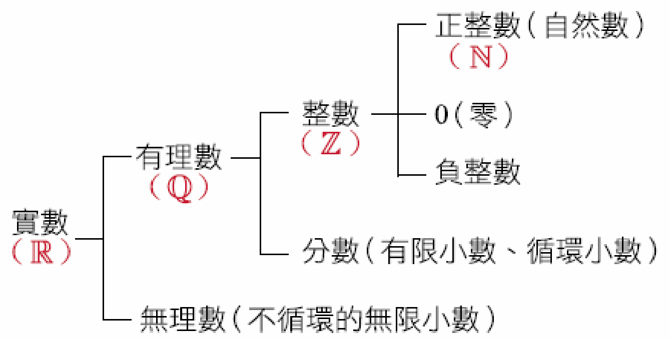
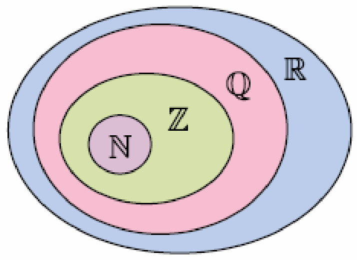
Ch 1-1 實數與絕對值　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 0：數系

1.數系：





註 1：自然數(N)又稱為正整數

註 2：用符號 ℕ、ℤ、ℚ、ℝ 分別代表全體的正整數、整數、有理數、實數

2.有理數與無理數是兩個定義不同的族群，將這兩大族群整合後的數系叫實數，亦即實數包含了有理數與無理數

重點 1：認識有理數

1.有理數：凡是可以表示成分數 $\dfrac{n}{m}$ 形式的數(m，n 為整數，且分母 $m\neq 0$)，稱為**有理數**(或分數)，否則稱為無理數

有理數包含：$\begin{cases}\text{整數(正整數、零、負整數)}\\ \text{分數(真分數、假分數、帶分數)}\\ \text{小數(純小數、混小數)}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\text{整數(正整數、零、負整數)}\\ \text{有限小數}\\ \text{循環小數}\end{cases}$

2.有理數性質：

(1)有理數都可以化成有限小數或無限小數(包含循環小數等)

(2)有理數的表示法**不唯一**，如 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{10}{15}=\dfrac{-12}{-18}=\cdots$ 等。常化簡為**最簡分數**(分子，分母為整數且互質)

(3)具封閉性：任意兩個有理數作加、減、乘、除(除數不可以為 0)的運算後，仍然為有理數

註：兩個整數相加、相減、相乘，得到的結果還是整數，但兩個整數相除不一定是整數

即整數對加、減、乘法具有**封閉性**，對除法不具有封閉性

但正整數對加、乘法具有**封閉性**，對減、除法不具有封閉性

(4)當兩有理數 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 時，$bd\neq 0$，必有 $ad=bc$

◎有限小數

例 1.1：試將下列分數化成小數：(1) $\dfrac{17}{20}=$______　　(2) $\dfrac{9}{8}=$______

Ex1.1：試將下列分數化成小數：(1) $\dfrac{19}{40}=$______　　(2) $\dfrac{9}{16}=$______

◎循環小數

例 1.2：試將下列分數化成小數：(1) $\frac{13}{3}=$______　　(2) $\frac{4}{11}=$______

Ex1.2：試將下列分數化成小數：(1) $\frac{10}{15}=$______　　(2) $\frac{3}{7}=$______

◎循環小數化分數

例 1.3：試將下列循環小數化成最簡分數：(1) $0.\overline{27}=$______　　(2) $0.2\overline{7}=$______

Ex1.3：試將下列循環小數化成最簡分數：

(1) $0.\overline{45}=$______　　(2) $0.4\overline{5}=$______

重點 2：無理數

1.意義：凡是**無法**表示成分數$\dfrac{n}{m}$形式的數(m，n 為整數，且 $m\neq 0$)，或「不是有理數的數」，稱為**無理數**。

一般以 Q′表示無理數。無理數化為小數後為**不循環的無限小數**

註：無理數代表數有：圓周率$\pi\approx 3.1415926\cdots$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，⋯，自然對數 e≈2.71828，⋯

2.性質：

(1)數線上不是有理數之點，稱為「無理數」，故數線上的數是由有理數、無理數所組成

(2)設 a，b 為有理數，若 $a+b\sqrt{2}=0$，則 $a=b=0$

(3)任意兩個有理數作加、減、乘、除(除數不可以為 0)的運算後，仍然為有理數

任意兩個無理數作加、減、乘、除(除數不可以為 0)的運算後，不一定為無理數

例 2.1：已知 a、b 為有理數，若$(1+\sqrt{2})a+(1-\sqrt{2})b=3+5\sqrt{2}$，試求數對$(a，b)=$______

Ex2.1：已知 a、b 為有理數，若$(3+4\sqrt{2})a+(1+2\sqrt{2})b=7+10\sqrt{2}$，試求數對$(a，b)=$______

重點 3：根式的運算

1.意義：一般稱含有「根號」的式子稱為**根式**

2.平方根：若實數 x 滿足 $x^2=a\geq 0$，稱 x 是 a 的平方根，記為 $x=\sqrt{a}$(正平方根) 或$-\sqrt{a}$(負平方根)，

其中$\sqrt{a}$讀作(二次)根號 a，一個正數的平方根有 2 個，且互為相反數

註：在實數運算中，非負實數才可以開平方，即$\sqrt{a}$表示 $a\geq 0$

3.實數根式運算性質：

(1)當 a，$b\geq 0$ 時，則$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ ； $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，$b\neq 0$

(2)對任意實數 x，則$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}當 x\geq 0 時，則|x|=x\\ 當 x<0 時，則|x|=-x\end{cases}$

4.根式的有理化：

意義：將分母化為沒有根號的過程稱為**有理化分母**，即分子、分母同時乘上分母之**有理化因子**

例 3.1：試化簡下列各根式：

(1) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}=$_____　(2) $\sqrt{6}\times\sqrt{8}=$_____　(3) $(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=$_____

Ex3.1：試化簡下列各根式：

(1) $\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}=$_____　(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{10}\times\sqrt{15}=$_____　(3) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=$_____

◎分母有理化

例 3.2：試化簡下列根式：(1) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}=$_____　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$______　(3) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=$______

Ex3.2：試化簡下列根式：(1) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}=$_____　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=$______　(3) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=$______

重點 4：實數的運算性質

1.運算性質：設 a，b，c 是任意實數，則：

(1)交換律：加法：$a+b=b+a$　乘法：$a\times b=b\times a$

(2)結合律：加法：$a+(b+c)=(a+b)+c$　乘法：$a\times(b\times c)=a\times b)\times c$

(3)乘法對加法的分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

(4)消去律：加法(移項)：若 $a+c=b+c$，則 $a=b$　乘法(約分)：若 $c\neq 0$，$a\times c=b\times c$，則 $a=b$

(5)單位元素：加法：$a+0=0+a=a$　乘法：$a\times 1=1\times a=a$

2.實數的大小(次序)關係：

A 任意兩實數可以比較大小，即在數線愈右邊的點，所對應的實數愈大

B 實數大小關係的性質：設 a，b，c 是任意實數，則：

(1)三一律：對於任何兩個實數 a，b，有 $a<b$，$a=b$，$a>b$ 三種大小關係，而恰只有一個成立

(2)遞移律：

(i)若 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$　(ii)若 $a=b$ 且 $b=c$，則 $a=c$　(iii)若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$

(3)不等式的加法性質：若 $a>b$，則 $a+c>b+c$

(4)不等式的乘法性質：(i)若 $a>b$ 且 $c>0$，則 $ac>bc$　(ii)若 $a>b$ 且 $c<0$，則 $ac<bc$

(5)對於任何一個實數 a，則 $a^2\geq 0$ 恆成立

若 $a^2>b^2$ 且 a，b 皆為正實數，則 $a>b$

例 4.1：試利用實數的次序關係，比較下列實數的大小：$a=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$b=\sqrt{3}+\sqrt{5}$

Ex4.1：設 $a=1+\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}+\sqrt{5}$，試比較其大小關係

重點 5：算幾不等式

定義：設兩正實數 $a\geq 0$，$b\geq 0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ，且當 $a=b$ 時，等號才成立，稱為**算幾不等式**

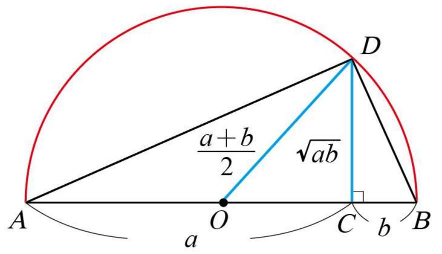
其中 $\dfrac{a+b}{2}$ 為 a，b 兩數的**算術平均數**(等差中項)，$\sqrt{ab}$ 為 a，b 兩數的**幾何平均數**(等比中項)

即**算幾不等式**就是**算術平均數 ≥ 幾何平均數**

說明 1：$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$

(1)當 $a=b$ 時，$\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}=0$，即 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

(2)當 $a\neq b$ 時，$\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}>0$，即 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$



說明 2：右圖中 $\overline{CD}=\sqrt{ab}$ ，半徑 $\overline{OD}=\dfrac{a+b}{2}$ ，即 $\overline{OD}\geq\overline{CD}$ ，所以 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

當 $a=b$ 時，$\overline{OD}$ 與 $\overline{CD}$ 重合，此時 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

例 5.1：已知 a、b 是正數，若 $a+b=8$，試求 ab 的最大值，並求此時 a 與 b 之值

Ex5.1：已知 x、y 是正數且 $3x+y=12$，試求 xy 的最大值，並求此時 x 與 y 之值

例 5.2：設 x、y、z 皆為正實數，且 $xy+yz+zx=27$，則 xyz 之最大值為何？

(A)$12\sqrt[3]{2}$　(B)18　(C)27　(D)$27\sqrt[3]{2}$

Ex5.2：已知 x、y、z 均為正實數。若 x、y、z 滿足 $2x + 3y + z = 12$，則下列何者為真？

(A) xyz 的最大值為 12 (B) x^2y^3z 的最大值為 32 (C) xyz^2 的最大值為 48 (D) xy^2z 的最大值為 18

例 5.3：若 x 為實數，則 $x^2-2+\dfrac{9}{x^2+2}$ 的最小值為何？(A) 2 (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) $\dfrac{13}{2}$ (D) 6

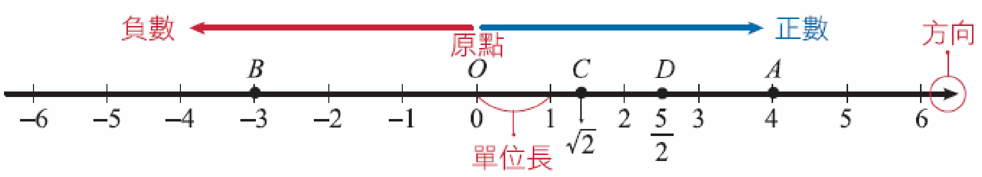
Ex5.3：設 $x>0$，$y>0$，$x+y=6$，則 xy^2 之最大值為何？ (A) 16 (B) 18 (C) 25 (D) 32

例 5.4：面積為 25 的所有矩形中，哪一種矩形的周長最短？試求出最短周長

Ex5.4：試比較所有對角線長度為 10 的矩形中，何者面積最大？試求最大面積

重點 6：認識數線

1.意義：取一條水平直線，制定一個基準點當原點，並規範原點右方為正向，左方為負向，以適當長度為單位長，就建構出了數線，如下圖



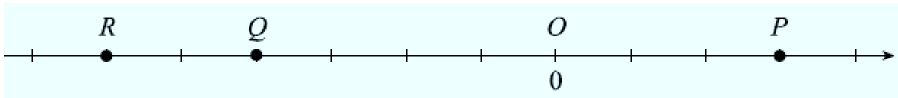
2.表示法：數線上 O 是原點，以 O(0)表示，而 A、B、C、D 四點坐標分別為 4，－3，$\sqrt{2}$ 及 $\frac{5}{2}$，記做 A(4)，B(－3)，C($\sqrt{2}$)及 D($\frac{5}{2}$)表示，如此可以在數線上找出與每個實數相應的點坐標

3.距離：測量 A 點到 B 點的距離為 $\overline{AB}$ ＝4－(－3)＝7

例 6.1：設下圖中的數線每一格代表一個單位長：

(1)試寫出 P，Q，R 三點坐標

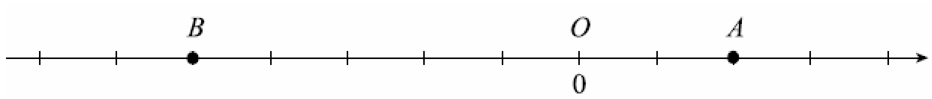
(2)求 $\overline{PQ}$ 及 $\overline{QR}$



Ex6.1：設圖中的數線每一格代表一個單位長：

(1)試寫出 A，B 兩點坐標

(2)求 $\overline{AB}$



重點 7：數線上的分點坐標公式

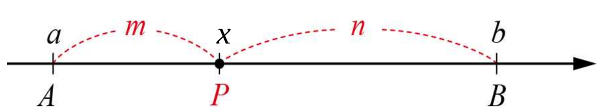
1.坐標：數線上每一點 P 對應到一個實數 x，稱為這個點的坐標，以 $P(x)$表示

2.**距離**公式：設兩點 A 與 B 的坐標分別為 a 與 b，即 $A(a)$，$B(b)$，則 $\overline{AB}=|a-b|$ 就是 A 與 B 兩點的距離

3.**內分點**公式：

設數線上兩點 $A(a)$，$B(b)$，且 $a<b$，點 $P(x)$介於 A，B 兩點之間(稱為內分點)，且 $\overline{AP}$ ：$\overline{BP}$ ＝m：n，如下圖

則 P 點的坐標為 $x=\dfrac{na+mb}{m+n}$



說明：設點的坐標為 x，則 $\overline{AP}$ ＝$x-a$，$\overline{BP}$ ＝$b-x$

$\Rightarrow \dfrac{x-a}{b-x}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{m}{n}$，得到 $(m+n)x=na+mb$，$x=\dfrac{na+mb}{m+n}$，即 $P(\dfrac{na+mb}{m+n})$

註：若 m：n＝1：1，則點 P 是 $\overline{AB}$ 的中點，得到 $\overline{AB}$ 的中點坐標公式為 $\dfrac{a+b}{2}$，即 P($\dfrac{a+b}{2}$)

例 7.1：數線上兩點 A(11)、B(－5)，若 P 點位於 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}$ ＝3：1，試求：

(1)P 點坐標為______　　(2) $\overline{AB}$ 的中點坐標為_____

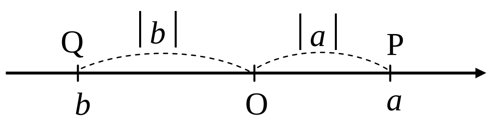
Ex7.1：(1)數線上兩點 A(9)、B(－12)，若 P 點位於 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}$ ＝1：2，試求 P 點坐標為______

(2)已知數線上 A、B 兩點坐標分別為－2 及 x，若 $\overline{AB}$ 之中點坐標為 5，試求 x 值為_____

重點 8：實數的絕對值、含絕對值的一次方程式與不等式

1.絕對值的定義：在數線上，實數點 a 與原點 O 之距離，記作 $|a|$，讀作 a 的絕對值(或絕對值 a)

對實數 a，則 $|a| = \begin{cases} 當\ a \geq 0\ ,則 |a| = a \\ 當\ a < 0\ ,則 |a| = -a \end{cases}$



註：$|a|$表示數線上點 P(a)與原點的距離

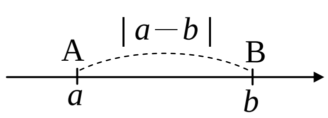
$|a-b|$就是數線上 P(a)與 Q(b)兩點的距離，即$|a-b| = \begin{cases} a-b, & 當\ a \geq b \\ b-a, & 當\ a < b \end{cases}$

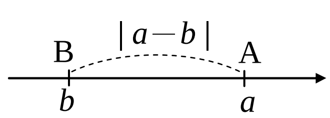
2.設數線上兩點 A 與 B 的坐標分別為 a 與 b (以符號 A(a)，B(b)表示)，

則 A，B 兩點的距離定義為$|a-b| = |b-a|$，以 $\overline{AB}$ 表示，如下圖

註：(1)若 $a \geq b$，則 $\overline{AB} = |a-b| = a-b$

(2)若 $a < b$，則 $\overline{AB} = |a-b| = b-a$



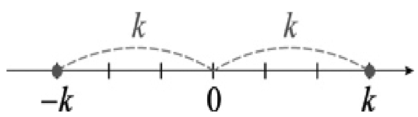


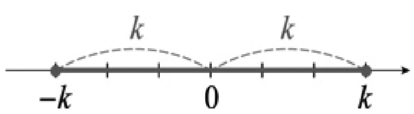
3.一次方程式：含有未知數 x 的等式，稱為方程式；「**解方程式**」就是要求出滿足方程式之未知數 x 的值

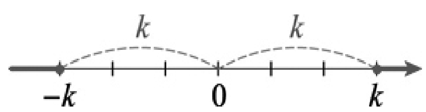
一次不等式：有不等號(≠)的式子，稱為不等式；「**解不等式**」就是要求出滿足不等式之所有未知數的值(範圍)

4.一次方程式與不等式的解：設 k 是正實數

(1)若 $|x| = k$，則 $x = k$ 或 $x = -k$　　(2)若 $|x| \leq k$，則 $-k \leq x \leq k$　　(3)若 $|x| \geq k$，則 $x \geq k$ 或 $x \leq -k$







例 8.1：試解絕對值方程式$|x-2|=5$，並在數線上標示其解

Ex8.1：試解下列絕對值方程式：(1) $|2x-1|=1$　(2) $|3x+1|=4$

例 8.2：試解下列絕對值不等式，並在數線上標示其解：(1) $|x-1|\le 1$　(2) $|x+5|>2$

Ex8.2：試解下列絕對值不等式，並在數線上標示其解：(1) $|x+3|<7$　(2) $\left|x-\frac{2}{3}\right|\ge\frac{1}{3}$