112 學年度分科測驗試題 數學甲考科

第壹部分：選擇(填)題 (占 76 分)

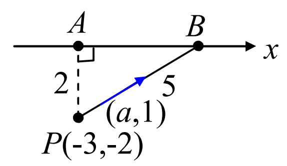
一、單選題(占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分

1.坐標平面上，一質點由點$(-3，-2)$出發，沿著向量$(a，1)$的方向移動 5 單位長之後剛好抵達 x 軸，其中 a 為正實數。試問 a 值等於下列哪一個選項？

(1) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ (2) 2 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ (5) $2\sqrt{6}$

解：選項中 a 值皆為正，如右圖，不失一般假設性



1. $A(-3，0)$，$\overline{AB}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$，得 $B(-3+\sqrt{21}，0)$

2.因$(a，1)$平行 $\overrightarrow{PB}=(\sqrt{21}，2)$，$\Rightarrow \dfrac{a}{1}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，得 $a=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

答：(4)

出處：第三冊　ch3 平面向量

2.放射性物質的半衰期 T 定義為「每經過時間 T，該物質的質量會衰退成原來的一半」。鉛製容器中有 A、B 兩種放射性物質，其半衰期分別為 T_A、T_B。開始記錄時這兩種物質的質量相等，112 天後測量發現物質 B 的質量為物質 A 的質量的四分之一。根據上述，試問 T_A、T_B 滿足下列哪一個關係式？

(1) $-2+\dfrac{112}{T_A}=\dfrac{112}{T_B}$ (2) $2+\dfrac{112}{T_A}=\dfrac{112}{T_B}$ (3) $-2+\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$

(4) $2+\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$ (5) $2\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$

解：設 A、B 兩種放射性物質原有質量為 x，利用關係式：剩下量＝原有量×$(\frac{1}{2})^{\frac{\text{時間}}{\text{半衰期}}}$

112 天後，物質 B 剩下量$=x\times(\frac{1}{2})^{\frac{112}{T_B}}$， 物質 A 剩下量$=x\times(\frac{1}{2})^{\frac{112}{T_A}}$

$\Rightarrow x\times(\frac{1}{2})^{\frac{112}{T_B}}=\frac{1}{4}(x\times(\frac{1}{2})^{\frac{112}{T_A}})$，$\Rightarrow(\frac{1}{2})^{\frac{112}{T_B}}=(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^{\frac{112}{T_A}}=(\frac{1}{2})^{\frac{112}{T_A}+2}$，得知 $\dfrac{112}{T_B}=2+\dfrac{112}{T_A}$

答：(2)

出處：第三冊　ch2 指數與對數

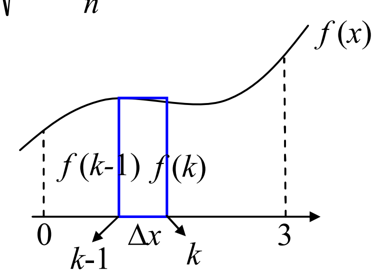
3.試問極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2})$的值可用下列哪一個定積分表示？

(1) $\int_0^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ (2) $\int_0^3\sqrt{1+9x^2}\,dx$ (3) $\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$ (4) $\int_0^3\sqrt{4+9x^2}\,dx$ (5) $\int_0^3\sqrt{4x^2+9}\,dx$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{4n^2+9k^2}]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{n}\sqrt{4n^2+9k^2}]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{\dfrac{4n^2+9k^2}{n^2}}]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{4+(\dfrac{3k}{n})^2}]$

令 $x=\dfrac{3k}{n}$，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{4+x^2}]=\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x[\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(k)]$，其中$\Delta x=\dfrac{3}{n}$，$f(k)=\sqrt{4+(\dfrac{3k}{n})^2}=\sqrt{4+x^2}$

當下限 $k=1$ 時，$x=\dfrac{3k}{n}=\dfrac{3}{n}\to0$ 上限 $k=n-1$ 時，$x=\dfrac{3k}{n}=\dfrac{3(n-1)}{n}\to3$



根據黎曼積分(右圖)，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x[\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(k)]=\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

答：(3)

出處：數甲上　ch3 積分

二、多選題(占 40 分)

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分

4.設 a，b 為實數。已知四個數-3，-1，4，7 皆滿足 x 的不等式$|x-a|\le b$，試選出正確的選項。

(1) $\sqrt{10}$ 也滿足 x 的不等式$|x-a|\le b$　　(2) 3，1，-4，-7 滿足 x 的不等式$|x+a|\le b$

(3) $-\frac{3}{2}$，$-\frac{1}{2}$，2，$\frac{7}{2}$滿足 x 的不等式$|x-a|\le\frac{b}{2}$　　(4) b 可能等於 4　　(5) a，b 可能相等

解：x 的不等式$|x-a|\le b$，$\Rightarrow -b\le x-a\le b$，$\Rightarrow a-b\le x\le a+b$

即-3，-1，4，7 滿足 $a-b\le x\le a+b$，$\Rightarrow -3\le x\le 7$ 或$-5\le x-2\le 5$

(1)因$-3\le\sqrt{10}\le 7$，$\Rightarrow\sqrt{10}$ 也滿足 x 的不等式$|x-a|\le b$

(2) 3，1，-4，-7 滿足 x 的不等式$|x-a|\ge b$，即 $a+b\ge 7$ 或 $a-b\le -3$

$\Rightarrow -a-b\le -7$ 或$-a+b\ge 3$，得知$-b\le x+a\le b$，$\Rightarrow|x+a|\le b$，$\Rightarrow$3，1，-4，-7 滿足 x 的不等式$|x+a|\le b$

(3)-3，-1，4，7 滿足$-5\le x-2\le 5$ 或$|x-2|\le 5$，取 $a=2$，$b=5$

則不等式$|x-a|\le\frac{b}{2}$，$\Rightarrow|x-2|\le\frac{5}{2}$，$\Rightarrow -\frac{1}{2}\le x\le\frac{9}{2}$，而$-\frac{3}{2}$不在$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{9}{2}$範圍內 (不合)

(4)-3，-1，4，7 滿足 $a-b\le x\le a+b$，$\Rightarrow a+b\ge 7$ 且 $a-b\le -3$

當 $b=4$ 時，$a\ge 3$ 且 $a\le 1$ (無解)

(5)當 $a=b$ 時，則 $a-b\le x\le a+b$，$\Rightarrow 0\le x\le 2a$，得知-3，-1 不在 $0\le x\le 2a$ 範圍內 (不合)

答：(1) (2)

出處：第一冊　ch1 數與式

5.考慮實係數多項式$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+ax+b$。已知方程式$f(x)=0$ 有虛根 $1+2i$ (其中$i=\sqrt{-1}$)，試選出正確的選項。

(1) $1-2i$ 也是$f(x)=0$ 的根　　(2) a，b 皆為正數　　(3) $f'(2.1)<0$

(4)函數 $y=f(x)$在 $x=1$ 有局部極小值　　(5) $y=f(x)$圖形反曲點的 x 坐標皆大於 0

解：(1)因$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+ax+b$ 為實係數多項式，且$f(1+2i)=0$

$\Rightarrow$根據虛根成雙(共軛)性質，得$f(1-2i)=0$

(2)因$f(1+2i)=f(1-2i)=0$，且$[x-(1+2i)][x-(1-2i)]=x^2-2x+5$ 為$f(x)$的因式

如右圖，因式分解$f(x)=(x^2-2x+5)(x^2-2x-11)$

且 $a+10-22=0$，$b+55=0$，得 $a=12$，$b=-55<0$ (不合)

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-11 \\ \hline
x^2-2x+5 & x^4-4x^3-2x^2+ax+b \\
 & x^4-2x^3+5x^2 \\ \hline
 & -2x^3-7x^2+ax \\
 & -2x^3+4x^2-10x \\ \hline
 & -11x^2+(a+10)x+b \\
 & -11x^2+22x\quad -55 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

(3) $f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x-1)(x+1)(x-3)$，$\Rightarrow f'(2.1)<0$

(4)令 $f'(x)=4(x-1)(x+1)(x-3)=0$，得 $x=-1$，1，3

x		-1		1		3	
$f'(x)$	<0	$=0$	>0	$=0$	<0	$=0$	>0
遞增減	↘		↗		↘		↗

如上表，得知 $y=f(x)$在 $x=1$ 有局部極大值

(5)令$f''(x)=12x^2-24x-4=4(3x^2-6x-1)=0$，得 $x=\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}$(一正一負根)

答：(1)(3)

出處：數甲上　ch2 微分　數甲下　ch1 複數與複數平面

6.設 a，b，c，d，r，s，t 皆為實數，已知坐標空間中三個非零向量 $\overrightarrow{u}=(a,b,0)$，$\overrightarrow{v}=(c,d,0)$及 $\overrightarrow{w}=(r,s,t)$滿足內積 $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=0$。考慮三階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1)若 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$，則行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$　　(2)若 $t\neq 0$，則行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(3)若存在一個向量 $\overrightarrow{w'}$ 滿足 $\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 且外積 $\overrightarrow{w'}\times\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{0}$，則行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(4)若對任意三個實數 e，f，g，向量(e,f,g)都可以表示成 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 的線性組合，則行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(5)若行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，則 A 的行列式不等於 0

解：根據題意，$\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 表示 $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{u}$ 且 $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{v}$

又三階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{bmatrix}$，則$\left|det(A)\right|=\left|\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{vmatrix}\right|$表示由 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 三向量所張的平行六面體體積

(1)若 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$，則 $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$，$\Rightarrow\overrightarrow{u}$ 不平行 $\overrightarrow{v}$，$\Rightarrow\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$，$\Rightarrow ad-bc\neq 0$，得知行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(2)若 $\overrightarrow{u}=(a,b,0)//\overrightarrow{v}=(c,d,0)$，$\Rightarrow\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$ (因 $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{u}$ 且 $\overrightarrow{w}\perp\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 為 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 公垂向量)

即當 $t\neq 0$，則行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$

(3)若 $\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{v}=0$，表示 $\overrightarrow{w'}$ 為 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 公垂向量，但是已知 $\overrightarrow{w}$ 為 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 公垂向量，$\Rightarrow\overrightarrow{w'}//\overrightarrow{w}$

又外積 $\overrightarrow{w'}\times\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{0}$ 表示 $\overrightarrow{w'}$ 不平行 $\overrightarrow{w}$，得知 $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$，$\Rightarrow\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$

(4)因向量(e,f,g)都可以表示成 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 的線性組合，則表示 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 不共平面，

即 $\overrightarrow{u}$ 不平行 $\overrightarrow{v}$，$\Rightarrow\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

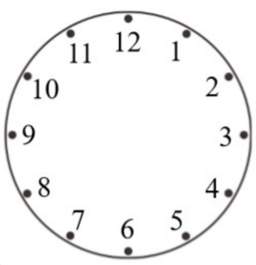
(5)若行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，$\Rightarrow\overrightarrow{u}$ 不平行 $\overrightarrow{v}$，則 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 三向量可以張成一平行六面體

$\Rightarrow det(A)=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{vmatrix}=t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，因 $t\neq 0$ 且$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，得知 $det(A)\neq 0$，即 A 的行列式不等於 0

答：(1)(4)(5)

出處：第四冊　ch1 空間向量

7.有一個依順時針方向依序標示 1，2，⋯，12 數字的圓形時鐘(如圖所示)。一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子，然後每次投擲一枚均勻銅板，依投擲結果，照以下規則移動這枚棋子的位置：



- 若出現正面，將棋子從當時位置依順時針方向移動 5 個鐘點。
- 若出現反面，將棋子從當時位置依逆時針方向移動 5 個鐘點。

例如：若投擲銅板三次均為正面，則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置，第三次移動到「3」點鐘位置。對任一正整數 n，令隨機變數 X_n 代表依上述規則經過 n 次移動後棋子所在的點鐘位置，$P(X_n=k)$代表 $X_n=k$ 的機率(其中 $k=1,2,\cdots,12$)，且令 $E(X_n)$代表 X_n 的期望值。試選出正確的選項。

(1) $E(X_1)=6$　　(2) $P(X_2=12)=\frac{1}{4}$　　(3) $P(X_8=5)\geq\frac{1}{2^8}$　　(4) $P(X_8=4)=P(X_8=8)$　　(5) $E(X_8)\leq 7$

解：(1) X_1 表示經過 1 次移動後棋子所在的點鐘位置，如右機率分布表

期望值 $E(X_1)=5\times\frac{1}{2}+7\times\frac{1}{2}=6$

事件	正面	反面
X_1 位置	5	7
機率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(2) $X_2=12$ 表示經過 2 次移動後棋子在 12 的位置

⇒可能事件為一正一反，一反一正，如右機率分布表

機率 $P(X_2=12)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

事件	1 正 1 反	1 正 1 反
X_2 位置	12	12
機率	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(3)當 $X_n=5$ 時，$n=1$，3，…為奇數，⇒$P(X_8=5)=0$ 或見(4)機率分布表

(4) X_8 表示經過 8 次移動後棋子所在的點鐘位置，其機率分布表如下，樣本空間 $n(S)=2^8$

連續出現正面位置：12，5，10，3，8，1，6，11，4

連續出現反面位置：12，7，2，9，4，11，6，1，8

事件	8 正	7正1反	6正2反	5正3反	4正4反	3正5反	2正6反	1正7反	8 反
X_8 位置	4	6	8	10	12	2	4	6	8
次數	$C_0^8=1$	$C_1^8=8$	$C_2^8=28$	$C_3^8=56$	$C_4^8=70$	$C_5^8=56$	$C_6^8=28$	$C_7^8=8$	$C_8^8=1$

$P(X_8=4)=\frac{1}{2^8}+\frac{28}{2^8}=\frac{29}{2^8}$，$P(X_8=8)=\frac{28}{2^8}+\frac{1}{2^8}=\frac{29}{2^8}$，⇒ $P(X_8=4)=P(X_8=8)$

(5) $E(X_8)=4\times\frac{1}{2^8}+6\times\frac{8}{2^8}+8\times\frac{28}{2^8}+10\times\frac{56}{2^8}+12\times\frac{70}{2^8}+2\times\frac{56}{2^8}+4\times\frac{28}{2^8}+6\times\frac{8}{2^8}+8\times\frac{1}{2^8}=\frac{489}{64}\approx7.64>7$

答：(1)(4)

出處：數甲下　ch3 機率分布

8.複數平面上，設 $\bar{z}$ 代表複數 z 的共軛複數，且 $i=\sqrt{-1}$ 。試選出正確的選項。

(1)若 z＝$2i$，則 $z^3=4i\,\bar{z}$　　(2)若非零複數 α 滿足 $\alpha^3=4i\,\bar{\alpha}$，則 $|\alpha|=2$

(3)若非零複數 α 滿足 $\alpha^3=4i\,\bar{\alpha}$ 且令 $\beta=i\,\alpha$，則 $\beta^3=4i\,\bar{\beta}$

(4)滿足 $z^3=4i\,\bar{z}$ 的所有非零複數 z 中，其主幅角的最小可能值為 $\frac{\pi}{6}$

(5)恰有 3 個相異非零複數 z 滿足 $z^3=4i\,\bar{z}$

解：(1) $z^3=(2i)^3=-8i$，$4i\,\bar{z}=4i(-2i)=8$，⇒ $z^3\neq4i\,\bar{z}$

(2) $|\alpha^3|=|4i\bar{\alpha}|$，⇒ $|\alpha|^3=|4i||\bar{\alpha}|=4|\alpha|$，得 $|\alpha|=2$

(3)由 $\beta=i\,\alpha$，⇒ $\alpha=\frac{\beta}{i}$ 代入 $\alpha^3=4i\,\bar{\alpha}$，⇒ $(\frac{\beta}{i})^3=4i\,\overline{(\frac{\beta}{i})}=4i(\frac{\bar{\beta}}{-i})=-4\bar{\beta}$

⇒ $\frac{\beta^3}{i^3}=\frac{\beta^3}{-i}=-4\bar{\beta}$，⇒得 $\beta^3=4i\,\bar{\beta}$

(4)滿足 $z^3=4i\,\bar{z}$，由(2)得知 $|z|=2$

$z^4=4i\,\bar{z}z=4i\,|z|^2=4i\times4=16i=16(0+i)=16(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

⇒ $z_k=\sqrt[4]{16}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4})=2(\cos(\frac{1+4k}{8})\pi+i\sin(\frac{1+4k}{8})\pi)$，$k=0$，1，2，3

⇒當 $k=0$ 時，最小的主幅角＝$\frac{1}{8}\pi$

(5)由(4)知 $z_k=2(\cos(\frac{1+4k}{8})\pi+i\sin(\frac{1+4k}{8})\pi)$，$k=0$，1，2，3，⇒共有 4 個相異非零複數 z 滿足 $z^3=4i\,\bar{z}$

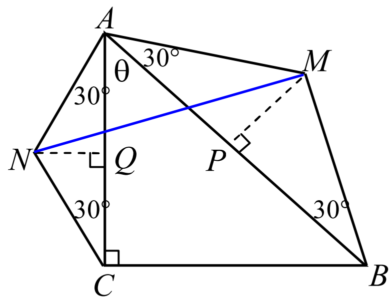
答：(2)(3)

出處：數甲下　ch1 複數與複數平面

三、選填題(占 18 分)

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分

9.已知平面上直角△ABC 的三邊長 $\overline{AB}=\sqrt{7}$，$\overline{AC}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=2$。若分別以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 為底邊在△ABC 的外部作頂角等於 120°的等腰三角形△MAB 與△NAC，則 $\overline{MN}^2=$_____(化為最簡分數)



解：根據題意，作一如右示意圖，分別作 $\overline{MP}\perp\overline{AB}$，$\overline{NQ}\perp\overline{AC}$

1.在△AMP 中，$\overline{AP}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$(等腰三角形，頂角平分線垂直平分底邊)

$\Rightarrow \overline{AM}=\dfrac{\overline{AP}}{\cos 30^0}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

同理，△ANQ 中，$\overline{AQ}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\Rightarrow \overline{AN}=\dfrac{\overline{AQ}}{\cos 30^0}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=1$

2.在△AMN 中，令$\angle BAC=\theta$，根據餘弦定理 $\overline{MN}^2=\overline{AM}^2+\overline{AN}^2-2\times\overline{AM}\times\overline{AN}\cos(\angle \mathrm{MAN})$

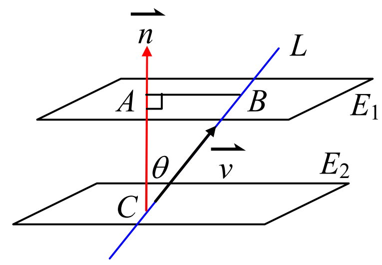
$\overline{MN}^2=(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}})^2+1^2-2\times\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times 1\times\cos(60°+\theta)=\dfrac{7}{3}+1-\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}(\cos 60°\cos\theta-\sin 60°\sin\theta)$

$=\dfrac{10}{3}-\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{7}})=\dfrac{13}{3}$，其中在△$ABC$ 中，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

答：$\dfrac{13}{3}$

出處：第二冊　ch1 三角比值及其應用　　第三冊　ch1 三角函數

10.坐標空間中有方向向量為(1，-2，2)的直線 L、平面 E_1：$2x+3y+6z=10$ 與平面 E_2：$2x+3y+6z=-4$。則 L 被 E_1，E_2 所截線段的長度為________(化為最簡分數)



解：1.平面 E_1 與平面 E_2 互相平行，根據題意，作示意圖如右

平面的法向量 $\overrightarrow{n}$ (2，3，6)，直線 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}$ (1，-2，2)，夾角為θ

2.在△ABC 中，$\overline{AC}=d(E_1，E_2)=\dfrac{|10-(-4)|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=2$

向量 $\overrightarrow{n}$ 與向量 $\overrightarrow{v}$ 夾角為θ，$\Rightarrow|\cos\theta|=\left|\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{v}|}\right|=\left|\dfrac{(2,3,6)\cdot(1,-2,2)}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\right|=\dfrac{8}{21}$

$\Rightarrow$因$|\cos\theta|=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{8}{21}$，$\Rightarrow\overline{BC}=\overline{AC}\times\dfrac{21}{8}=2\times\dfrac{21}{8}=\dfrac{21}{4}$，即 L 被 E_1，E_2 所截線段的長度為 $\overline{BC}=\dfrac{21}{4}$

答：$\dfrac{21}{4}$

出處：第四冊　ch2 空間中的直線與平面

11.百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動，規則如下：主辦單位準備編號 1、2、…、9 的牌卡十張，其中編號 8 的牌卡有兩張，其他編號的牌卡均只有一張。從這十張牌隨機抽出四張，且抽出不放回，依抽出順序由左至右排列成一個四位數。若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

(1)此四位數大於 6400　　(2)此四位數含有兩個數字 8

例如：若抽出四張牌編號依序為 5、8、2、8，則此四位數為 5828，可獲得獎品。依上述規則，共有_____個抽出列成的四位數可獲得獎品

解：(i)滿足(1)此四位數大於 6400 且編號 8 的牌卡有 1 張

(a)9 張(1~9)中，依序任取 4 張排列方法數＝$P^9_4=9\times8\times7\times6=3024$

(b)千位數字小於 6(即 1~5 取 1 張)且再任取 3 張排列方法數＝$5\times P^{9-1}_3=5\times8\times7\times6=1680$

(c)千位數字為 6，百位數字小於 4(即 1~3 取 1 張)且再任取 2 張排列方法數＝$1\times3\times P^{9-2}_2=1\times3\times7\times6=126$

$\Rightarrow$滿足(1)的方法數＝$3024-1680-126=1218$

(ii)滿足(2)此四位數含有兩個數字 8

(a)已有 2 張 8，再任取 2 張方法數 $=C_2^{10-2}=\dfrac{8\times7}{2}=28$

(b)將 4 張(2 張 8，2 張不是 8)排列方法數 $=\dfrac{4!}{2!}=12$

⇒滿足(2)的方法數 $=28\times12=336$

由(i)(ii)得知方法數共有 $1218+336=1554$ 種

答：1554

出處：第二冊　ch3　排列組合與機率

第貳部分、混合題或非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題 號的作答區內作答。選擇(填)題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶(液)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

設 a，b 為實數，並設 O 為坐標平面的原點。已知二次函數 $f(x)=ax^2$ 的圖形與圓 Ω ： $x^2+y^2-3y+b=0$ 皆通過點 $P(1，\dfrac{1}{2})$，並令點 C 為 Ω 的圓心。根據上述，試回答下列問題。

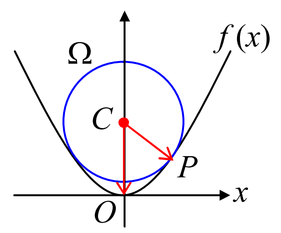
12.試求向量 $\overrightarrow{CO}$ 與 $\overrightarrow{CP}$ 夾角的餘弦值。(非選擇題，2 分)

解：(1) $f(x)=ax^2$ 通過點 $P(1，\dfrac{1}{2})$，代入，⇒ $\dfrac{1}{2}=a\cdot1^2$，⇒ $a=\dfrac{1}{2}$，⇒即 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ 為開口向上的拋物線

(2) $P(1，\dfrac{1}{2})$代入圓 Ω， $1^2+(\dfrac{1}{2})^2-3(\dfrac{1}{2})+b=0$，⇒得知 $b=\dfrac{1}{4}$，⇒即圓 Ω ： $x^2+y^2-3y+\dfrac{1}{4}=0$

⇒圓 Ω 經配方得 $x^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=2$，⇒得圓 Ω 的圓心 $C(0，\dfrac{3}{2})$，半徑為 $\sqrt{2}$

(3)作一示意圖如右，$\overrightarrow{CO}=(0，-\dfrac{3}{2})$，$|\overrightarrow{CO}|=\dfrac{3}{2}$ 與 $\overrightarrow{CP}=(1，-1)$，$|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{2}$



⇒夾角的餘弦值 $=\dfrac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CO}||\overrightarrow{CP}|}=\dfrac{0+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

答：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

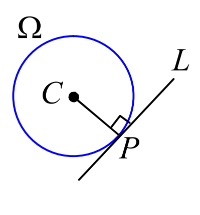
出處：第三冊　ch3　平面向量

13.試證明 $y=f(x)$圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。(非選擇題，4 分)

解：(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，⇒ $f'(x)=x$，過 $P(1，\dfrac{1}{2})$切線斜率 $=f'(1)=1$

⇒利用點斜式，$f(x)$過 P 點切線方程式為 $y-\dfrac{1}{2}=1\cdot(x-1)$，⇒即 $y=x-\dfrac{1}{2}$

(2)設過 $P(1，\dfrac{1}{2})$與 Ω 相切的直線方程式 L ：$y-\dfrac{1}{2}=m\cdot(x-1)$，如右圖



因 $L\perp\overline{CP}$，⇒ $m_L\times m_{CP}=m\times\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{1-0}=m\times(-1)=-1$，⇒直線 L 的斜率 $=m=1$

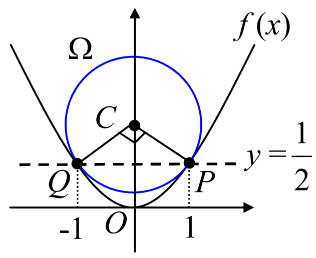
⇒代回方程式 L ：$y-\dfrac{1}{2}=1\cdot(x-1)$，⇒即 $y=x-\dfrac{1}{2}$

由(1)(2)得知 $y=f(x)$圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線方程式為 $y=x-\dfrac{1}{2}$

出處：第一冊　ch2 直線與圓　　數學甲上　　ch2 微分

14.試求 $y=f(x)$圖形上方與Ω下半圓弧所圍區域的面積。(非選擇題，6 分)

解：(1)交點$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}x^2 \\ \Omega: x^2+y^2-3y+\dfrac{1}{4}=0 \end{cases}$ 得$(x，y)=P(1，\dfrac{1}{2})$，$Q(-1，\dfrac{1}{2})$，如右圖



(2) (a)△CPQ 中，$\overline{CP}=\overline{CQ}=\sqrt{2}$，$\overline{PQ}=2$，⇒△CPQ 為直角△

△CPQ 面積$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$

(b)扇形 CPQ 面積$=\dfrac{1}{4}$圓面積$=\dfrac{1}{4}\times\pi\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\pi}{2}$

(c)弓形面積$=\dfrac{\pi}{2}-1$

(d) $y=\dfrac{1}{2}$與 $f(x)$所圍面積$=\int_{-1}^{1}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x^2)dx=(\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{6})\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{2}{3}$

所圍區域的面積$=y=\dfrac{1}{2}$與 $f(x)$所圍面積－弓形面積$=\dfrac{2}{3}-(\dfrac{\pi}{2}-1)=\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

答：$\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

出處：數學甲上　ch3 積分

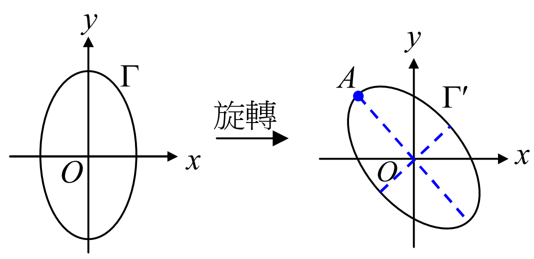
<u>15-17 題為題組</u>

坐標平面上，設Γ為中心在原點且長軸落在 y 軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉θ角(其中 $0<\theta<\pi$)的線性變換將Γ變換到新橢圓Γ′：$40x^2+4\sqrt{5}xy+41y^2=180$，點$(-\dfrac{5}{3}，\dfrac{2\sqrt{5}}{3})$為Γ′上離原點最遠的兩點之一。

根據上述，試回答下列問題。

15.橢圓Γ′的長軸長為_________ (化為最簡根式)(選填題，2 分)

解：根據題意，作揖式意圖如右，令 $A(-\dfrac{5}{3}，\dfrac{2\sqrt{5}}{3})$

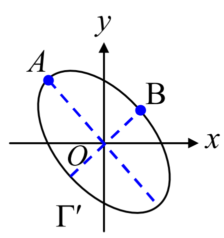


⇒橢圓Γ′的長軸長為 $2\overline{OA}=2\sqrt{(-\dfrac{5}{3})^2+(\dfrac{2\sqrt{5}}{3})^2}=2\sqrt{\dfrac{25}{9}+\dfrac{20}{9}}=2\sqrt{5}$

答：$2\sqrt{5}$

出處：數學甲下　ch2 二次曲線

16.試求Γ′短軸所在的直線方程式與短軸長。(非選擇題，4 分)



解：(1)如右圖，長軸所在直線斜率$=m_{OA}=\dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

因長軸與短軸互相垂直，即$\overline{OA}\perp\overline{OB}$，⇒$m_{OA}\times m_{OB}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times m_{OB}=-1$，⇒$m_{OB}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

⇒短軸所在直線方程式為 $y-0=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x-0)$，即 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$

(2)交點 B$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x \\ \text{橢圓}\Gamma' \end{cases}$，⇒將 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$ 代入Γ′：$40x^2+4\sqrt{5}x(\dfrac{\sqrt{5}}{2}x)+41(\dfrac{\sqrt{5}}{2}x)^2=180$，

⇒$\dfrac{405}{4}x^2=180$，⇒$x^2=\dfrac{16}{9}$，得 $x=\pm\dfrac{4}{3}$，$y=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，⇒取 $B(\dfrac{4}{3}，\dfrac{2\sqrt{5}}{3})$

⇒短軸長$=2\overline{OB}=2\sqrt{(\dfrac{4}{3})^2+(\dfrac{2\sqrt{5}}{3})^2}=2\sqrt{\dfrac{16}{9}+\dfrac{20}{9}}=4$

答：方程式 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{3}x$，短軸長 4

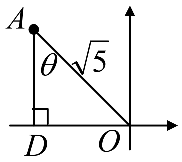
出處：數學甲下　ch2 二次曲線

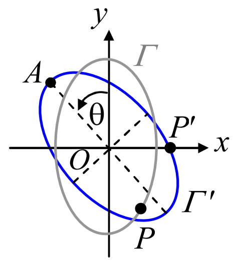
17.已知在 Γ 上的一點 P 經由此旋轉後得到的點 P'落在 x 軸上，且 P'點的 x 坐標大於 0。試求 P 點的坐標。(非選擇題，6 分)

解：(1)根據題意，作一示意圖如右，設逆時針旋轉 θ 角(θ 為銳角)

$\Rightarrow$在△OAD 中，得知 $\sin\theta = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos\theta = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OA}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3}$





(2)設 $P'(k，0)$，$k>0$，代入橢圓 Γ'：$40k^2=180$，取 $k=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\Rightarrow P'(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}，0)$

(3)設 $P(x，y)$，且逆時針旋轉 θ 變換為 $P'(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}，0)$，$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$，即 $P(\sqrt{2}，-\dfrac{\sqrt{10}}{2})$

答：$(\sqrt{2}，-\dfrac{\sqrt{10}}{2})$

出處：第四冊　ch4 矩陣　數學甲下　ch2 二次曲線