103 年大學入學指定科目考試 數學甲 試題

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 24 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

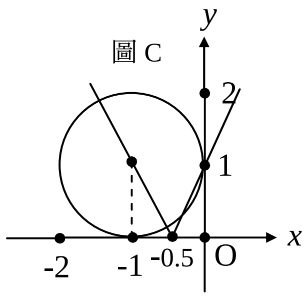
1.在坐標平面上，圓 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 與 $y=|2x+1|$ 的圖形有幾個交點？

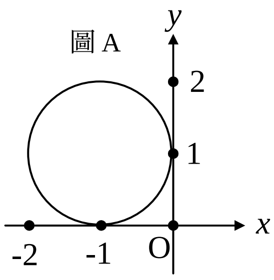
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個

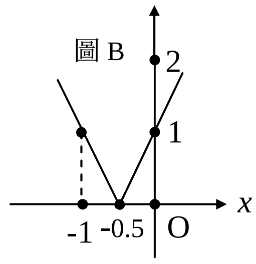
解：圓 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$，經配方得 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，即以 $(-1, 1)$ 為圓心，半徑為 1 的圓，如圖 A

$y=|2x+1|$ 的圖形，如圖 B

交點有 4 個，如圖 C







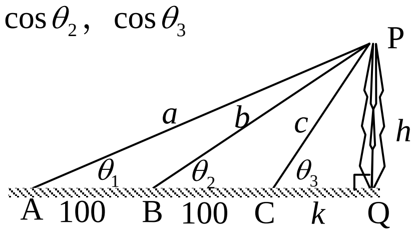
答：(4)

出處：第三冊 圓與直線

2.在地面某定點測得數公里外高塔塔尖的仰角為 θ_1，朝高塔方向沿直線前進 100 公尺之後，重新測得塔尖仰角為 θ_2，再沿同一直線繼續前進 100 公尺後，測得仰角為 θ_3。請問下列哪一個選項的數值依序成等差數列？

(1) θ_1，θ_2，θ_3 (2) $\sin\theta_1$，$\sin\theta_2$，$\sin\theta_3$ (3) $\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$

(4) $\tan\theta_1$，$\tan\theta_2$，$\tan\theta_3$ (5) $\cot\theta_1$，$\cot\theta_2$，$\cot\theta_3$



解：如右圖，設塔高 $\overline{PQ}=h$ 公尺，$\overline{AP}=a$ 公尺，$\overline{BP}=b$ 公尺，$\overline{CP}=c$ 公尺

(1) $\theta_2-\theta_1$，$\theta_3-\theta_2$ 不一定相等

(2) $\sin\theta_1=\dfrac{h}{a}$，$\sin\theta_2=\dfrac{h}{b}$，$\sin\theta_3=\dfrac{h}{c}$，則 $\dfrac{h}{a}$，$\dfrac{h}{b}$，$\dfrac{h}{c}$ 不一定成等差數列

(3) $\cos\theta_1=\dfrac{200+k}{a}$，$\cos\theta_2=\dfrac{100+k}{b}$，$\cos\theta_3=\dfrac{k}{c}$，則 $\dfrac{200+k}{a}$，$\dfrac{100+k}{b}$，$\dfrac{k}{c}$ 不一定成等差數列

(4) $\tan\theta_1=\dfrac{h}{200+k}$，$\tan\theta_2=\dfrac{h}{100+k}$，$\tan\theta_3=\dfrac{h}{k}$，則 $\dfrac{h}{200+k}$，$\dfrac{h}{100+k}$，$\dfrac{h}{k}$ 不一定成等差數列

(5) $\cot\theta_1=\dfrac{200+k}{h}$，$\cot\theta_2=\dfrac{100+k}{h}$，$\cot\theta_3=\dfrac{k}{h}$，則 $\dfrac{200+k}{h}$，$\dfrac{100+k}{h}$，$\dfrac{k}{h}$ 為公差 $=\dfrac{-100}{h}$ 的等差數列

答：(5)

出處：第三冊 三角

3.請問指數方程式 $2^{10^x}=10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？（$\log 2\approx 0.3010$、$\log 3\approx 0.4771$、$\log 7\approx 0.8451$）

(1) 1.1 (2) 1.2 (3) 1.3 (4) 1.4 (5) 1.5

解：$\because \log(2^{10^x})=\log(10^6)$，$\Rightarrow 10^x(\log 2)=6$，$\Rightarrow 10^x=\dfrac{6}{\log 2}\approx 19.93$

又 $\because \log(10^x)\approx\log(19.93)=\log(1.993\times 10^1)=1+\log(1.993)\approx 1+0.3010=1.301$，$\Rightarrow x\approx 1.301$

答：(3)

出處：第一冊 指數與對數

4.令多項式 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式的常數項為 r_n。請問極限 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ 為下列哪一選項？

(1) 0 (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) 2 (4) 3 (5) 不存在

解：當 $n=1$ 時，$2(x+1)$ 除以 $(3x-2)$，得餘式為 $r_1=2-\dfrac{2}{3}(-2)=\dfrac{10}{3}$

當 $n=2$ 時，$2(x+1)^2$ 除以 $(3x-2)^2$，得餘式為 $r_2=2-\dfrac{2}{9}(-2)^2=\dfrac{10}{9}$

當 $n=3$ 時，$2(x+1)^3$ 除以 $(3x-2)^3$，得餘式為 $r_3=2-\dfrac{2}{27}(-2)^3=\dfrac{70}{27}$

……，$\Rightarrow r_n=2-\dfrac{2}{3^n}(-2)^n=2-2(\dfrac{-2}{3})^n$，$\Rightarrow \therefore \lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2-2(\dfrac{-2}{3})^n)=2-2\times 0=2$

答：(3)

出處：選修數甲下 極限概念

二、多選題(占 40 分)

說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5.給定向量$\vec{u}=(2,\ 2,\ 1)$，請選出正確的選項：

(1)可找到向量$\vec{v}$使得$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{2}$　　(2)可找到向量$\vec{v}$使得$\vec{u}\times\vec{v}=(1,\ 3,\ 4)$

(3)若非零向量$\vec{v}$滿足$|\vec{u}\cdot\vec{v}|=2|\vec{v}|$，則$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$　　(4)若非零向量$\vec{v}$滿足$|\vec{u}\times\vec{v}|=3|\vec{v}|$，則$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

(5)若向量$\vec{v}$滿足$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ 且$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$，則$\vec{v}=0$

解：(1)$\because|\vec{u}|=|(2,\ 2,\ 1)|=3$，設$\vec{u}$、$\vec{v}$夾角為$\theta$，$\therefore\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta=3|\vec{v}|\cos\theta=\sqrt{2}$，

$\Rightarrow|\vec{v}|=\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$ 可以成立，$\therefore\vec{v}$存在

另解：取$\vec{v}=(0,\ 0,\ \sqrt{2})$，滿足$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,\ 2,\ 1)\cdot(0,\ 0,\ \sqrt{2})=\sqrt{2}$，$\therefore$找到向量$\vec{v}$使得$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{2}$

(2)$\because\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=(2,\ 2,\ 1)\cdot(1,\ 3,\ 4)=12\neq0$，$\therefore\vec{v}$不存在 ($\because\vec{u}\perp\vec{u}\times\vec{v}$，$\vec{v}\perp\vec{u}\times\vec{v}$)

另解：設$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$，$\therefore\vec{u}\times\vec{v}=(2,\ 2,\ 1)\times(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 4)$

$\Rightarrow 2c-b=1$，$a-2c=3$，$2b-2a=4$，$\Rightarrow$得知無解，$\therefore$找不到向量$\vec{v}$使得$\vec{u}\times\vec{v}=(1,\ 3,\ 4)$

(3)設$\vec{u}$、$\vec{v}$夾角為θ，$|\vec{u}\cdot\vec{v}|=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\cos\theta|=3|\vec{v}|\,|\cos\theta|=2|\vec{v}|$，$\therefore|\cos\theta|=\dfrac{2}{3}$，$\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$

(4)設$\vec{u}$、$\vec{v}$夾角為θ，$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\sin\theta=3|\vec{v}|\sin\theta=3|\vec{v}|$，$\Rightarrow\sin\theta=1$，$\therefore$得知$\theta=90^0$

$\Rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos90^0=0$

(5)設$\vec{u}$、$\vec{v}$夾角為θ，$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta=3|\vec{v}|\cos\theta=0$，$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\sin\theta=3|\vec{v}|\sin\theta=|\vec{0}|=0$

$\Rightarrow3|\vec{v}|\cos\theta=0$，$3|\vec{v}|\sin\theta=0$，$\Rightarrow3|\vec{v}|(\cos\theta+\sin\theta)=0$，得$|\vec{v}|=0$

答：(1)(4)(5)

出處：第四冊　空間向量

6.考慮多項式函數$f(x)=4x^3-11x^2+6x$。請選出正確的選項：

(1)函數f的圖形在點$(1,\ -1)$的切線斜率為正　　(2)函數f的圖形與直線$y=1$交於三點

(3)函數f的唯一相對極小值為$-\dfrac{9}{4}$　　(4)$f(\pi)>0$　　(5)$f(\cos\dfrac{4\pi}{7})>0$

解：$f'(x)=12x^2-22x+6=2(3x-1)(2x-3)$，分析如右

(1)$f'(1)=12-22+6=-4$，$\Rightarrow$切線斜率為負

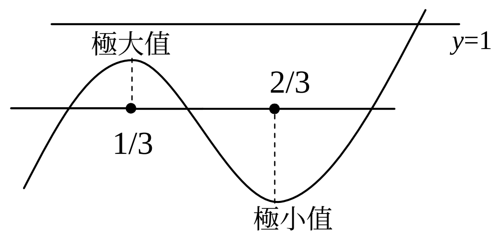
(2)f的圖形與$y=1$交於一點，如右下圖

(3)$f(\dfrac{2}{3})=\dfrac{-9}{4}$為唯一相對極小值

(4)$f(\pi)>0$，如右下圖

(5)$\because\cos\dfrac{4\pi}{7}<0$，$\therefore f(\cos\dfrac{4\pi}{7})<0$，如右下圖

x		1/3		3/2	
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
	↗		↘		↗
$f(x)$	$f(\frac{1}{3})=\frac{25}{27}$(大)，$f(\frac{2}{3})=\frac{-9}{4}$(小)				



答：(3)(4)

出處：選修數學甲下　多項式函數的微積分

7.職業棒球季後賽第一輪採五戰三勝制，當參賽甲、乙兩隊中有一隊贏得三場比賽時，就由該隊晉級而賽事結束。每場比賽皆須分出勝負，且每場比賽的勝負皆不受之前已賽結果影響。假設甲隊在任一場贏球的機率為定值p，以$f(p)$表實際比賽場數的期望值(其中$0\le p\le1$)，請選出正確的選項：

(1)只須比賽 3 場就產生晉級球隊的機率為$p^3+(1-p)^3$　　(2)$f(p)$是p的 5 次多項式

(3)$f(p)$的常數項等於 3　　(4)函數$f(p)$在$p=\dfrac{1}{2}$時有最大值　　(5)$f(\dfrac{1}{4})<f(\dfrac{4}{5})$

解：(1)甲隊連勝三場(甲晉級)：p^3 或 乙隊連勝三場(乙晉級)：$(1-p)^3$，$\Rightarrow$機率為 $p^3+(1-p)^3$

(2)比賽場數的機率分配表如下：

比賽場數	3(連 3 勝，連 3 敗)	4(4 戰，第 4 戰勝)	5(5 戰，第 5 戰勝)
機率	$p^3+(1-p)^3$	$C^3_2[p^2(1-p)p+p(1-p)^2(1-p)]$	$C^4_2[p^2(1-p)^2p+p^2(1-p)^2(1-p)]$

期望值 $f(p)=3[p^3+(1-p)^3]+4C^3_2[p^2(1-p)p+p(1-p)^2(1-p)]+5C^4_2[p^2(1-p)^2p+p^2(1-p)^2(1-p)]$

$=3(3p^2-3p+1)+12(-2p^4+4p^3-3p^2+p)+30(p^4-2p^3+3p)=6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$

$\therefore f(p)$是 p 的 4 次多項式，常數項等於 3

(4) $f'(p)=24p^3-36p^2+6p+3=3(2p-1)(4p^2-4p-1)=0$，得 $p=\frac{1}{2}$，$p=\frac{1+\sqrt{2}}{2}>1$(不合)，$p=\frac{1-\sqrt{2}}{2}<0$(不合)

$\Rightarrow$當 $p=\frac{1}{2}$時，$f(p)$有最大值

(5) $f(\frac{1}{4})=\frac{493}{128}>3$，$f(\frac{4}{5})=\frac{1871}{625}<3$，$\Rightarrow f(\frac{1}{4})>f(\frac{4}{5})$

答：(1)(3)(4)

出處：選修數學甲上 二項分配 甲下 多項式函數的微積分

8.考慮 x，y，z 的方程組 $\begin{cases} 2^x-3^y+5^z=-1 \\ 2^{x+1}+3^y-5^z=4 \\ 2^{x+1}+3^{y+1}+a5^z=8 \end{cases}$，其中 a 為實數。請選出正確的選項：

(1)若(x,y,z)為此方程組的解，則 $x=0$

(2)若(x,y,z)為此方程組的解，則 $y>0$

(3)若(x,y,z)為此方程組的解，則 $y<z$

(4)當 $a\neq 3$ 時，恰有一組(x,y,z)滿足此方程組

(5)當 $a=-3$ 時，滿足此方程組的所有解(x,y,z)會在一條直線上

解：(1)由$\begin{cases} 2^x-3^y+5^z=-1 \\ 2^{x+1}+3^y-5^z=4 \end{cases}$相加，得知$2^x+2^{x+1}=3$，$\Rightarrow 3\cdot 2^x=3$，$\therefore 2^x=1$，得 $x=0$

(2)由 $x=0$ 代回$2^x-3^y+5^z=-1$，得$3^y=5^z+2>2>3^0$，$\Rightarrow y>0$

(3)由$3^y=5^z+2$中，令 $z=0$ 時，$3^y=3$，得 $y=1$，$\Rightarrow y>z$

(4)由 $x=0$ 代回方程組，得$\begin{cases} 3^y-5^z=2 \\ 3\cdot 3^y+a5^z=6 \end{cases}$，得$(a+3)5^z=0$，則當 $a\neq 3$ 時，$5^z=0$，z 為無解

(5)當 $a=-3$ 時，$3^y-5^z=2$，但已知其解為 $x=0$，$y>0$，$\therefore(x,y,z)$在 yz 平面上

答：(1)(2)

出處：第一冊 指數與對數 第四冊 方程組

9.在(凸)四邊形 ABCD 中，已知$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=x$，且對角線$\overline{AC}=4$。請選出正確的選項：

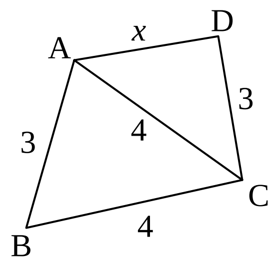
(1) $\cos\angle ABC\geq\frac{3}{7}$

(2) $\cos\angle BAD>\cos\angle ABC$

(3) x 可能為 1

(4) $x<\frac{13}{2}$

(5)若 A、B、C、D 四點共圓，則 $x=\frac{7}{4}$



解：根據題意，如右圖

(1)在ΔABC 中，由餘弦定理 $\cos\angle ABC=\frac{3^2+4^2-4^2}{2\times3\times4}=\frac{3}{8}<\frac{3}{7}$

(2)在ΔABC 中，$\because\overline{BC}=\overline{AC}=4$，$\therefore\angle ABC=\angle BAC<\angle BAD$，$\Rightarrow\cos\angle BAD<\cos\angle ABC$

(3)在ΔADC 中，$\because\overline{DA}+\overline{CD}>\overline{AC}$，$\therefore x+3>4$，$\Rightarrow x>1$

(4)$\because$ABCD 為凸四邊形，$\therefore\angle ACB+\angle ACD<180^0$，$\Rightarrow\angle ACB<180^0-\angle ACD$，$\therefore\cos\angle ACB>-\cos\angle ACD$

$\Rightarrow\frac{4^2+4^2-3^2}{2\times4\times4}>-\frac{3^2+4^2-x^2}{2\times3\times4}$，$\Rightarrow 4x^2<169$，$\therefore x<\frac{13}{2}$

(5)若 A、B、C、D 四點共圓，$\angle ABC+\angle ADC=180^0$，$\Rightarrow\cos\angle ADC=\cos(180^0-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=-\frac{3}{8}$

在ΔADC 中，$\cos\angle ADC=\frac{x^2+3^2-4^2}{2\cdot x\cdot 3}=-\frac{3}{8}$，$\Rightarrow 4x^2+9x-28=0$，$(4x-7)(x+4)=0$，$\therefore x=\frac{7}{4}$或 $x=-4$(不合)

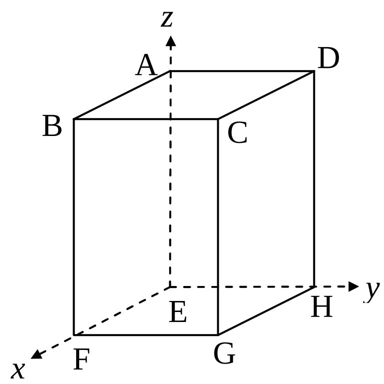
答：(4)(5)

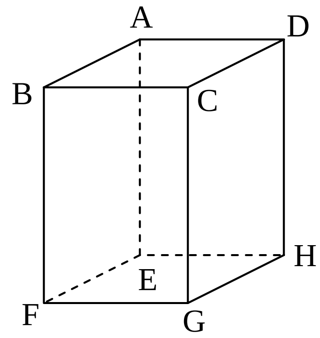
出處：第三冊 三角函數

三、選填題(占 12 分)

說明：1.第 A 至 B 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(10– 13)。 2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.如圖，設 ABCD－EFGH 為空間中長、寬、高分別為 2、3、5 的長方體。已知 $\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=\overline{BC}=3$，且 $\overline{DH}=5$，則內積 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ 之值為＿⑩＿。





解：1.以 E(0，0，0)座標化，如右圖

$\Rightarrow$A(0，0，5)，H(0，3，0)，C(2，3，5)

2.$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=(0,\ 3,\ -5)\cdot(2,\ 3,\ 0)=9$

答：9

出處：第四冊　空間向量

B.在遊戲中，阿玲拿到如右的數字卡。主持人隨機從 1 至 9 號球中同時取出三球，若這三球的號碼中任兩個都不在卡片上的同一行也不在卡片上的同一列時就得獎，則阿玲得獎的機率為＿$\dfrac{⑪}{⑫⑬}$＿。(化成最簡分數)

1	2	3
8	9	4
7	6	5

解：樣本空間 n(9 球取出三球)$=C_3^9=84$

事件：n(三號碼分別在不同行或列)$=3\times2\times1=6$

機率$=\dfrac{6}{84}=\dfrac{1}{14}$

答：$\dfrac{1}{14}$

出處：第二冊　機率

－ － － － － －以下第貳部份的非選擇題，必須作答於答案卷－ － － － － － －

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

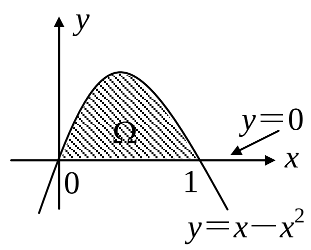
說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、……)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、在坐標平面上以Ω表曲線 $y=x-x^2$ 與直線 $y=0$ 所圍的有界區域。

(1)試求Ω的面積。(3 分)

(2)若直線 $y=cx$ 將Ω分成面積相等的兩塊區域，試求 c 之值。(7 分)

解：(1) $y=x-x^2=-x(x-1)$，且為開口向下的拋物線，如右圖

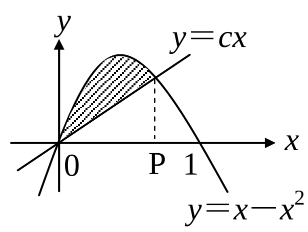


$$\Omega=\int_0^1[(x-x^2)-0]\,dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(2)(i)由 $\begin{cases}y=x-x^2\\ y=cx\end{cases}$，$\Rightarrow x-x^2=cx$，$\Rightarrow x[x+(c-1)]=0$

$\Rightarrow x=0$，$x=1-$c，$\therefore$O(0，0)，P($1-c$，0)，如右圖

(ii)斜線區域面積$=\displaystyle\int_0^{1-c}[(x-x^2)-cx]\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$



$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{c}{2}x^2\right)\Big|_0^{1-c}=\frac{1}{2}(1-c)^2-\frac{1}{3}(1-c)^3-\frac{c}{2}(1-c)^2=\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{6}(1-c)^3=\frac{1}{12}，\Rightarrow(1-c)^3=\frac{1}{2}，\therefore c=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=1-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

答：(1)$\dfrac{1}{6}$，(2) $1-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

出處：選修數學甲下　多項式函數的微積分

二、對於正整數 n，設 $(1+i)^n=a_n+ib_n$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 a_n、b_n 為實數。

(1)試求 $a_4^{\ 2}+b_4^{\ 2}$ 之值。(2 分)

(2)從恆等式 $(1+i)^{n+1}=(1+i)^n\,(1+i)$ 可推得 a_n、b_n 會滿足矩陣乘法 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\text{T}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，試求矩陣 T。(4 分)

(3)令 P、Q 為坐標平面上異於原點 O 的兩點，若矩陣 T 在平面上定義的線性變換將 P、Q 分別映射到點 P'、Q'，試證 $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$ 且∠POQ＝∠P′OQ′。(8 分)

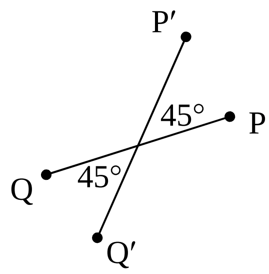
解：(1)當 $n=4$ 時，$(1+i)^4=(1+2i+i^2)^2=-4=a_4+ib_4$，∴ $a_4=-4$，$b_4=0$，$\Rightarrow a_4^{\ 2}+b_4^{\ 2}=(-4)^2+0^2=16$

(2) $(1+i)^{n+1}=(1+i)^n\,(1+i)=(a_n+ib_n)(1+i)=(a_n-b_n)+i\,(a_n+b_n)$

$\therefore a_{n+1}+ib_{n+1}=(a_n-b_n)+i\,(a_n+b_n)$

$\Rightarrow\begin{cases}a_{n+1}=a_n-b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$，$\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_n-b_n\\ a_n+b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，得知 $\text{T}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

(3) $\because \text{T}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos 45^\circ&-\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ&\cos 45^\circ\end{bmatrix}$



$\therefore \overline{OP'}=\sqrt{2}\,\overline{OP}$，∠POP′＝45° 與 $\overline{OQ'}=\sqrt{2}\,\overline{OQ}$，∠QOQ′＝45°

$\Rightarrow\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\sqrt{2}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$，且∠POQ＝∠POQ′

另證：設 P(a，b)，Q(c，d)，則

$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b\\ a+b\end{bmatrix}$，$\Rightarrow$ P′($a-b$，$a+b$)；$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}==\begin{bmatrix}c-d\\ c+d\end{bmatrix}$，$\Rightarrow$ Q′($c-d$，$c+d$)

(i) $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{2a^2+2b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$；$\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}=\dfrac{\sqrt{(c-d)^2+(c+d)^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\dfrac{\sqrt{2c^2+2d^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}=\sqrt{2}$

(ii) $\cos(\angle\text{POQ})=\dfrac{\overrightarrow{\text{OP}}\cdot\overrightarrow{\text{OQ}}}{|\overrightarrow{\text{OP}}||\overrightarrow{\text{OQ}}|}=\dfrac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}}$

$\cos(\angle\text{P}'\text{OQ}')=\dfrac{\overrightarrow{\text{OP}'}\cdot\overrightarrow{\text{OQ}'}}{|\overrightarrow{\text{OP}'}||\overrightarrow{\text{OQ}'}|}=\dfrac{(a-b,a+b)\cdot(c-d,c+d)}{\sqrt{2a^2+2b^2}\times\sqrt{2c^2+2d^2}}=\dfrac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}}$

$\Rightarrow$ cos(∠POQ)＝cos(∠P′OQ′)，$\Rightarrow$∠POQ＝∠P′OQ′

答：(1) 16，(2) $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$，(3)略

出處：第四冊 矩陣