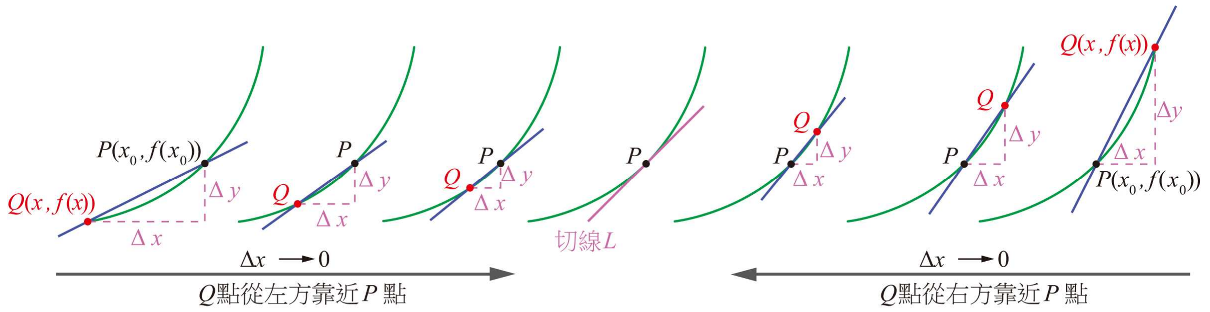
Ch 2-1 微分的概念與性質　　　　三年___班 座號：____ 姓名：

重點 1：導數與切線

0.導數概念：給定函數 $f(x)$及其圖形上一定點 $P(a，f(a))$，任取 $Q(x，f(x))$為圖形上異於 P 的另一動點。

若當 Q 點沿著圖形向 P 點靠近時，割線 PQ 的斜率 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 會趨近於一個唯一的定值，如下圖

(即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在)，則我們稱此定值 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 為 $f(x)$在 $x=a$ 處的導數，以符號 $f'(a)$表示



1.導數的定義：

已知函數 $f(x)$在某個包含 a 的開區間有定義，當極限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在時，稱此極限為函數 $f(x)$在 $x=a$ 處的導數，

記作 $f'(a)$，即 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ，此時亦稱 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分

2.導數的第二定義：

令 $h=x-a$，即 $x=a+h$ 代入，$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

3.導數的幾何性質(與切線的斜率)：

若導數 $f'(a)$存在，則稱通過點 $P(a，f(a))$且斜率為 $f'(a)$的直線為函數 $f(x)$的圖形在 P 點的切線，而 P 點稱為切點

$\Rightarrow$以點 $P(a，f(a))$為切點的切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

說明：設 $P(a，f(a))$是函數 $f(x)$圖形上的一個定點，

而 $Q(x，f(x))$是圖形上異於 P 的一定點，

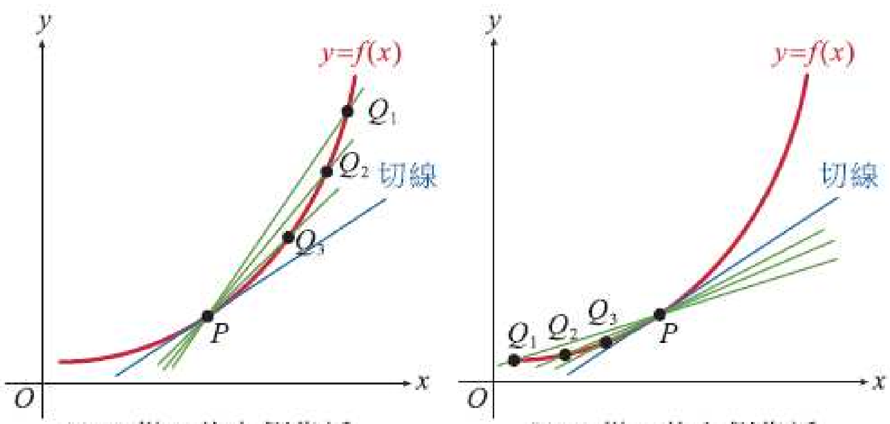
連接 P 與 Q 可得割線 PQ

割線 PQ 的斜率為 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ，

令 $\Delta x=x-a$ 為 x 的變化量，

$\Delta y=x-a$ 為 $f(x)-f(a)$為 y 的變化量，

$\Rightarrow$割線 PQ 的斜率為 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$



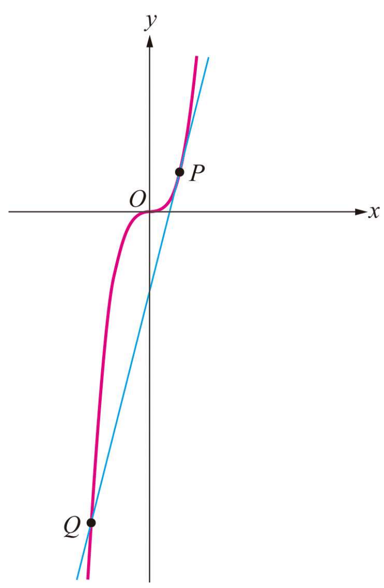
(a) Q 從 P 的右側靠近　　(b) Q 從 P 的左側靠近

當 Δx 趨近於 0 時，這些割線的斜率趨近於定值 m，即 $m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

例 1.1：給定函數 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3$，則：

(1)試判斷 $f'(2)$是否存在？

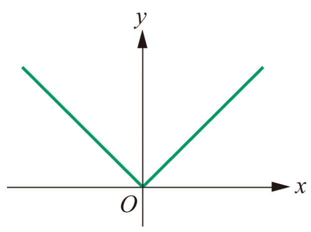
(2)若 $f'(2)$存在，試求以 $P(2，\dfrac{8}{3})$為切點之切線方程式



Ex1.1：給定函數 $f(x)=\frac{1}{3}x^3$，則：

(1)試判斷 $f'(0)$是否存在？ (2)若 $f'(0)$存在，試求以 $P(0，0)$為切點之切線方程式

例 1.2：設函數 $f(x)=|x|$，試問 $f(x)$在 $x=0$ 處是否可微？



Ex1.2：設函數 $f(x)=|x|$，試問 $f(x)$在 $x=-1$ 處是否可微？

Ex1.21：試判斷函數 $f(x)=|x-2|$不可微分的位置

例 1.3：試判斷函數 $f(x)=[\,x\,]$在 $x=0$ 的導數存在與否？

Ex1.3：試判斷函數 $f(x)=\begin{cases} x, x\neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$在 $x=0$ 的函數值與極限值是否相等，並判斷 $f(x)$在 $x=0$ 的導數存在與否？

Ex1.31：試問函數 $f(x)=[\,x\,]$在 $x=2$ 處是否可微分？

例1.4：設函數 $f(x)=x^3$，則：

(1)給定任意實數x_0，試計算 $f'(x_0)$

(2)利用(1)的結果完成下列表格：

x_0	-2	0	$\sqrt{5}$	4
$f'(x_0)$				

重點 2：導函數

1.導函數：給定函數 $f(x)$，當 $f(x)$定義域中的每一個數 a，其導數 $f'(a)$均存在時，稱 $f'(x)$為 $f(x)$的導函數，並稱 $f(x)$為可微分函數。

註：(1)函數 $y=f(x)$的導函數記作 $f'(x)$，也可以記為 y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$，$(f(x))'$

註：導函數 $f'(x)$稱為 $f(x)$的一階導函數，定義 $f(x)$的 n 階導函數，以符號 $f^{(n)}(x)$來表示

(2)符號$\dfrac{dy}{dx}$是由萊布尼茲(G. W. Leibniz，德國，1646~1716)與牛頓先後獨立提出微積分的基本理論，並創造微積分中使用的符號

2.可微分：當函數 $f(x)$在開區間 $\mathrm{I}=(a，b)$內的每一數之導數都存在時，稱函數 $f(x)$在區間 I 上可微分

註：當函數 $f(x)$為可微分函數時，「求函數 $f(x)$的導函數」的過程，稱為將函數 $f(x)$微分

例 2.0：給定常數 c，試求函數 $f(x)=c$ 的導函數 $f'(x)$

例 2.1：設函數 $f(x)=\sqrt{x}$ ，則：

(1)對正實數 x_0，試求 $f'(x_0)$ (2)利用(1)的結果計算 $f'(9)$

Ex2.1：設函數 $f(x)=|x|$，則：

(1)試求 $f(x)$的導函數 $f'(x)$並寫出其定義域

(2)利用(1)的結果計算 $f'(2)$

重點 3：微分公式

當函數 $f(x)$為可微分函數時，「求函數 $f(x)$的導函數」的過程，稱為將函數 $f(x)$微分。常用的微分公式如下：

1.若常數函數 $f(x)=c$，則 $f'(x)=0$，即 $(c)'=0$

2.若單項多項式函數 $f(x)=x^n$，n 為正整數，則 $f'(x)=nx^{n-1}$，即 $(x^n)'=nx^{n-1}$

3.若函數 $f(x)$為可微分函數，c 為常數，則 $cf(x)$也是可微分函數，且 $(cf(x))'=cf'(x)$

4.若函數 $f(x)$與 $g(x)$皆為可微分函數，則 $f(x)+g(x)$也是可微分函數，且 $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

5.多項式函數的導函數公式：

若實係數多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 為可微分函數，

則導函數 $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots\ldots+2a_2x+a_1$

6.二階導函數：

多項式函數 $f(x)$的導函數 $f'(x)$也是可微分函數，則將 $f'(x)$的導函數稱為 $f(x)$的二階導函數，以符號 $f''(x)$表示

例 3.0：已知函數 $f(x)$與 $g(x)$均為可微分函數，試證明：$f(x)+g(x)$為可微分函數且 $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

證明：令 $h(x)=f(x)+g(x)$，假設函數 $f(x)$與 $g(x)$均在 $x=x_0$ 處可微分。

則 $\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$，

由函數極限的性質可知：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$ 存在，

且其值為 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$。

因此，$f(x)+g(x)$在 $x=x_0$ 處可微分，且 $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$。故 $f(x)+g(x)$可微分且 $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

Ex3.0：已知函數 $f(x)$與 $g(x)$均在 $x=x_0$ 處可微分。則：

(1)令 $h(x)=f(x)-g(x)$，試驗證 $\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$ 可表示為 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

(2)利用第(1)小題的結果並利用技巧證明：$f(x)-g(x)$在 $x=x_0$ 處可微分且 $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$

證明：(1) $\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{(f(x)-g(x))-(f(x_0)-g(x_0))}{x-x_0}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

(2) $(f-g)'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)-g'(x_0)$，故 $(f-g)(x)$在 $x=x_0$ 處可微分

例 3.1：求函數 $f(x)=3x^4-2x^3+5x^2-3x+6$ 的導函數

Ex3.1：設函數 $f(x)=3x^4-2x^3+4x^2-7$，則：

(1)試求 $f(x)$的一階導函數 $f'(x)$

(2)試求 $f(x)$的二階導函數 $f''(x)$

(3)試求 $f'(-2)$，$f''(1)$的值

重點 4：導數的應用

1.求切線方程式：

求函數 $f(x)$的圖形在切點 P(a，b)的切線時，其中導數 $f'(a)$存在，且為切線的斜率，利用點斜式求得切線方程式

2.導數的意涵：

給定一個可微分函數 $f(x)$及其定義域中的一點 x_0，$f'(x_0)$事實上可看作是 $f(x)$在 $x=x_0$ 處的瞬時變化率

$f(x)$ 的定義	$f'(x_0)$ 的意義
位置對時間的函數	時間 $x=x_0$ 時的速度 (位置的瞬時變化率)
速度對時間的函數	時間 $x=x_0$ 時的加速度 (速度的瞬時變化率)
流經電線截面的總電荷量對時間的函數	時間 $x=x_0$ 時的電流大小 (電荷量的瞬時變化率)
血壓對用藥量的函數	藥量 $x=x_0$ 時，血壓對用藥量的敏感度 (血壓的瞬時變化率)
人口對時間的函數	時間 $x=x_0$ 時人口的增長率

例 4.1：有一顆球從 100 公尺的高空往下墜，假設過了 t 秒時，球離地面的高度為 $f(t)=-4.9t^2+100$ (公尺)，$0\le t\le\frac{5}{2}$，

試求下列各值：

(1)在第 1 秒與第 2 秒之間的平均速度

(2)一階導函數 $f'(t)$及二階導函數 $f''(t)$

(3)在第 2 秒時的瞬時速度及瞬時加速度

Ex4.1：某個城鎮的人口，從最初的 10000 人，經過 t 年之後增加到數量 $P(t)$人，$P(t)$可以近似表成

$P(t)=200t^2+100t+10000$ $(0\le t\le 10)$，試求：

(1)前 5 年的平均人口增長率　　(2) $P'(t)$　　(3) $t=5$ 時的人口增長率

重點 5：兩個可微分函數乘積的導函數公式

1.設函數 $f(x)$，$g(x)$皆為可微分函數，則 $f(x)g(x)$也是可微分函數，且$(f(x)g(x))'=f(x)'g(x)+f(x)g(x)'$

2.設函數 $f(x)$，$g(x)$皆為可微分函數，則$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在 $g(x)\neq 0$ 處是可微分函數，且$(\dfrac{f(x)}{g(x)})'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

3.合成函數微分公式：(連鎖律)(隱函數微分)

設函數 $f(x)$，$g(x)$皆為可微分函數，則合成含數$(g\circ f)(x)$也是可微分函數，且$(g\circ f)'(x)=g(f(x))'f(x)'$

註：合成函數$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

◎乘積微分公式

例 5.0：已知函數 $f(x)$與 $g(x)$均為可微分函數，試證明：

$f(x)g(x)$為可微分函數且$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

證明：令 $h(x)=f(x)g(x)$。假設函數 $f(x)$與 $g(x)$均在 $x=x_0$ 處可微分。

則$\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{g(x)[f(x)-f(x_0)]+f(x_0)[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}$

$=[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}]g(x)+f(x_0)[\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}]$，

再由函數極限的性質及 $g(x)$在 $x=x_0$ 連續知$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$存在且其值為

$\lim\limits_{x\to x_0}[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}]\lim\limits_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\lim\limits_{x\to x_0}[\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}]=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$。

因此，$f(x)g(x)$ 為可微分函數且$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

例 5.1：求函數 $f(x)=(x^3-2x^2+1)(2x^2+3x+1)$的導函數

例 5.2：小明在某火災現場附近，此時消防車正鳴笛朝他們加速疾駛而來。事實上由物理上的都卜勒效應可知當消防車的速度越快，小明所聽到的鳴笛聲頻率會越高。若此時氣溫為攝氏 20 度且鳴笛聲的頻率保持在 600 赫茲，則他所聽到的鳴笛聲頻率可表示為 $h(x)=\dfrac{205800}{343-x}$ (赫茲)，其中 x 為消防車的速度(單位：公尺／秒)。當消防車加速到 90 (公里／小時)，即 25 (公尺／秒)，試問此時鳴笛聲的頻率變化率(單位：赫茲／秒)

Ex5.2：試求函數 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$ 的導函數 $f'(x)$

例 5.3：給定函數 $f(x)=x^{-n}$，其中 n 為正整數，試計算 $f'(x)$

Ex5.3：試求函數 $f(x)=\dfrac{2}{x^5}$ 的導函數 $f'(x)$並指出其定義域

◎求過圖形上點的切線方程式

例 5.4：試求過函數 $h(x)=(x-1)^9$ 上一點 $P(2，1)$的切線方程式

Ex5.4：設 $f(x)=(x+2)^8+1$，試求 $f'(-1)$的值

◎求過「圖形外一點」的切線方程式

例 5.5：設函數 $f(x)=x^2+x$ 的圖形為 Γ，試求通過 Γ 外一點 $Q(1，1)$且與 Γ 相切的直線方程式

Ex5.5：設函數 $f(x)=x^2+1$ 的圖形為 Γ，P 為 Γ 上的點，已知以 P 點為切點的切線 L 與直線 $y=2x+1$ 平行，試求：

(1) P 點的坐標　(2)切線 L 的方程式

重點 6：導數的應用(一次估計)(一次近似)

1.意義：設函數 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，且 P(a，$f(a)$)是 $f(x)$圖形上一點，則：如右圖

過 P 點的切線方程式為 L：$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

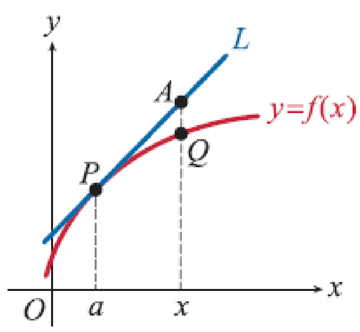
過點(x，0)的鉛直線交函數 $f(x)$的圖形於點 Q(x，$f(x)$)

交切線 L 於點 A(x，$f(a)+f'(a)(x-a)$)

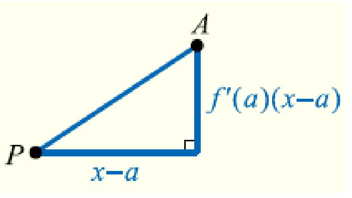
⇒當 x 很接近 a 時，Q 點也很接近 A 點，此時 Q 點與 A 點的 y 坐標近似，

即 $f(x)$近似於一次函數 $f(a)+f'(a)(x-a)$

⇒稱函數 $f(x)$在 $x=a$ 附近的一次估計(或一次近似)



2.一次估計公式：



若函數 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，

則當 x 很接近 a 時，$f(x)$近似於一次函數 $f(a)+f'(a)(x-a)$

註：利用函數 $f(x)$在 $x=a$ 的泰勒展式中，計算一次近似函數

◎泰勒展開式、微分的方法計算一次近似

例 6.1：函數 $f(x)=2x^3-7x^2+6x=2(x-1)^3-(x-1)^2-2(x-1)+1$，得到在 $x=1$ 附近的一次近似 $g(x)=-2(x-1)+1$

即當 $|x-1|$ 非常小時，$f(x)\approx -2(x-1)+1$

一次近似 $g(x)$與原函數 $f(x)$的關係：

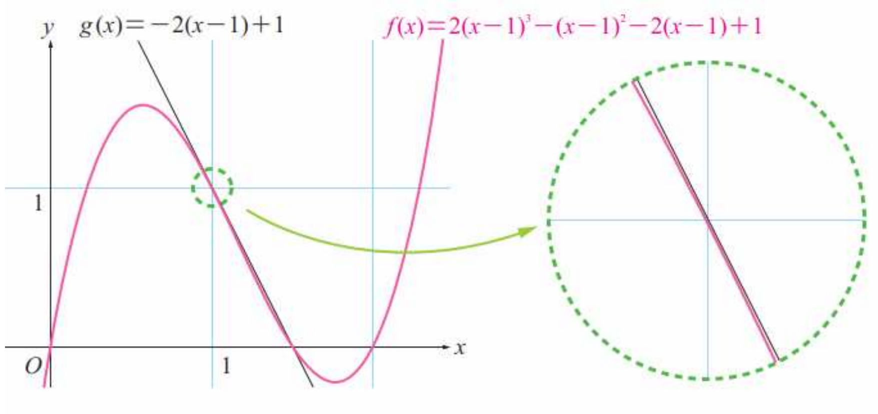
$f(1)=2(0)^3-(0)^2-2(0)+1=1$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)^3-(x-1)^2-2(x-1)+1-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)^3-(x-1)^2-2(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(2(x-1)^2-(x-1)-2)=-2$$



可知 $g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)=-2(x-1)+1$

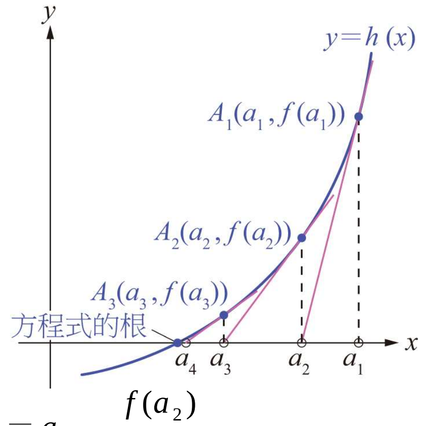
即 $f(x)$在 $x=1$ 附近的一次近 $g(x)$，即為 $f(x)$的圖形上以$(1，f(1))$為切點的切線方程式所對應的函數

Ex6.1：試利用微分的方法求 $f(x)=(x+2)^{10}$ 在 $x=-3$ 處的一次近似

重點 7：牛頓法

緣由：利用**勘根定理**可以求得連續函數**實根 a 的範圍**，而求可微分函數，使用**牛頓法**有效率得**實根 a 的近似值**

◎牛頓法：如右圖為多項式函數 $f(x)$的部分圖形，其中圖形與 x 軸交點的 x 坐標 a 就是方程式 $f(x)=0$ 的一個實根



Step1：找一個接近實根 a 的初始值 a_1 開始(可以來自勘根定理)

Step2：設 L 是以點$(a_1，f(a_1))$為切點的切線。因為 L 的斜率為 $f'(a_1)$，

利用點斜式，得方程式為 $L：y-f(a_1)=f'(a_1)(x-a_1)$

Step3：當 $f'(a_1)\neq 0$(切線 L 不是水平切線)時，切線與 x 軸交於點$\left(a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}，0\right)$

令 $a_2=a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}$ 成為實根 r 的**第二個近似值**

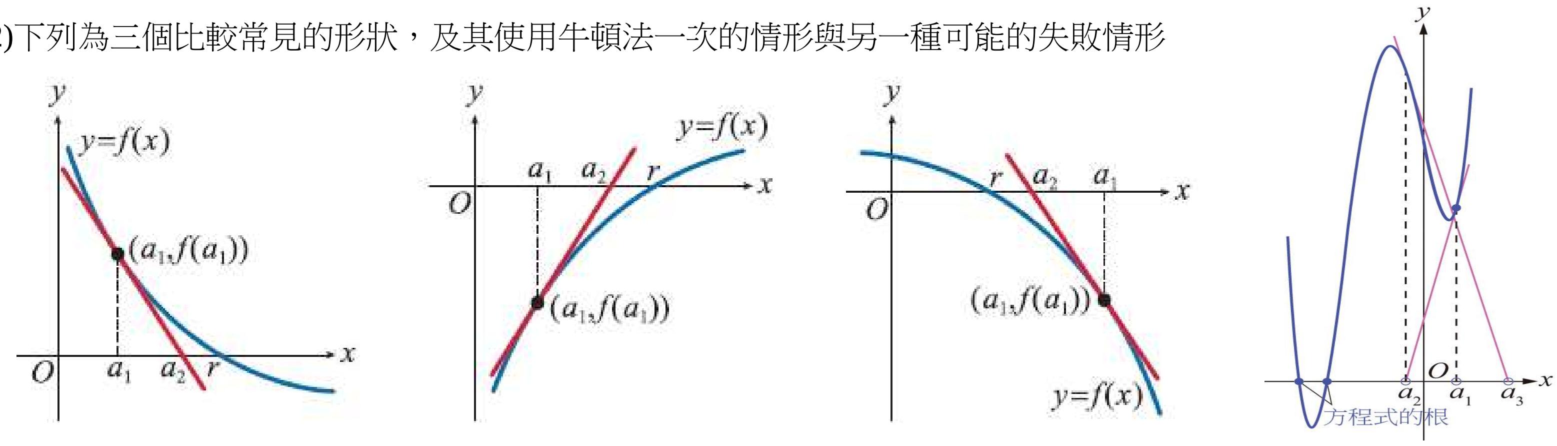
Step4：從 a_2 開始，經同樣的程序，當 $f'(a_2)\neq 0$ 時，可以得到實根 r 的**第三個近似值** $a_3=a_2-\dfrac{f(a_2)}{f'(a_2)}$

Step5：持續這樣的程序，當 $f'(a_k)\neq 0$ 時，可以得到實根 a 的第 $k+1$ 個近似值 $a_{k+1}=a_k-\dfrac{f(a_k)}{f'(a_k)}$

6.這一序列的近似值 a_1，a_2，a_3，⋯會愈來愈接近實根 a，這種求實根近似值的方法是由牛頓提出來的，稱為**牛頓法**

註：(1)當 $f(x)$為多項式函數，且 a 為 $f(x)=0$ 的一個實根時，只要適當選取足夠接近 a 的初始值 a_1，牛頓法的遞迴式所生成的數列會愈來愈接近實根 a (數列 a_1，a_2，a_3，⋯收斂，其極限值為方程式 $f(x)=0$ 的實根)

(2)下列為三個比較常見的形狀，及其使用牛頓法一次的情形與另一種可能的失敗情形



◎牛頓法求實根的近似值

例 7.1：已知函數 $f(x)=2x^3+x^2-x+1$ 僅有一個實根，試回答下列問題：

(1)若該實根落在區間$(a，a+1)$，其中 a 為整數，試求 a 之值

(2)試使用牛頓法找出根的近似值 α (四捨五入至小數點後第四位)使得$|f(\alpha)|<0.001$

解：(1)容易看出來，當 $x\geq 0$ 時 $f(x)>0$，而當 $x\leq -2$ 時 $f(x)<0$，所以只需要考慮 0 到-2 之間的整數

使用勘根定理，由 $f(-1)=1>0$ 及 $f(-2)=-9<0$ 得知: 此實根位於區間$(-2，-1)$內，即 $a=-2$

(2)使用牛頓法，取初始值 $a_1=-1$

計算 $f(x)$的一階導函數 $f'(x)=6x^2+2x-1$，

故牛頓法的遞迴公式為 $a_{k+1}=a_k-\dfrac{f(a_k)}{f'(a_k)}=a_k-\dfrac{2a_k^3+a_k^2-a_k+1}{6a_k^2+2a_k-1}=\dfrac{4a_k^3+a_k^2-1}{6a_k^2+2a_k-1}$

可使用計算機或 Excel 計算如下表：

k	a_k	a_{k+1}	$f(a_k)$
1	-1.00000	-1.33333	1
2	-1.33333	-1.24339	-0.62962963
3	-1.24339	-1.23386	-0.055177923
4	-1.23386	-1.23375	-0.000585129

因此，$\alpha=-1.2339$ 為所求

Ex7.1：已知函數 $f(x)=x^5+x-1$ 僅有一個實根，試使用牛頓法找出根的近似值 α (四捨五入至小數點後第五位)

使得 $|f(\alpha)|<0.001$

解：(1)使用勘根定理，由 $f(0)=-1<0$ 及 $f(1)=1>0$ 得知此實根位於區間(0，1)內。

(2)使用牛頓法，取初始值 $a_1=1$，計算 $f(x)$ 的一階導函數 $f'(x)=5x^4+1$，

故牛頓法的遞迴公式為 $a_{k+1}=a_k-\dfrac{f(a_k)}{f'(a_k)}=a_k-\dfrac{a_k^5+a_k-1}{5a_k^4+1}=\dfrac{4a_k^5+1}{5a_k^4+1}$

計算如下表：

k	a_k	a_{k+1}	$f(a_k)$
1	1	0.83333	1
2	0.83333	0.76438	0.23520
3	0.76438	0.75502	0.02532
4	0.75502	0.75488	0.00037

因此，$\alpha=0.75502$ 為所求