

重點 1：直角坐標系

1.意義：在平面上取兩條互相垂直的數線，且使此兩條數線的原點重合，此交點 O 稱為原點；水平數線稱為 x 軸，在原點右方為正，左方為負；鉛直數線稱為 y 軸，在上方為正，下方為負，建構了直角坐標系的框架，而直角坐標系所處的平面稱為「坐標平面」

2.坐標：設 P 為平面上任一點，從 P 點向 x 軸、 y 軸分別作垂線，交 x 軸、 y 軸於 A 、 B 兩點，若 A 、 B 兩點在 x 軸、 y 軸上所對應的數分別為 a 與 b ，則 P 點坐標以 (a, b) 表之，記為 $P(a, b)$ ，這種形式我們稱為「數對」

3.象限：直角坐標系中， x 軸與 y 軸將平面劃分成四部分，每一部分稱為象限，象限的名稱及坐標之正負關係如圖

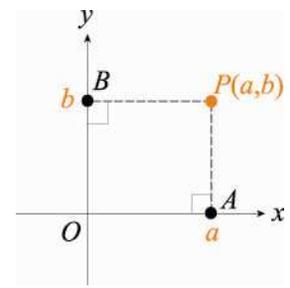
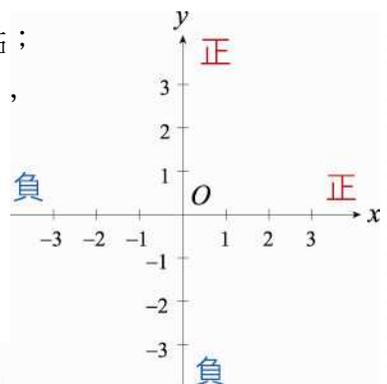
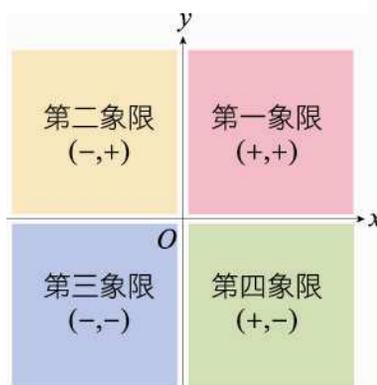
註：第一象限 $(+, +)$

第二象限 $(-, +)$

第三象限 $(-, -)$

第四象限 $(+, -)$

註： x 軸上的點為 $(x, 0)$ ， y 軸上的點為 $(0, y)$



例 1.1：試問下列各點分別在哪一象限內或在哪一坐標軸上？

- $A(2, 1)$, $B(3, -8)$, $C(-7, -3)$, $D(5, 0)$, $E(0, 6)$, $F(-4, \frac{2}{3})$

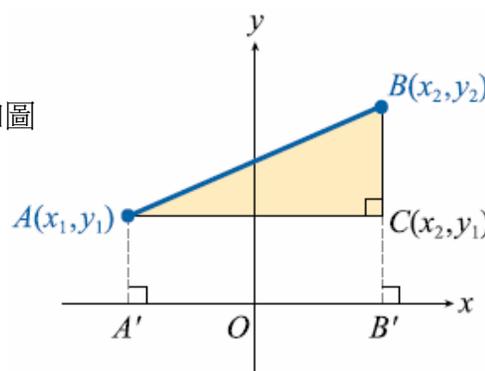
例 1.2：已知點 $A(a-b, ab)$ 在第三象限，試問點 $B(\frac{b}{a}, -b)$ 在第幾象限？

重點 2：平面上的兩點間距離公式

意義：在坐標平面上取兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，過 A 、 B 分別作垂線交 x 軸於 A' 、 B' 兩點，另過 A 作水平線交 BB' 於 C ，則點 C 坐標為 (x_2, y_1) ，如圖因為 $\triangle ABC$ 是直角三角形，利用畢氏定理得知

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\text{所以 } \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



例 2.1：坐標平面上兩點 $A(-3, -7)$ 、 $B(9, -2)$ ，試求 A 、 B 之間的距離

重點 3：平面上的分點坐標

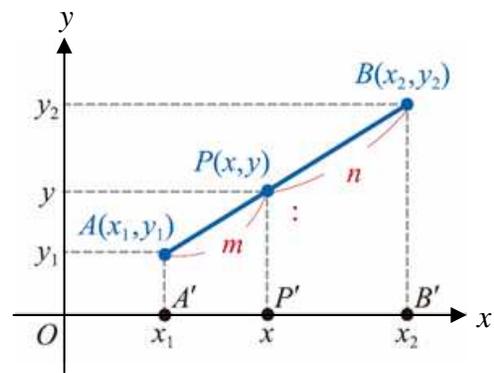
意義：在坐標平面上相異兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，若點 P 在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，

$$\text{則 } P \text{ 點坐標為 } \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$$

說明：設 P 點坐標為 (x, y) ，並自 A 、 B 、 P 三點分別向 x 軸、 y 軸作垂線，如圖觀察投影在 x 軸上的分點坐標

$$\text{因為 } \overline{PA} : \overline{PB} = \overline{P'A'} : \overline{P'B'} = m : n, \text{ 即 } (x - x_1) : (x_2 - x) = m : n$$

$$\text{代入分點坐標公式得 } x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$



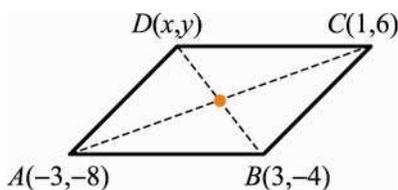
註：當 $m=n$ 時， $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 1$ ，此時 P 點坐標即為中點坐標 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

例 3.1：坐標平面上兩點 $A(1, -12)$ 、 $B(-7, 4)$ ，試求：

- (1) 若 P 在 \overline{AB} 上且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ ，則 P 點坐標為何？
- (2) 若 M 為 \overline{AB} 中點，則 M 點坐標為何？

例 3.2：設 $A(1, -2)$ 、 $B(-3, 4)$ ，若點 P 在 \overline{AB} 之延長線上且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ ，試求 P 點坐標

例 3.3：已知平行四邊形 $ABCD$ 的三頂點坐標 $A(-3, -8)$ 、 $B(3, -4)$ 、 $C(1, 6)$ ，試求第四個頂點 D 點的坐標



重點 4：三角形的重心坐標

意義：在坐標平面上相異三點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，且 G 為 $\triangle ABC$ 之重心，

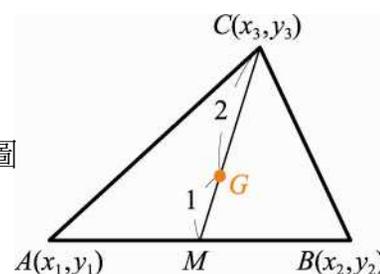
則重心 G 點坐標為 $(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$

說明：設 G 點坐標為 (x, y) ， M 為 \overline{AB} 的中點，所以 M 點坐標為 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ ，如圖

依據三角形重心性質得知 $\overline{CG} : \overline{GM} = 2 : 1$

代入分點坐標公式得， $x = \frac{1 \times x_3 + 2 \times \frac{x_1 + x_2}{2}}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ ， $y = \frac{1 \times y_3 + 2 \times \frac{y_1 + y_2}{2}}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

故重心 G 點坐標為 $(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$



例 4.1：已知 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(8, -6)$ 、 $B(5, 8)$ 、 $C(-7, 10)$ ，試求 $\triangle ABC$ 的重心坐標