Ch 4.2 矩陣的運算　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：矩陣(matrix)的定義

1.定義：設 m，n 為正整數，形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，稱為有 m 列(橫排) n 行(直排)的矩陣，簡稱為 $m\times n$ 階矩陣 (matrix of order $m\times n$)，簡記為 $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$

其中 a_{ij} 為**第 i 列**與**第 j 行**交叉位置上的元素，稱為矩陣的**第(i，j)元**

$$\begin{array}{cc} & \text{第 } j \text{ 行} \\ & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

第 i 列

註：(1)平面向量可以用 2×1 階的矩陣表之，而空間向量可以用 3×1 階的矩陣表之

(2)1×n 階的矩陣也稱為「**列矩陣**」，m×1 階的矩陣也稱為「**行矩陣**」

2.方陣：矩陣 $A_{m\times n}$，當 $m=n$ (列數＝行數)

形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$ 時，稱此矩陣為 n 階方陣

其中 a_{11}，a_{22}，⋯，a_{nn} 稱為矩陣 A 的**主對角線**(main diagonal)元

例 1.1：關於矩陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，選出正確的選項：

(1)A 有 2 列 3 行　(2)A 是 3×2 階的矩陣　(3)第(1，1)元是 5

(4)第(1，2)元是 3　(5) 1 是第(2，3)元

Ex1.1：關於矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，下列哪些敘述是正確的？

(1)A 是 3 階的矩陣　(2)A 是 3×4 階的矩陣　(3)A 是 4×3 階的矩陣

(4)A 的第(2，3)元是－1　(5)A 的第(3，2)元是－1

例 1.2：已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{2\times3}$，其中 $a_{ij}=2i-j$，試求矩陣 A

Ex1.2：已知矩陣 A＝$[a_{ij}]_{3\times2}$，其中 $a_{ij}=i+j$，試求矩陣 A

重點 2：矩陣相等

意義：當兩個矩陣 A 和 B 滿足：

(1)階數大小相等，即矩陣 A 的**列數**等於矩陣 B 的列數，矩陣 A 的**行數**等於矩陣 B 的行數

(2)矩陣 A 與矩陣 B 的每一個相同對應位置的**元都相等**

則稱矩陣 A 與 B 相等，記作 A＝B

即設 A＝$[a_{ij}]_{m\times n}$，B＝$[b_{ij}]_{m\times n}$，若 A＝B，則 $a_{ij}=b_{ij}$，$1\le i\le m$，$1\le j\le n$

例 2.0：試說明下列各矩陣是否相等？

(1) $\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ -2 & 4 & 7\end{bmatrix}_{2\times3}$ 與 $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & 4\\ 0 & 7\end{bmatrix}_{3\times2}$　　(2) $\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ -2 & 4 & 7\end{bmatrix}_{2\times3}$ 與 $\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ -3 & 4 & 7\end{bmatrix}_{2\times3}$

例 2.1：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}x+y & u+v\\ x-y & u-v\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}4 & 5\\ -2 & -1\end{bmatrix}$，若 A＝B，求 x，y，u，v 的值

Ex2.1：已知 $\begin{bmatrix}x+y & x+u & z+2w\\ 2z-w & 2x-y & z-u-v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 11\\ 2 & 0 & -9\end{bmatrix}$，試求 x，y，z，w，u，v 的值

重點 3：零矩陣與單位方陣

1.零矩陣：若 $m\times n$ 階矩陣的每一個元素都是 0 時，此矩陣稱為 $m\times n$ 階的零矩陣，以 $O_{m\times n}$ 或 O 表示

註：若零矩陣為方陣時，稱為(n 階)零方陣，以 $O_{n\times n}$ 或 O_n 表示

如：$O_{2\times3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$O_{3\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$，$O_2=O_{2\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，$O_3=O_{3\times3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

2.單位方陣(identity matrix)：

設 n 階方陣 $\mathrm{A}_{n\times n}$，其主對角線的元是 1，其他位置的元都是 0，稱為 n 階單位矩(方)陣，簡記為 I_n

註：當不致產生混淆時，I_n 也可簡寫為 I

如：$\mathrm{I}_1=[1]$；$\mathrm{I}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$；$\mathrm{I}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$等

重點 4：矩陣的加法

1.意義：當兩個矩陣 A 和 B 同階時，才可以做矩陣加法運算

設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$，$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$

則 $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$

⇒即 A＋B 是將相同第(i，j)位置上的元相加，記為 $\mathrm{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\mathrm{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $\mathrm{A}+\mathrm{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

2.矩陣加法性質：

(1)階數相同(即同階)之矩陣，才可以做加法運算

(2)A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，若 A＋B＝C，則矩陣 C 也是 $m\times n$ 階的矩陣

(3)矩陣加法具交換性，即 A＋B＝B＋A

(4)矩陣加法具結合性，即 A＋B＋C＝(A＋B)＋C＝A＋(B＋C)

(5)矩陣加法的單位元素為零矩陣，即 $\mathrm{A}_{m\times n}+\mathrm{O}_{m\times n}=\mathrm{A}_{m\times n}$

(6)矩陣加法反元素，即 A＋(－A)＝(－A)＋A＝O，稱(－A)為矩陣 A 的加法反元素

註：(－A)是將矩陣 A 所有位置的元都乘以(－1)，所得到的矩陣

(7)移項法則，若 X＋A＝B，則 X＝B－A

◎矩陣加法

例 4.1：設 A，B，C 都是 2×3 階的矩陣，且 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{bmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}-2&-1&4\\-3&5&3\end{bmatrix}$，$\mathrm{C}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，試求：

(1)A＋B 與 B＋A，並說明 A＋B 與 B＋A 的結果相同嗎？

(2) (A＋B)＋C 與 A＋(B＋C)，並說明(A＋B)＋C 與 A＋(B＋C)的結果相同嗎？

Ex4.1：設 A＝$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$，C＝$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$，試求：

(1)(A＋B)＋C (2)A＋(B＋C) (3)檢驗(A＋B)＋C＝A＋(B＋C)

重點 5：矩陣的減法

1.意義：當兩個矩陣 A 和 B 同階時，才可以做矩陣減法運算

設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣 A＝$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，B＝$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

則 A－B＝$\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

⇒即將 A 中的每一個元減去 B 中相同位置上的元

⇒即 A＝$[a_{ij}]_{m\times n}$，B＝$[b_{ij}]_{m\times n}$，則 A－B＝$[a_{ij}]_{m\times n}-[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$

註：(－B)是將矩陣 B 所有位置的元都乘以(－1)，所得到的矩陣

2.矩陣減法性質：

(1)階數相同之矩陣，才可以做減法運算

(2)若 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，設 A－B＝C，則矩陣 C 也是 $m\times n$ 階的矩陣

(3)矩陣減法不具交換性，即 A－B ≠ B－A

(4)矩陣減法不具結合性，即 (A－B)－C ≠ A－(B－C)

3.矩陣的加減移項運算：

設矩陣 X，A，B 都是同階之矩陣，且滿足 X＋A＝B，則 X＝B－A

例 5.1：設 A＝$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，試求 A－B，B－A，並判斷 A－B 和 B－A 相等嗎？

Ex5.1：設 A $=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$，B $=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$，試求 A－B，B－A，並判斷 A－B 和 B－A 相等嗎？

重點 6：矩陣的係數積(純量乘法)(倍數)

1.意義：若矩陣 A 連加 k 次，即 $\underbrace{A+A+\cdots+A}_{k\text{個}}=kA$，稱為矩陣 A 的**純量乘法**或**係數乘積**(scale product)

即設 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，則 $kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，$k$ 為實數

$\Rightarrow$即設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，k 為實數，$kA=[ka_{ij}]_{m\times n}$

註：(1)矩陣係數積是將實數 k **遍乘**矩陣 A 的每一個元，即 kA 的每個元都等於 A 中相同位置元的 k 倍

(2)若矩陣 A 是 $m\times n$ 階矩陣，k 為實數，則係數積 kA 也是一個 $m\times n$ 階矩陣

2.矩陣係數積的性質：

設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，O 為零矩陣，r，s 為實數，則

(1) $0\cdot$A＝O　　1A＝A　　(－1)A＝－A

(2) r (A＋B)＝rA＋rB

(3) (r＋s)A＝rA＋sA

(4) (r s)A＝r(sA)

(5) A－B＝A＋(－1)B，(－B)＝(－1)B 為矩陣 B 的加法反元素

例 6.1：已知矩陣 A $=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，B $=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$，試求下列各矩陣：(1)(－2)B　　(2) 3A－2B

Ex6.1：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&-1\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-1&3\end{bmatrix}$，試求下列各矩陣：(1)(－3)A　　(2) B－3A

例 6.2：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}8&2\\10&20\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}2&4\\6&2\end{bmatrix}$，且 X＋3B＝2A，試求矩陣 X

Ex6.2：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}-2&3\\4&5\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}1&0\\3&-2\end{bmatrix}$，且 2(X＋A)＝3B，求矩陣 X

重點 7：矩陣的乘法

1.意義：兩矩陣 A、B 做乘法運算 AB 時，**條件**為矩陣 A 的**行數**＝矩陣 B 的**列數**，表示如右

乘積的階數

$A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$

相等

2.設矩陣 $A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$，則 $A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$

即 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{np}\end{bmatrix}_{n\times p}=\begin{bmatrix}c_{11}&\boxed{c_{12}}&\cdots&c_{1p}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mp}\end{bmatrix}_{m\times p}$

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，$1\le i\le m$，$1\le j\le p$　　(矩陣的乘法：列 × 行)

3.矩陣乘法性質：

(1)矩陣的乘積 AB 與 BA 不一定存在；當 AB 有意義，BA 不一定有意義
　即若 AB 與 BA 皆有意義時，AB 與 BA 不一定相等

(2)矩陣的乘法不具交換性，AB≒BA

(3) A≠O，B≠O 則 AB≠O 不恆成立

(4) AB＝O，不能推得 A＝O 或 B＝O

(5)矩陣乘法不具消去律：AB＝AC≠O，不一定能推得 B＝C

(6)矩陣乘法具有結合性：(AB)C＝A(BC)＝ABC

(7)矩陣乘法具有分配性：A(B＋C)＝AB＋AC (左分配)　　(B＋C)A＝BA＋CA (右分配)

(8)矩陣乘法對係數積的結合律：設 r，s 為常數，則 r(AB)＝(rA)B＝A(rB)　　(rA)(sB)＝rs(AB)

例 7.1：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}5&4&2\\1&3&6\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}3&-1&0&1\\1&0&1&3\\4&3&2&5\end{bmatrix}$，試求 AB 與 BA

Ex7.1：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}5&4&2\\1&3&6\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}1&0\\0&3\\2&1\end{bmatrix}$，試求 AB 與 BA

例 7.2：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}1&2\\-3&7\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}0&-3\\2&-6\end{bmatrix}$，C＝$\begin{bmatrix}12&5\\9&6\end{bmatrix}$，試求 AC＋BC，比較(A＋B)C

Ex 7.2：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}-1&4&3\\2&5&8\\-4&7&10\end{bmatrix}$，C＝$\begin{bmatrix}2&-3&-3\\-3&-4&-6\\3&-6&-9\end{bmatrix}$，試求 AB＋AC，比較 A(B＋C)

重點 8：方陣的 n 次方與單位方陣

1.方陣的 n 次方：若方陣 A 自乘 n 次，即 $\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{個}}=A^n$，稱為方陣 A 的 n 次方

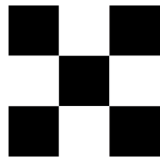
註：若矩陣 $A_{m\times n}$(非方陣)，則 A^n 無意義

2.單位方陣的性質

(1)若 A 為 n 階方陣，則 $A_{n\times n}\,I_n=I_n\,A_{n\times n}=A_{n\times n}$

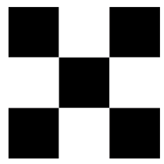
(2)若 A 為 $m\times n$ 階矩陣，則 $A_{m\times n}\,I_n=A_{m\times n}$　　$I_m\,A_{m\times n}=A_{m\times n}$

例 8.1：已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & 255 & 0 \\ 255 & 0 & 255 \\ 0 & 255 & 0 \end{bmatrix}$ 對應的 3×3 格像素的圖形，如圖(0 代表全黑，255 代表全白)



$T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，試求矩陣 TA 並畫出對應的 3×3 格像素的圖形

Ex8.1：已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & 255 & 0 \\ 255 & 0 & 255 \\ 0 & 255 & 0 \end{bmatrix}$ 對應的 3×3 格像素的圖形，如圖(0 代表全黑，255 代表全白)



$T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，試求矩陣 TTA 並畫出對應的 3×3 格像素的圖形

重點 9：二階乘法反方陣

1.定義：設 A 是一個 n 階方陣，若存在一個 n 階方陣 B，滿足 AB＝BA＝I_n，I_n 為單位矩陣

則稱 B 是 A 的「乘法反方陣」(簡稱反方陣)，(A 亦為 B 的反方陣)，記為 B＝A^{-1}

註：(1)方陣的主對角線元都為 1，其餘位置的元都為 0 的 n 階方陣，稱為 n 階單位方陣，記為 I_n

(2)並不是任意方陣都有乘法反方陣

(3)方陣 A 具有反方陣的**充要條件**為其行列式 det (A)＝$|A|\neq 0$，且反方陣是**唯一的**，記為 A^{-1}

(4)若一個 n 階方陣 A 具有反方陣時，則稱方陣 A 為「**可逆方陣**(invertible matrix)」

2.求法：

法 1：利用反方陣**定義**法，則：

設 A＝$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$，且 AB＝I＝$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，得$\begin{bmatrix} ax_1+by_1 & ax_2+by_2 \\ cx_1+dy_1 & cx_2+dy_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

再解方程式$\begin{cases} ax_1+by_1=1 \\ cx_1+dy_1=0 \end{cases}$，$\begin{cases} ax_2+by_2=1 \\ cx_2+dy_2=0 \end{cases}$，求出 x_1，x_2，y_1，y_2，得 B，則 B＝A^{-1}

法 2：利用反方陣**公式**：

設 A＝$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且 det (A)＝$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$，則 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

註：若 det (A)＝$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$ 時，方陣 A 沒有反方陣

註：二階的反方陣是將「主對角線之元素**互換**」,「次對角線之元素**變號**」得之

註：三階方陣 A＝$[a_{ij}]$，且 det (A)$\neq$0，其反方陣 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}[A_{ji}]$，$A_{ji}$ 為 A 在(j，i)位置的**餘因子**

法 3：利用增廣矩陣，透過列運算(高斯－喬登消去法(Gaussian－Jorden elimination))求解：

即增廣矩陣$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]\rightarrow\cdots$ 列運算$\cdots\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & e & f \\ 0 & 1 & g & h \end{array}\right]$，則反矩陣為$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

3.設 A，B，X 三矩陣，滿足 AX＝B，其中 A 是不為零之方陣，且 A^{-1}存在，則 X＝A^{-1}B

4.若 I 為單位矩陣，A 與 I 為同階方陣時，則 AI＝IA＝A

例 9.1：已知二階方陣 A＝$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$，試求 A 的乘法反方陣

Ex9.1：已知二階方陣 A＝$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，試求 A 的乘法反方陣

例 9.2：已知二階方陣 A＝$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$，則：

(1) A 是否有乘法反方陣(即 A^{-1} 是否存在)？ (2)若 A^{-1} 存在，試求 A^{-1}

Ex9.2：判斷下列各矩陣是否有乘法反方陣？若有，求出其乘法反方陣

(1) A＝$\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (2) A＝$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

例 9.3：(1)將$\begin{cases} 3x-7y=-6 \\ 2x-5y=-5 \end{cases}$寫成 AX＝B 的形式

(2)根據(1)，試求矩陣 X

Ex9.3：試利用矩陣解方程組$\begin{cases} 33x-14y=1 \\ -7x+3y=-1 \end{cases}$

例 9.4：試解矩陣方程式$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Ex9.4：試解矩陣方程式$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$