=-x^2+499$，的圖形與直線 $y=0$、$x=0$、$x=10$ 所圍成的有界區域的面積

(2) $B<C$

(3) $B<A$

(4) $C<D$

(5) $A<D$



解：1. $A=\int_0^{10} f(x)dx$ 區域面積，如右圖所示，正確

2. $A=\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^{10}(-x^2+499)dx=-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{10}+499x\Big|_0^{10}=\dfrac{13970}{3}\approx 4656.66\cdots$

$B=\sum_{n=0}^{9} f(n)=[(-0)^2+499]+[-1^2+499]+\ldots\ldots+[-9^2+499]$

$=-(1^2+\ldots+9^2)+499\times10=4705$

$C=\sum_{n=1}^{10} f(n)=[-1^2+499]+\ldots\ldots+[-10^2+499]=-(1^2+\ldots+10^2)+499\times10=4605$

3. $f(n)+f(n+1)=(-n^2+499)+[-(n+1)^2+499)]=-2n^2-2n+997$

$$D=\sum_{n=0}^{9}\frac{f(n)+f(n+1)}{2}=\sum_{n=0}^{9}(-n^2-n+\frac{997}{2})=-(1^2+\ldots+9^2)-(1+\ldots+9)+\frac{997}{2}\times 10=4655$$

或 $D=\sum_{n=0}^{9}\frac{f(n)+f(n+1)}{2}=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{9}f(n)+\sum_{n=1}^{10}f(n)]=\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}(4705+4605)=4655$

4.得知 B＞A＞D＞C

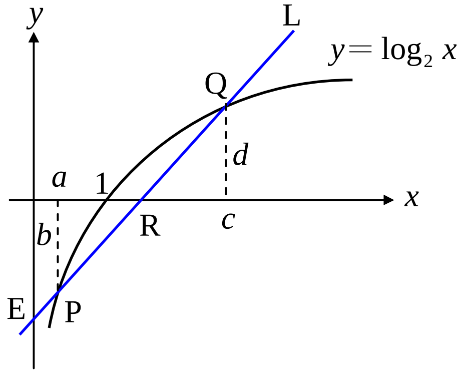
答：(1)(4)

出處：積分、級數

5.坐標平面上，已知直線 L 與函數 $y=\log_2 x$ 的圖形有兩個交點 $P(a，b)$，$Q(c，d)$，且 $\overline{PQ}$ 的中點在 x 軸上。試選出正確的選項。

(1) L 的斜率大於 0　(2) $bd=-1$　(3) $ac=1$

(4) L 的 y 截距大於 -1　(5) L 的 x 截距大於 1



解：根據題意，作一示意圖如右，中點 $R(x，0)$

(1)由圖得知，直線 L 為右上斜直線，斜率＞0

(3) $\because b=\log_2 a$，$d=\log_2 c$，$c>1$

且 $R(x，0)=(\frac{a+c}{2}，\frac{b+d}{2})$，$\therefore b+d=0$

$b+d=\log_2 a+\log_2 c=\log_2 ac=0$，$\therefore ac=1$

(4) y 截距為 E 點之 y 分量 $<b=\log_2 a<\log_2 \frac{1}{2}=-1$

(5) x 截距為 R 點之 x 分量＞1

答：(1)(3)(5)

出處：指數與對數函數

6.坐標空間中，有 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ 四個向量，滿足外積 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{d}$ 且 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的向量長度均為 4。設向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ (其中 $0\le\theta\le\pi$)，試選出正確的選項。

(1) $\cos\theta=\frac{1}{4}$

(2) $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張出的平行六面體的體積為 16

(3) $\vec{a}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ 兩兩互相垂直

(4) $\vec{d}$ 的長度等於 4

(5) $\vec{b}$ 與 $\vec{d}$ 的夾角等於 θ

解：(1) $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，$\therefore 4=4\times4\sin\theta$，$\therefore \sin\theta=\dfrac{1}{4}$，$\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(2)平行六面體的體積 $=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|\vec{c}\cdot\vec{c}|=16$

(3) $\because \vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$，$\Rightarrow \vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$

$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{d}$，$\Rightarrow \vec{a}\perp\vec{d}$，$\vec{c}\perp\vec{d}$

(4) $|\vec{d}|=|\vec{a}\times\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{c}|\sin 90^\circ=4\times4\times1=16$

(5) $\because \vec{b}\perp\vec{c}$ 且 $\vec{d}\perp\vec{c}$，$\therefore \vec{b}\times\vec{d}=\vec{c}$ 或 $-\vec{c}$

$|\vec{c}|=|\vec{b}\times\vec{d}|=|\vec{b}||\vec{d}|\sin\varphi$，$\Rightarrow 4=4\times16\sin\varphi$，$\therefore \sin\varphi=\dfrac{1}{16}\neq\sin\theta$

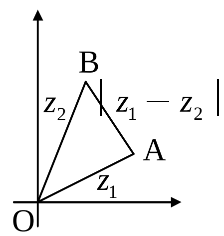
答：(2)(3)

出處：空間向量、外積

7.設 O 為複數平面上的原點，並令點 A，B 分別代表複數 z_1，z_2，且滿足 $|z_1|=2$，$|z_2|=3$，$|z_1-z_2|=\sqrt{5}$。若 $\dfrac{z_2}{z_1}=a+bi$，其中 a，b 為實數，$i=\sqrt{-1}$。試選出正確的選項。

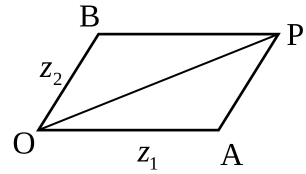
(1) $\cos\angle AOB=\dfrac{2}{3}$　(2) $|z_1+z_2|=\sqrt{23}$　(3) $a>0$

(4) $b>0$　(5)設點 C 代表 $\dfrac{z_2}{z_1}$，則 $\angle BOC$ 可能等於 $\dfrac{\pi}{2}$



解：(1) $\because$ 在 ΔAOB 中，如右圖，根據餘弦定理

$\Rightarrow \sqrt{5}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\cos\angle AOB$，$\therefore \cos\angle AOB=\dfrac{2}{3}$



(2)如右圖，$\angle A=180^\circ-\angle AOB$，且 $|z_1+z_2|=\overline{OP}$

$\therefore$ 在 ΔAOB 中，根據餘弦定理

$\Rightarrow |z_1+z_2|^2=2^2+3^2-2\times2\times3\cos(180^\circ-\angle AOB)$

$=4+9-12(-\dfrac{2}{3})=21$，$\therefore |z_1+z_2|=\sqrt{21}$

(3)(4)令 $\angle AOB=\theta$，$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \dfrac{z_2}{z_1}=\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|(\cos\theta+i\sin\theta)=\dfrac{3}{2}(\dfrac{2}{3}+\dfrac{\sqrt{5}}{3}i)=1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}i$，$\Rightarrow a=1$，$b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

或 $\dfrac{z_2}{z_1}=\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=\dfrac{3}{2}(\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}i)=1-\dfrac{\sqrt{5}}{2}i$，$\Rightarrow a=1$，$b=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(5) $\because$ 複數 z_1 的(主)幅角 $\text{Arg}(z_1)$，複數 z_2 的(主)幅角 $\text{Arg}(z_2)$ 皆未確定，$\therefore \angle BOC$ 可能等於 $\dfrac{\pi}{2}$

答：(1)(3)(5)

出處：複數、餘弦定理

8.設 $f(x)$為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}$ 存在，試選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2$ 存在　(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}$ 存在　(3) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1)\dfrac{x}{|x|}$ 存在

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在　(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$ 存在

解：(1)左極限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x}{-x}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)^2=1$

右極限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{x}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0^+}1^2=1$，

$\Rightarrow$左極限＝右極限＝1，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2=1$ 存在

(2) $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}$ 存在

(3) $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1)\dfrac{x}{|x|}$ 不一定存在

或當 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1)$存在時，$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1)\dfrac{x}{|x|}$ 才存在

(4) $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}$ 不一定存在

(5) $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}$ 存在

$\therefore(\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x})(\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|})=\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\dfrac{|x|}{x})(f(x)\dfrac{x}{|x|})=\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$ 存在

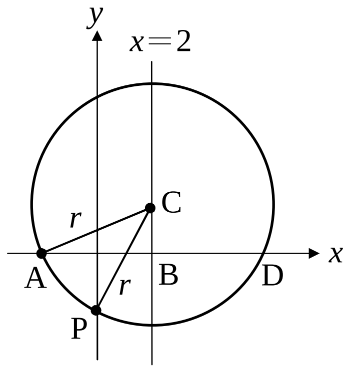
答：(1)(2)(5)

出處：極限

三、選填題(占 18 分)

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(9－15)。 2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.坐標平面上，已知圓 C 通過點 $P(0，－5)$，其圓心在 $x=2$ 上。若圓 C 截 x 軸所成之弦長為 6，則其半徑為 $\sqrt{⑨⑩}$。(化成最簡根式)



解：1.根據題意，作圓 C 示意圖如右，設圓心 C(2，k)，B(2，0)

2.$\because \overline{AB}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=3$，$\overline{BC}=|k|$

$\therefore$在ΔABC 中，半徑$=\overline{AC}=r=\sqrt{3^2+k^2}=\overline{CP}=\sqrt{2^2+(k+5)^2}$

$\Rightarrow\sqrt{3^2+k^2}=\sqrt{2^2+(k+5)^2}$，得知 $k=-2$

$\therefore$半徑$=r=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

答：$\sqrt{13}$

出處：圓

B.假設某棒球隊在任一局發生失誤的機率都等於 p (其中 $0<p<1$)，且各局之間發生失誤與否互相獨立。令隨機變數 X 代表一場比賽 9 局中出現失誤的局數，且令 p_k 代表 9 局中恰有 k 局出現失誤的機率 $P(X=k)$。已知 $p_4+p_5=\dfrac{45}{8}p_6$，則該球隊在一場 9 局的比賽中出現失誤局數的期望值為 $\dfrac{⑪⑫}{⑬}$。(化成最簡分數)

解：1. $p_4=P(X=4)=C_4^9p^4(1-p)^5$，$p_5=P(X=5)=C_5^9p^5(1-p)^4$，$p_6=P(X=6)=C_6^9p^6(1-p)^3$

$\Rightarrow C_4^9p^4(1-p)^5+C_5^9p^5(1-p)^4=\dfrac{45}{8}C_6^9p^6(1-p)^3$

$\Rightarrow 4(1-p)^2+4p(1-p)=15p^2$，$\Rightarrow 15p^2+4p-4=0$，$\therefore p=\dfrac{2}{5}$ 或 $-\dfrac{2}{3}$(不合)

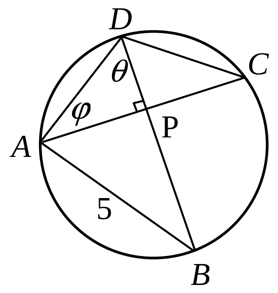
2.期望值 $E(X)=np=9\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{18}{5}$

答：$\dfrac{18}{5}$

出處：隨機變數、白努力、期望值

C.設 A，B，C，D 為圓上的相異四點。已知圓的半徑為 $\frac{7}{2}$，$\overline{AB}=5$，兩線段 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直，如圖所示(此為示意圖，非依實際比例)。則 $\overline{CD}$ 的長度為 ⑭$\sqrt{⑮}$ 。(化成最簡根式)

解：1.在ΔADP 中，$\because \overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\therefore \theta+\varphi=90°$



2.根據正弦定理

在ΔADB 中，$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=\frac{5}{\sin\theta}=2(\frac{7}{2})$，$\therefore 5=7\sin\theta$

在ΔACD 中，$\frac{\overline{CD}}{\sin\varphi}=\frac{\overline{CD}}{\sin(90^o-\theta)}=\frac{\overline{CD}}{\cos\theta}=2(\frac{7}{2})$，$\therefore \overline{CD}=7\cos\theta$

$\begin{cases}5=7\sin\theta\\ \overline{CD}=7\cos\theta\end{cases}$，$\therefore 5^2+\overline{CD}^2=(7\sin\theta)^2+(7\cos\theta)^2=49$，$\therefore \overline{CD}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

答：$2\sqrt{6}$

出處：三角、正弦定理

－ － － － － 以下第貳部份的非選擇題，必須作答於答案卷 － － － － － －

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、……)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一、坐標空間中有一個正立方體 $ABCDEFGH$，如圖所示 (此為示意圖)，試回答下列問題。

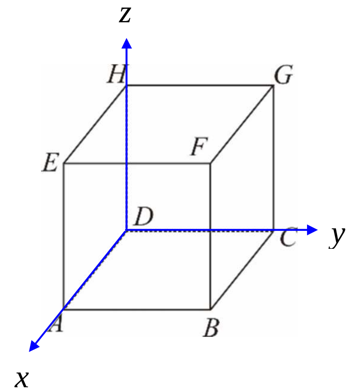
(1)試證明 A 點到平面 BDE 的距離是對角線 AG 長度的三分之一。(4 分)

(2)試證明向量 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直。(2 分)

(3)如果知道平面 BDE 的方程式為 $2x+2y-z=-7$，且 A 點坐標為(2，2，6)，試求出 A 點到平面 BDE 的距離。(2 分)

(4)承(3)，試求出 G 點的坐標。(4 分)

解：1.(1)設正立方體邊長為 1，如右圖，坐標化



D(0,0,0)，A(1,0,0)，B(1,1,0)，E(1,0,1)，G(0,1,1)

$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DE}=(1,-1,-1)$

設平面 BDE：$x-y-z=k$，B(1,1,0)代入，得 $k=0$

$\therefore d$(A，平面 $x-y-z=0$)$=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\overline{AG}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

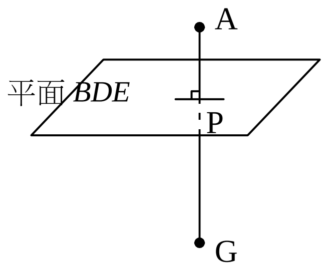
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}$

(2) $\overrightarrow{AG}=(-1,1,1)$，取平面 BDE 的法向量為 $\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{n}=(1,-1,-1)$

$\because \overrightarrow{AG} // \overrightarrow{n}$，$\therefore \overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直

2.(3) d(A(2,2,6)，平面 $2x+2y-z=-7$)$=\dfrac{|4+4-6+7|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{9}{3}=3$

3.(4)1.求 A 點在平面 BDE 的投影點 P，如右圖



設 $\overleftrightarrow{AP}$：$\begin{cases} x=2+2t \\ y=2+2t \\ z=6-t \end{cases}$，$t\in R$，令 P($2+2t$，$2+2t$，$6-t$)

$\because$P 在平面上，代入得 $2(2+2t)+2(2+2t)-(6-t)=-7$

得 $t=-1$，$\therefore$投影點 P(0，0，7)

2.設 G(a，b，c)，由(1)得知 $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AP}$，$\Rightarrow(a-2，b-2，c-6)=3(-2，-2，1)$

$\therefore a=-4$，$b=-4$，$c=9$，$\Rightarrow$G(-4，-4，9)

出處：空間中的平面與直線

二、考慮三次多項式 $f(x)=-x^3-3x^2+3$。試回答下列問題。

(1)在坐標平面上，試描繪 $y=f(x)$的函數圖形，並標示極值所在點之坐標。(4 分)

(2)令 $f(x)=0$ 的實根為 a_1，a_2，a_3，其中 $a_1<a_2<a_3$。試求 a_1，a_2，a_3 分別在哪兩個相鄰整數之間。(2 分)

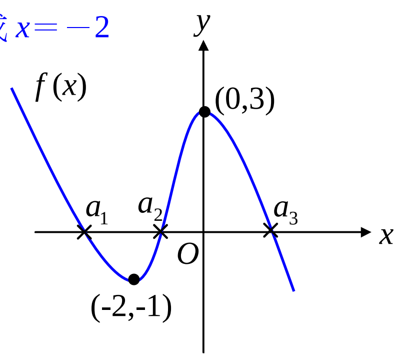
(3)承(2)，試說明 $f(x)=a_1$、$f(x)=a_2$、$f(x)=a_3$ 各有幾個相異實根。(4 分)

(4)試求 $f(f(x))=0$ 有幾個相異實根 (註：$f(f(x))=-(f(x))^3-3(f(x))^2+3$)。(2 分)

解：(1) $f'(x)=-3x^2-6x=0$，$-3x(x+2)=0$，$\therefore$得轉折點 $x=0$ 或 $x=-2$

轉折點(-2，-1)，(0，3)，列表如下，圖形如右

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	遞減	-1	遞增	3	遞減



(2)利用勘根定理，列表如下

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
$f(x)$	…	3	-1	1	3	-1	…

得知 $f(-3)f(-2)<0$，$f(-2)f(-1)<0$，$f(0)f(1)<0$，

由題意得：$-3<a_1<-2$，$-2<a_2<-1$，$0<a_3<1$

(3)(i) $f(x)=a_1$，$-3<a_1<-2$，如右圖

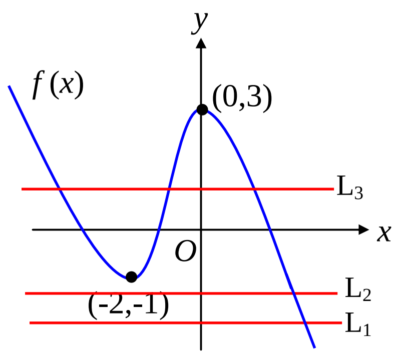
表 $f(x)$與直線 L_1 有一交點，$\therefore f(x)=a_1$ 有一實根

(ii) $f(x)=a_2$，$-2<a_1<-1$，如右圖

表 $f(x)$與直線 L_2 有一交點，$\therefore f(x)=a_2$ 有一實根

(iii) $f(x)=a_3$，$0<a_1<1$，如右圖

表 $f(x)$與直線 L_3 有三交點，$\therefore f(x)=a_3$ 有三個相異實根



(4)在 $f(f(x))=0$ 中，令 $f(x)=X$

$\therefore f(f(x))=-(f(x))^3-3(f(x))^2+3=-X^3-3X^2+3=0$ 得根為 $X=a_1$，a_2，a_3

$\therefore$ 由(3)得知共有 $1+1+3=5$ 個相異實根

出處：微分、多項式函數