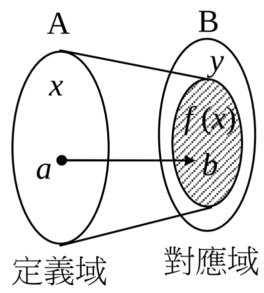
Ch 1.2 函數及其極限　　三年____班 座號：___ 姓名：

重點 1：函數的概念

1.定義：設 A 與 B 為兩非空集合，若對於 A 中的每一元素，在 B 中都**恰有一個**元素與它對應，
則這個對應關係就稱為由 A **映至**到 B 的一個函數，記作 $f:A\to B$，或寫成 $y=f(x)$，$x\in A$
其中 x 稱為**自變數**，y 稱為**應變數**，即變數 y 隨著變數 x 而變化，**稱 y 是 x 的函數**



2.定義域、對應域：

函數 $f:A\to B$ 中，集合 A 稱為函數 f 的**定義域**，集合 B 稱為函數 f 的**對應域**

註：若函數沒有指明它的定義域，則函數 f 的定義域就是使函數值為實數的所有實數 x 所成之集合

3.函數值：設函數 $f:A\to B$，則 $f(x)$表示 x 在 B 中的對應元素，稱為函數 f 在 x 的**函數值**

註：設函數 f：$A\to B$，則對於集合 A 中的**每個**元素 a，都可以找到集合 B 中的**唯一元素** b，使得 a 對應到 b
其中 b 稱為函數 f 在 a 的函數值，記為 $f(a)=b$

4.值域：函數 $f:A\to B$ 中所有**函數值**所成的集合 $f(A)=\{f(x)|\ x\in A\}$稱為函數 f 的**值域**，
即 $f(A)\subset$ B ($f(A)$為集合 B 的子集)

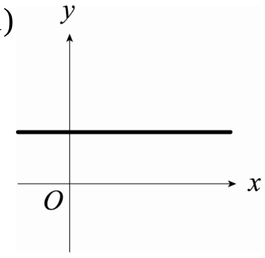
註：若函數的定義域與值域皆為實數 R 的子集，則稱此函數為**實函數**

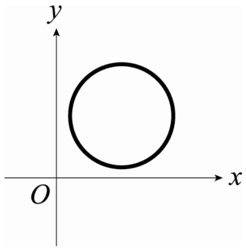
例 1.1：求下列函數的定義域：

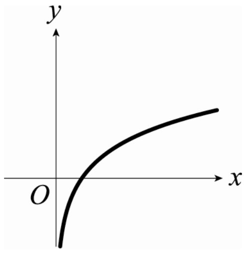
(1) $f(x)=\log x$　　(2) $g(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$　　(3) $h(x)=\sqrt{x^2-x-6}$

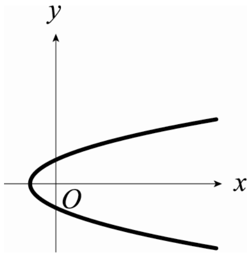
Ex1.1：求下列函數的定義域：(1) $f(x)=\tan x$　　(2) $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$　　(3) $h(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$

例 1.2：下列各圖形中，哪些**不是**以 x 為自變數的函數圖形？

(1)


(2)


(3)


(4)


重點 2：函數的值域

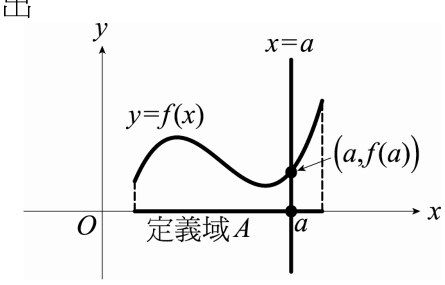
1.意義：函數的定義域是由函數值為實數來確定，而函數的值域可以藉助函數圖形求出

註：若函數 $f: x \to y$，則**定義域是求 x 的範圍，值域是 y 求的範圍**

2.性質：定義域中每個 x 都只有一個對應的函數值 y

說明：設函數 $y=f(x)$的定義域為 A，如右圖

若 $a \in A$，則根據函數圖形的定義，$(a, f(a))$是 $y=f(x)$圖形上的一點



3.函數圖形：

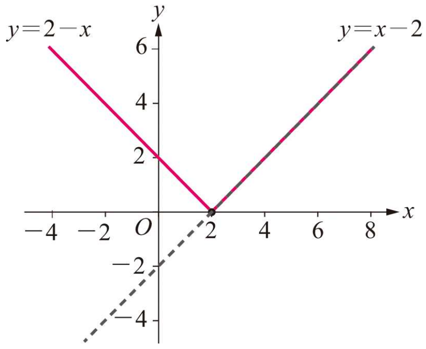
若 a 為函數 $y=f(x)$定義域中的任意數，則每一條**鉛直線** $x=a$ 與函數 $y=f(x)$的圖形**恰有一個交點**$(a, f(a))$

註：若有一鉛直線與圖形**不只有一個交點**，則這圖形一定不是以 x 為自變數的函數圖形

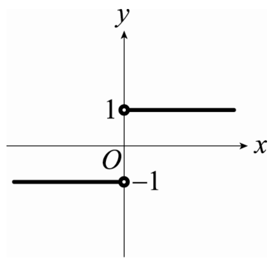
例 2.1：試求二次函數 $y=x^2-2x+3$ 的定義域與值域

Ex2.1：試求對數函數 $y=\log x$ 的定義域與值域

例 2.2：判斷絕對值函數 $f(x)=y=|x-2|$的定義域，描繪其圖形並求其值域。

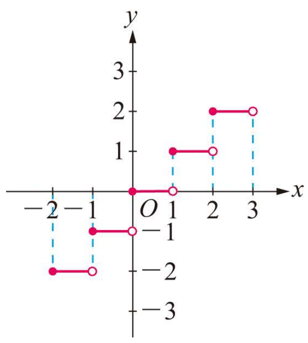


Ex2.2：判斷函數 $f(x)=y=\dfrac{|x|}{x}$，$x \neq 0$ 的定義域，描繪其圖形並求其值域。



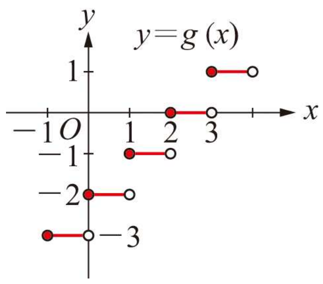
例 2.3：已知高斯函數 $f(x)=[\,x\,]$

(1)當$[\,x\,]=1$時，求 x 的範圍　(2)試求函數 $f(x)$的值域為何？　(3)繪出函數 $f(x)$的圖形



Ex2.3：給定函數 $g(x)=[\,x-2\,]$，則：

(1)當$[\,x-2\,]=0$時，求 x 的範圍　(2)繪出函數 $g(x)$的圖形



重點 3：奇函數與偶函數

緣由：描繪函數的圖形時，可借助函數的圖形求得值域。事實上，有些函數的圖形並不容易畫出(例如，高次多項式函數)，此時可以借助電腦來幫助我們畫出函數圖形。而有些函數具有對稱的性質，了解函數的對稱性也有助於分析較複雜的函數

設 A，B 是兩個非空集合，函數 $f：A\to B$

1.一對一函數：若 A 中的相異元素所對應的函數值都相異，稱 f 為一對一函數

2.奇函數：當函數 $f(x)$對所有 $x\in A$ 均滿足 $f(-x)=-f(x)$時，稱 $f(x)$為奇函數，其圖形對稱於原點

3.偶函數：當函數 $f(x)$對所有 $x\in A$ 均滿足 $f(-x)=f(x)$時，稱 $f(x)$為偶函數，其圖形對稱於 y 軸

例 3.1：已知函數 $f_1(x)=\sin x$，$f_2(x)=\cos x$，$f_3(x)=\tan x$，$f_4(x)=x^3+x$，$f_5(x)=2^x$，$f_6(x)=\log_2 x$，試回答下列各小題：

(1)哪些函數是一對一函數？　(2)哪些函數是奇函數？　(3)哪些函數是偶函數？

Ex3.1：已知函數 $f(x)=5x^4+3$，$g(x)=\sin x$，$h(x)=x^3+2$，選出所有正確的選項。

(1) $f(x)$為偶函數　(2) $f(x)$的圖形對稱於 y 軸　(3) $g(x)$的圖形對稱於原點

(4) $h(x)$為偶函數　(5) $h(x)$為奇函數

重點 4：函數的四則運算

定義：設集合 A 為函數 f 與 g 定義域的交集，對於 A 中的每一個數 x，定義兩函數的四則運算如下：

(1)加法運算：$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，定義域為 $f(x)$與 $g(x)$之定義域的共同範圍

(2)減法運算：$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$，定義域為 $f(x)$與 $g(x)$之定義域的共同範圍

(3)乘法運算：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，定義域為 $f(x)$與 $g(x)$之定義域的共同範圍

(4)除法運算：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，定義域為 $f(x)$與 $g(x)$之定義域的共同範圍，但 $g(x)\neq 0$

註：加、減、乘法的定義域為 f 與 g 定義域的交集；除法的定義域為 f 與 g 定義域的交集扣除 $g(x)=0$ 的部分

例 4.1：設函數 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$，$g(x)=\sqrt{x}$，試求下列各定義域。

(1)函數 $f(x)$與 $g(x)$的定義域　　(2)和函數$(f+g)(x)$與商函數$\dfrac{f}{g}(x)$的定義域

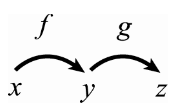
Ex4.1：設函數 $f(x)=\sqrt{2-x}$，$g(x)=\sqrt{3+x}$，試求下列各定義域。

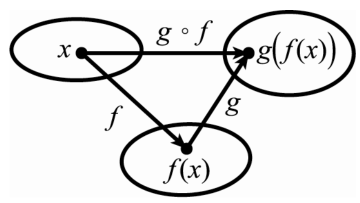
(1)函數 $f(x)$與 $g(x)$的定義域　　(2)和函數$(f+g)(x)$與商函數$\dfrac{f}{g}(x)$的定義域

重點 5：合成函數

1.函數的結合關係：

設 f 是 x 對應於 y 的函數，g 是 y 對應於 z 的函數，則 z 是 x 的函數，如右圖





⇒當 x 的值給定時，函數 f 將 x 對應於 y，接著函數 g 再將 y 對應於 z

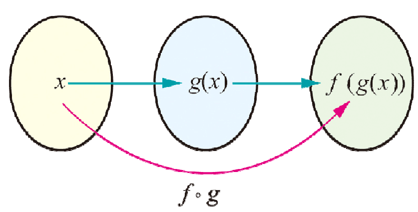
2.合成函數：給定函數 f 與 g，定義 f 與 g 的**合成函數** $g\circ f$ 為 $(g\circ f)(x)=\underbrace{g(\underbrace{f(x)}_{\text{先作}f})}_{\text{再作}g}$

註：$g\circ f$ 讀作 g circle f。$f\circ g$ 與 $g\circ f$ 不一定是同一函數

註：函數 f 與 g 的合成函數 $f\circ g$ 定義為$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

其定義域就是使 $g(x)$的值落在函數 f 的定義域中所有 x 所成的集合

$f\circ g：x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$，如右圖



3.圖解：對於 x，函數 f 將 x 對應於 $f(x)$，接著函數 g 再將 $f(x)$對應於 $g(f(x))$

將「x 對應於」這個新函數 $g(f(x))$稱為 f 與 g 的**合成函數**，以 $g\circ f$ 表示

註：$g\circ f$ 的定義域為：在 f 的定義域中，使得 $f(x)$的值落在 g 的定義域中之所有實數 x 所成的集合

設函數 $f：A\to B$ 與函數 $g：B\to C$，則 $g\circ f：A\to C$

例 5.1：設 $f(x)=x^2-2x-8$，$g(x)=\sqrt{x}$，則：

(1)求$(f\circ g)(x)$，並求合成函數 $f\circ g$ 的定義域

(2)求$(g\circ f)(x)$，並求合成函數 $g\circ f$ 的定義域

Ex5.1：設 $f(x)=x^3$，$g(x)=x-1$。試求下列各合成函數：

(1) $(f\circ g)(x)$　　(2) $(g\circ f)(x)$

重點 6：反函數

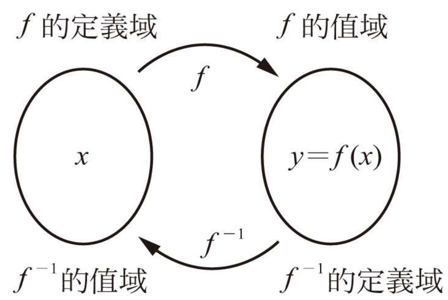
1.意義：設 A，B 為兩非空集合，若 $f：A\to B$，$g：B\to A$ 滿足

(1)對所有 $x\in B$，使得 $f(g(x))=x$

(2)對所有 $x\in A$，使得 $g(f(x))=x$

$\Rightarrow$意即若合成函數 $f(g(x))=g(f(x))$，則稱函數 $f(x)$與 $g(x)$互為反函數

函數 g 可表示成 f^{-1}(讀作 f *inverse*)。即 $f^{-1}(f(x))=x$，$f(f^{-1})=x$



2.性質：

(1)函數 f 的定義域是 f^{-1}的值域；函數 f 的值域是 f^{-1}的定義域，定義域與值域彼此互換

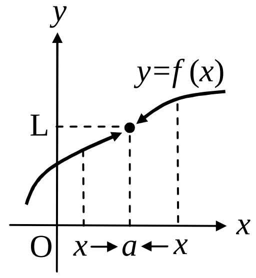
(2)互為反函數的兩個函數圖形，都會對稱於直線 $y=x$，

(3)互為反函數的圖形對稱是兩兩互為成對，因此互為反函數的兩個函數會互為唯一存在

例 6.1：求下列一對一函數的反函數，並寫出它的定義域：(1) $f_1(x)=2x+5$　　(2) $f_2(x)=3-\sqrt{x}$

Ex6.1：求下列一對一函數的反函數，並寫出它的定義域：(1) $f_1(x)=x-2$　　(2) $f_2(x)=\sqrt{x}+1$

重點 7：函數的極限



1.定義：當 x 趨近 a 時(從 a 的左、右兩邊趨近，且 $x\neq a$)，若對應的函數值 $f(x)$會趨近定值 L，如圖
則稱 $f(x)$在 $x=a$ 的極限為 L，記作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\text{L}$

註：x 趨近 a 表示 $x\neq a$，是使用**圖形法**解說極限

2.左極限與右極限表示法：

(1)符號 $x\to a^{+}$ 表 x 從右邊趨近 a，即 $x>a$ 且 $x\to a$

⇒當 x 從右邊趨近 a 時，若 $f(x)$ 趨近定值 L，則稱 L 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的**右極限**，記作 $\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=L$

(2)符號 $x\to a^{-}$ 表 x 從左邊趨近 a，即 $x<a$ 且 $x\to a$

⇒當 x 從左邊趨近 a 時，若 $f(x)$ 趨近定值 M，則稱 M 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的**左極限**，記作 $\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=M$

註：左極限與右極限是使用**數據法**解說極限

3.函數極限的求法：

(1)數據法：實際的計算出 x 從左、右兩邊趨近 a 時函數 $f(x)$的值

(2)圖形法：作函數 $f(x)$圖形，由圖形上點 x 從左、右兩邊趨近 a 時函數 $f(x)$的值

4.**函數極限的觀念**：當 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\text{L}$ 成立時，注意下列特性：

(1) $x\to a$ (x 趨近於 a)，指的是 x 從左、右兩邊**趨近** a，但**不等於** a

(2)函數 $f(x)$在 $x=a$ 處不一定有定義，即 $f(a)$可能存在或不存在

(3)即使函數值 $f(a)$存在，$\lim\limits_{x\to a}f(x)$也不一定等於 $f(a)$

◎**觀念** 當 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\text{L}$ 成立時，⇔右極限 $\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=$左極限 $\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=\text{L}$，不涉及 $f(a)$之值

即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\text{L}$ 的充要條件為 $\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=\text{L}$

註：$f(x)$在 $x=a$ 的極限取決於接近 a，但不等於 a 的那些 x 的函數值，不是在 $x=a$ 的函數值
即不管 a 有沒有在 $f(x)$的定義域中，都可討論 $f(x)$在 $x=a$ 的極限

註：羅必達法則(L'Hopital's Rule)

設函數 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$，當 $x=a$ 代入 $f(x)$，得 $\dfrac{0}{0}$ 、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 時，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p'(x)}{q'(x)}$

其中 $p'(x)$、$q'(x)$分別為 $p(x)$、$q(x)$對 x 的一次微分

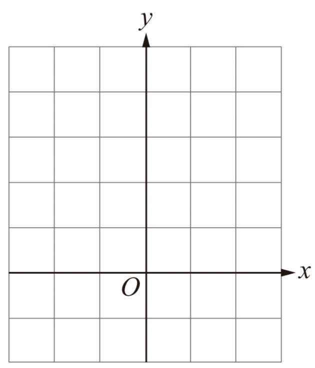
例 7.0：已知函數 $f(x)=\dfrac{2(x^{2}-1)}{x-1}$，則：

(1)請在右圖中畫出函數 f 的圖形

(2)請在表格空格中填入適當的值

x	0.9	0.99	0.999	⋯	1	⋯	1.001	1.01	1.1
$f(x)$				⋯	無定義	⋯			

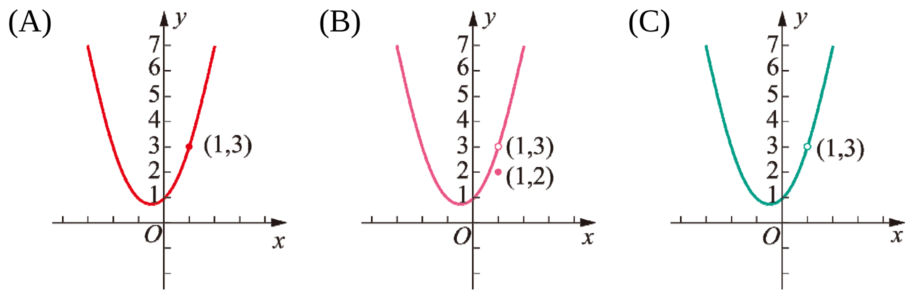
(3)觀察(1)的圖形與(2)的表格結果，
當 x 趨近於 1 時，$f(x)$的函數值會趨近哪一個數



例 7.1：設三個函數定義如下：

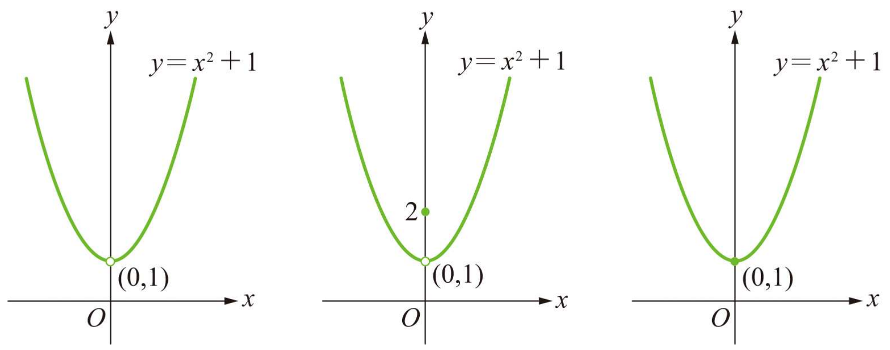
$f(x)=x^2+x+1$，$g(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$，$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$，則：

(1)下面有三個函數圖形，請與正確的函數配對：$f(x)$：________；$g(x)$：________；$h(x)$：________



(2)求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$_____， $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=$_____， $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=$_____

Ex7.1：下圖(a)到(c)依序為函數 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$的圖形。



(a) (b) (c)

(1)在圖(a)中，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$______

(2)在圖(b)中，求 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$，並問 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$是否成立？

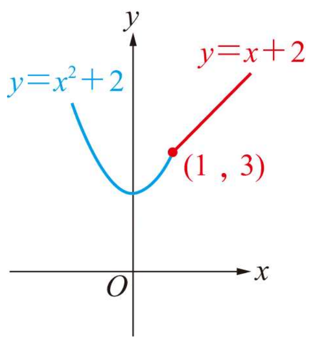
(3)在圖(c)中，求 $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$，並問 $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=h(0)$是否成立？

例 7.2：設 $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$，且 $x\neq 0$，試問當 x 趨近 0 時，$g(x)$是否會趨近於某一個定值

Ex7.2：試問 $\lim\limits_{x\to 0}[x]$是否存在？

例 7.3：設 $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x<1 \\ x+2, & x\geq 1 \end{cases}$，試回答下列各問題：

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$_____ (2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$_____ (3)判別 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$是否存在？若存在，求出其值



Ex7.3：設函數 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$，則：

(1)試求 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$_____ (2)試求 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$_____ (3)判別 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 是否存在? 若存在，求出其值

重點 8：極限的基本運算性質

1.意義：給定兩函數 $f(x)$ 與 $g(x)$，若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限都存在，則：

$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$c\cdot f(x)$ 與 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0)$ 在 $x=a$ 的極限也都是**存在**的

2.設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限分別為 L 與 M，即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$，$c$ 為一常數，則：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=L+M$　(2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=L-M$　(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot L$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=L\cdot M$　(5)若 $M\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$

3.**多項式函數**與**有理函數**的極限性質：

設 a 為實數，$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 與 $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ 為兩實係數多項式函數，則：

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$　(2)若 $g(a)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$

註：多項式函數在 $x=a$ 的極限，就是在 $x=a$ 的函數值

(3)若 $g(a)=0$ 且 $f(a)\neq 0$，則此極限不存在

(4)若 $g(a)=0$ 且 $f(a)=0$，則將分子與分母的共同因式 $x-a$ 約去後，再依照以上的原則繼續處理

例 8.1：已知 $\lim\limits_{x\to a} k=k$，$\lim\limits_{x\to a} x=a$，其中 a，k 均為常數，試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to a} kx=$_____　(2) $\lim\limits_{x\to a} x^2=$_____　(3) $\lim\limits_{x\to a} x^n=$_____ ($n$ 為自然數)　(4) $\lim\limits_{x\to a}(2x^5-5x+3)=$_____

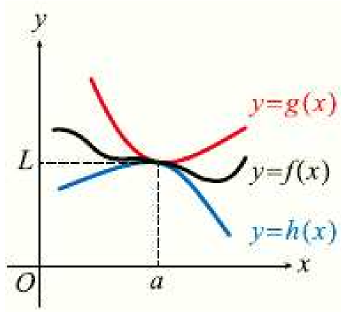
Ex8.1：試求下列各極限：(1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+x-2)=$_____　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)(x^2+x+1)=$_____

例 8.2：試求下列各函數的極限：(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=$_____　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=$_____

Ex8.2：下列各函數極限是否存在? 如果存在，求其極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+1}{x+1}=$_____　(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}=$____　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}=$____

重點 9：函數的夾擠定理

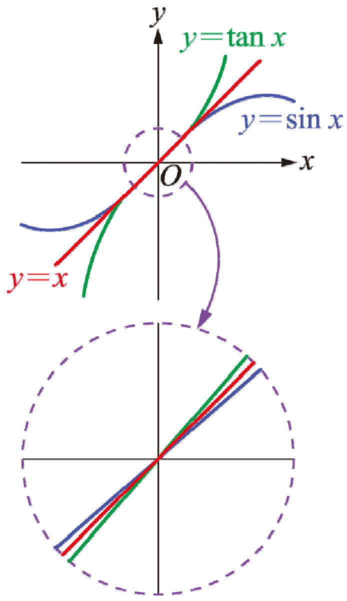


定義：設函數 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$在某個包含 a 的開區間(可能不包括 a)有定義，且滿足：

(1)對於 $x=a$ 附近且 $x\neq a$ 的 x 值，使得 $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$

(2)若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

例 9.1：右圖為函數 $y=\tan x$，$y=x$，$y=\sin x$ 在 $x=0$ 附近的部分圖形。試回答下列問題：



(1)觀察圖形，對於這三個函數在 $x=0$ 附近($x\neq 0$)的大小關係，下列選項哪些正確？

(A) $\sin x\leq x\leq \tan x$　　(B) $\tan x\leq x\leq \sin x$　　(C) $x\leq \sin x\leq \tan x$

(D)當 x 在 0 的右側時，$\sin x\leq x\leq \tan x$

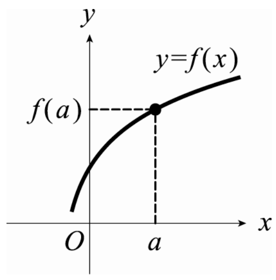
(E)當 x 在 0 的左側時，$\tan x\leq x\leq \sin x$

(2)承(1)試證：對任意實數 x 在 $x=0$ 附近($x\neq 0$)，滿足 $\cos x\leq \dfrac{\sin x}{x}\leq 1$

(3)由(2)的結果，試利用夾擠定理，證明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

EX9.1：已知 $x\neq 0$，不等式 $-1\leq \cos\dfrac{1}{x^2}\leq 1$ 恆成立，求 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{1}{x^2}$

重點 10：連續函數



1.意義：若函數 $f(x)$ 的圖形在定義域內的一點 a 接連不斷，如右圖

則當 x 趨近 a 時， $f(x)$ 就必須趨近於其函數值 $f(a)$

2.定義：

設 a 為函數 $f(x)$ 定義域的一點，當滿足下列兩個條件時，稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處**連續**

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在　　(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

◎依照上述定義，只要是下面兩種情形之一，都表示 $f(x)$ 在 $x=a$ 不連續：(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在　(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$

註：(1)直觀上，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續的意義就是函數 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=a$ 處沒有斷裂

註：任一多項式函數都是連續函數，而且其圖形都是連續不斷的

(2)當函數 $f(x)$ 在定義域中的每一點都連續時，稱 $f(x)$ 為**連續函數**

3.函數在區間的連續性定義：

(1)若函數 $f(x)$ 在開區間 $(a，b)$ 內每一點都連續，則稱函數 $f(x)$ 在區間 $(a，b)$ 上連續

(2)當函數 $f(x)$ 在區間 $[a，b]$ 上連續時，指的是 $f(x)$ 除了在區間 $(a，b)$ 上的每一點都連續外，也要滿足：

有左端點 a 時，則 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$；有右端點 b 時，則 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

(3)若函數 $f(x)$ 在其定義域中的每一點都連續，則稱函數 $f(x)$ 為連續函數

(4)若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為連續函數，則四則運算 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的結果，亦為連續函數

例 10.1：設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|^3+2x^3}{x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$，則：

(1)試判斷 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在？若存在，求出極限

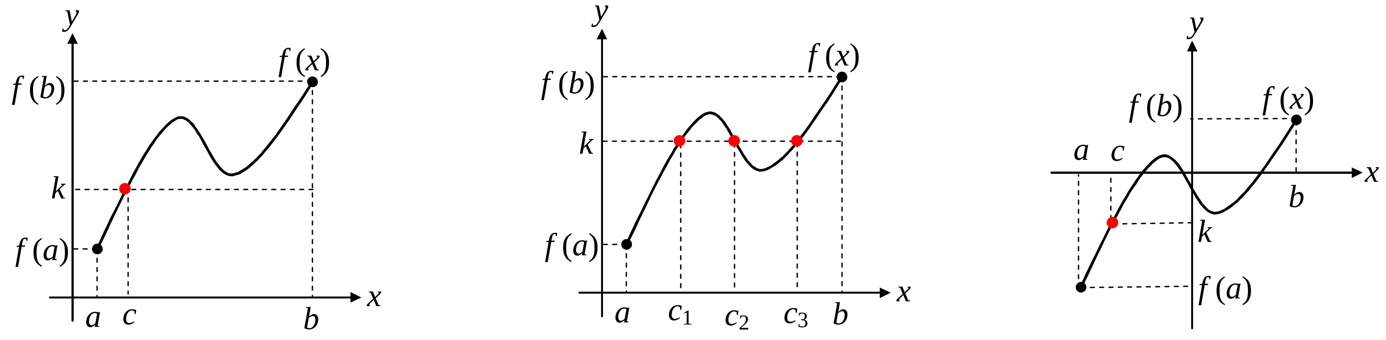
(2)試問 k 的值應等於多少，才會使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 連續

Ex10.1：設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3}, & x\neq -3\\ k, & x=-3\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=-3$ 連續，試求 k 的值

重點 11：中間值定理(又稱介值定理)(重點在**值**)

定理：設 $f(x)$在區間$[a，b]$上是**連續函數**，且 $f(a)\neq f(b)$，若 k 是介於 $f(a)$與 $f(b)$之間的實數，即 $f(a)<k<f(b)$，或 $f(b)<k<f(a)$，則至少存在有一實數 c 介於 a、b 之間，使得 $f(c)=k$

註：當 $k=0$ 時，中間值定理即為**勘根定理**



(存在 1 個 c 值)　(存在 3 個 c 值)　(存在 1 個 c 值)

例 11.1：設 $f(x)=x^5+2x^3-x+2$，試證明：存在一個實數 c 在區間(1，2)內，使得 $f(c)=20$

Ex11.1：設 $f(x)=x^4-4x^3-x+2$，試證明：存在一個實數 c 在區間(1，2)內，使得 $f(c)=5$

例 11.2：設 $f(x)=[\,x\,]$，因為 $f(1)=[\,1\,]=1$，$f(3)=[\,3\,]=3$，試問在區間(1，3)內是否存在一個 c，使得 $f(c)=1.5$

重點 12：勘根定理

定理：若 $f(x)$是區間$[a，b]$上的連續函數，當 $f(a)$，$f(b)$異號時 (即 $f(a)f(b)<0$)，此時 0 會介於 $f(a)$與 $f(b)$之間。由介值定理可知，在區間$(a，b)$內至少有一點 c，使得 $f(c)=0$

註：勘根定理用來找方程式 $f(x)=0$ 實根的位置

註：勘根定理要求函數 $f(x)$是連續函數即可，不一定是多項式函數

◎勘定方程式實根的位置

例 12.1：已知函數 $f(x)=x\cdot 3^x-50$ 為連續函數，求證：方程式 $x\cdot 3^x-50=0$ 在 2 與 3 之間至少有一實根

Ex12.1：已知方程式 $x\cdot 3^x=3^5$ 只有一個實根，則此實根在哪兩個正整數之間？(單選)

(1) 1 與 2 之間 (2) 2 與 3 之間 (3) 3 與 4 之間 (D) 4 與 5 之間 (5) 5 與 6 之間