

**重點 1：一元一次不等式**

1. 意義：設  $f(x)$  為多項式，則  $f(x) > 0$ ， $f(x) \geq 0$ ， $f(x) < 0$ ， $f(x) \leq 0$  等統稱為多項式不等式

2. 解多項式不等式：求出使得不等式成立的所有  $x$  值

3. 一次不等式：

(1) 設  $a \neq 0$ ，形如  $ax + b > 0$ ， $ax + b \geq 0$ ， $ax + b < 0$ ， $ax + b \leq 0$  稱為一次不等式

(2) 解一次不等式只要移項即可，當同乘或同除一個負數時，不等號要變方向

4. 不等式的運算法則：設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數

(1) 若  $a > b$ ，則  $a + c > b + c$

(2) 若  $a > b$ ，且  $\begin{cases} \text{當 } c > 0, \text{ 則 } ac > bc \\ \text{當 } c < 0, \text{ 則 } ac < bc \end{cases}$

例 1.1：試解一元一次不等式  $3x - 5 > x - 1$ ，並在數線上標示其範圍

Ex1.1：試解一元一次不等式  $2x + 3 \leq 5x + 9$ ，並在數線上標示其範圍

例 1.2：為響應環保政策，甜蜜飲品店推出環保優惠折價活動：「凡自備容器可享每杯現折 5 元或總價打九折」二擇一，小孟今自備容器，試問他買飲料的單價超過多少時，選九折較划算？

Ex1.2：小丸子想買一款價格兩萬元的手機，已知她現有存款 5000 元且計劃每個月都存 1200 元，試問最少還要幾個月才能買到新手機？

**重點 2：一元二次(多項式)不等式**

## 1. 二次不等式：

設  $a \neq 0$ ，則  $f(x) = ax^2 + bx + c \neq 0$ ，包含  $f(x) > 0$ 、 $f(x) \geq 0$ 、 $f(x) < 0$ 、 $f(x) \leq 0$  四種型式，稱為二次不等式

2. 解多項式二次不等式：意即求出「使不等式成立的所有實數  $x$  值」，一般其解為一個範圍(或區間)，步驟如下：

步驟 1：調整使得  $x^2$  項次方的係數(領導係數)為正

步驟 2：因式分解完畢，求出其關鍵點(正負變化的點)

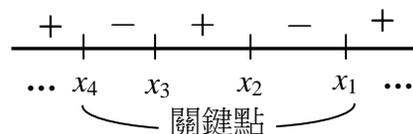
註：對  $y = ax^2 + bx + c$  作因式分解時，設判別式  $D = b^2 - 4ac$ ，則：

(1)  $D > 0$  但不是完全平方數時，利用公式法  $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$  分解

(2)  $D = 0$  或  $D$  為完全平方數時，利用十字交乘法分解

(3)  $D < 0$  時，直接判定為「恆正」

步驟 3：將關鍵點標示在數線上，由右至左依序為 +、-、+、-、...，如圖



步驟 4：根據不等式之型式，求出其解

註：依判別式  $D = b^2 - 4ac$  的正負，可得圖形及相應的函數值正負號，如下表所示：

	$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = b^2 - 4ac = 0$	$D = b^2 - 4ac < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

3. 設  $a \neq 0$ ，則二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  恆正與恆負的條件

(1) 若二次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  恆成立 (恆正)，則  $a > 0$  且  $D = b^2 - 4ac < 0$

(2) 若二次不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  恆成立 (恆負)，則  $a < 0$  且  $D = b^2 - 4ac < 0$

◎判別式  $D > 0$ 

例 2.1：試解下列一元二次不等式：(1)  $x^2 - 5x + 6 > 0$

(2)  $x^2 - 5x + 6 < 0$

Ex2.1：試解下列一元二次不等式：(1)  $2x^2 + 7x + 3 \geq 0$

(2)  $2x^2 - x - 3 < 0$

例 2.2：設  $a$ 、 $b$  為實數，若一元二次不等式  $x^2 + ax + b < 0$  之解為  $-2 < x < 5$ ，試求  $a$ 、 $b$  之值

Ex2.2：設  $a$ 、 $b$  為實數，若一元二次不等式  $2x^2 + ax + b < 0$  之解為  $-\frac{1}{2} < x < 3$ ，試求  $a$ 、 $b$  之值

◎判別式  $D=0$

例 2.3：試解下列一元二次不等式：(1)  $x^2 - 4x + 4 > 0$

(2)  $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

Ex2.3：試解下列一元二次不等式：(1)  $2x^2 + 4x + 2 \geq 0$

(2)  $-x^2 + x - \frac{1}{4} > 0$

◎判別式  $D < 0$ 例 2.4：試解下列一元二次不等式：(1)  $x^2 - 2x + 3 > 0$ 

(2)  $x^2 - 2x + 3 \leq 0$

Ex2.4：試解下列一元二次不等式：(1)  $-x^2 + x - 1 < 0$ 

(2)  $x^2 + 5x + 7 < 0$

例 2.5：行駛中的汽車由於慣性作用，在剎車時總會繼續行駛一段距離後才會完全停止，這段所需的距離稱為剎車距離。

假設某廠牌的新款汽車經過實驗測量發現，它的剎車距離  $y$  (公尺)與車速  $x$  (公尺/秒)滿足下列函數關係式：
$$y = \frac{x^2}{100} + \frac{3x}{10}, \quad x \geq 0$$
，由此關係式，試求若要剎車距離不超過 10 公尺，則此款汽車的時速不得超過多少公里/時？

Ex2.5：小禹在編寫一個電腦螢幕保護程式時，需要輸入調節變數來控制螢幕上一顆閃光彩球的路徑軌跡。

已知彩球的軌跡是  $f(x) = x^2 - 4x + 4$ ，為了確保彩球能在工作視窗內移動，必須滿足  $f(x) \leq 100$ ，試求他輸入數值  $x$  的範圍

例 2.6：對任意實數  $x$ ，二次函數  $x^2 - 4x + 2k$  之值恆為正數，試求  $k$  的範圍

Ex2.6：對任意實數  $x$ ，二次函數  $3x^2 - kx + 3$  之值恆為正數，試求  $k$  的範圍

### 重點 3：分式不等式

1. 意義：設  $f(x)$ 、 $g(x)$  皆為多項式且  $g(x)$  不為零多項式，則形如  $\frac{f(x)}{g(x)}$  的式子稱為分式。 $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$  稱為分式不等式

包含  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ， $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ ， $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ， $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$  等四種形式

2. 分式不等式的解：

(1)  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  與  $f(x)g(x) > 0$  有相同解

(2)  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$  與  $f(x)g(x) \geq 0$ ， $g(x) \neq 0$  有相同解

(3)  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  與  $f(x)g(x) < 0$  有相同解

(4)  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$  與  $f(x)g(x) \leq 0$ ， $g(x) \neq 0$  有相同解

例 3.1：試解分式不等式  $\frac{2x+1}{x-1} \geq 0$

Ex3.1：試解分式不等式  $\frac{3x-1}{x+2} < 0$