單元 4　複數的幾何意涵　　　　三年___班 座號：____　姓名：

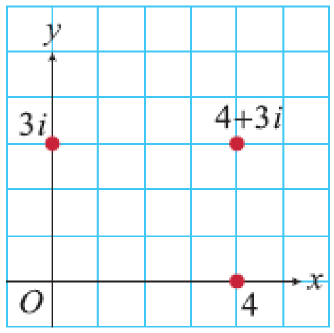
重點 1：複數平面

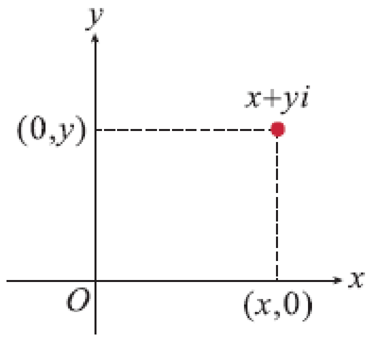
1.意義：將坐標平面上的點(x，y)對應到複數 $x+y\,i$，反之，可將複數 $x+y\,i$ (其中 x，y 為實數)對應到坐標平面上的點(x，y)。即坐標平面上的每一點都可以代表一個複數，且每一個複數都可以在坐標平面上標出位置。

我們把表示複數的坐標平面，稱為複數平面(又稱**高斯平面**或**阿爾岡**平面)

例：如右圖，將坐標平面上的點(4，3)代表複數 $4+3i$，

其中，點(4，0)代表實數 4，點(0，3)代表虛數 $3i$





2.複數平面名詞：

(1)實軸：x 軸上的點(x，0)對應所有的實數 $x+0i$，

而 x 軸又稱為實軸

(2)虛軸：y 軸上的點(0，y)對應所有實部為 0 的虛數 $0+yi$，

而 y 軸又稱為虛軸。

(3)當坐標平面上的 P 點對應複數 $z=x+yi$ 時，稱 $z=x+yi$ 為 P 點的複數坐標，記為 P(z)或 P($x+yi$)

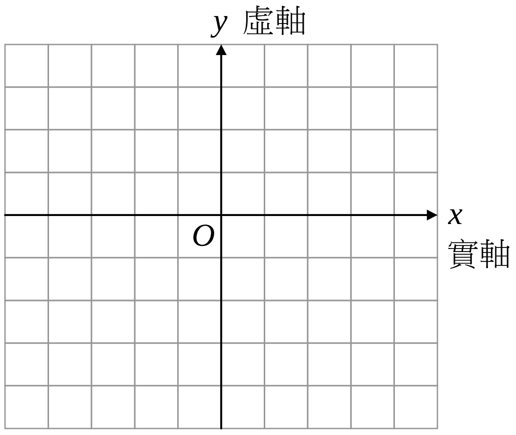
註：複數 $a+bi$ 與其共軛複數 $a-bi$ 在複數平面上的位置會對稱於**實軸**

◎複數坐標

例 1.1：在複數平面上標出下列複數所代表的點：

A($3+2i$)　B($3-2i$)　C($-3i$)　D(-4)

解：

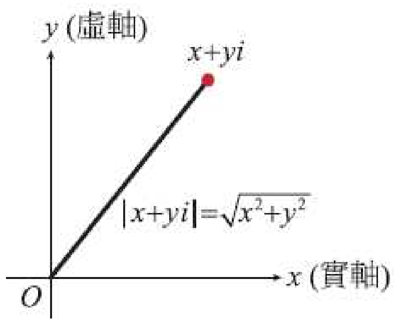


重點 2：複數的絕對值

1.在數線上，$|x|$表示點 P(x)與原點的距離

2.在複數平面上，將複數 $z=x+yi$ 的絕對值規定為點(x，y)與原點(0，0)的距離，

並表示成$|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$，如右圖所示

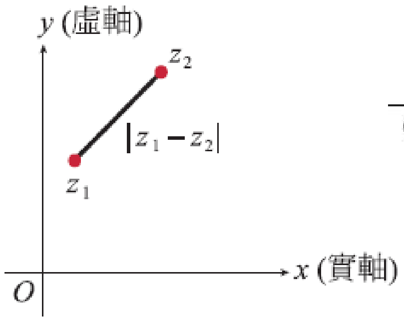


3.複數平面上 z_1 與 z_2 兩點的距離：

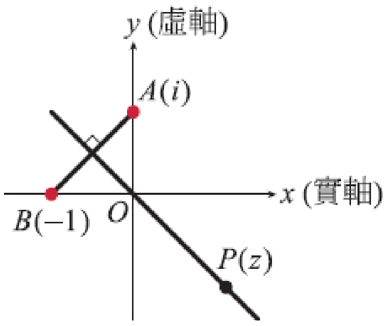
設兩複數 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，a，b，c，d 為實數，

則 $z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$，如右圖

即 z_1 與 z_2 兩點的距離$=|z_1-z_2|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$



例 2.1：在複數平面上，所有滿足方程式$|z-i|=|z+1|$的複數 z 形成什麼圖形？

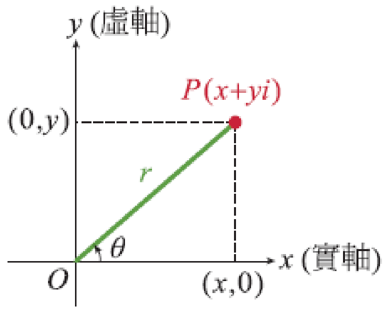


重點 3：複數的極式

1.意義：在複數平面上，異於原點 O 的點 P($x+y\,i$)，令$\overline{OP}=r$，且射線 OP 為有向角θ的終邊，則由三角比的定義

可得$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，如右圖所示

⇒即複數 $z=x+y\,i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，稱為複數 z 的**極式**



2.極式的性質：

(1) $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) θ稱為複數 z 的輻角，記作$\theta=\arg(z)$

當 $0°\le\theta<360°$ ($0\le\theta<2\pi$)時，稱θ為複數 z 的主輻角，記作$\theta=\mathrm{Arg}(z)$

◎複數的極式

例 3.1：將下列各複數表為極式 (輻角取主輻角)

(1) $z_1=-1+\sqrt{3}\,i$ (2) $z_2=-1-i$ (3) $z_3=i$

重點 4：複數極式的乘法與除法

設複數 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$皆為極式，則：

(1)乘法 $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(2)除法 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

說明：利用和角公式，可得

(1)乘法 $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

(2)除法 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$

$$= \frac{r_1}{r_2} \times \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

◎極式的乘法與除法

例 4.1：求 $\dfrac{4(\cos 80^0 + i\sin 80^0)\times 3(\cos 50^0 + i\sin 50^0)}{6(\cos 35^0 + i\sin 35^0)\times(\cos 5^0 + i\sin 5^0)}$ 的值

重點 5：複數乘法的意涵

設複數 z 為複數平面上的一點，r 為正實數，且 θ 為有向角。則複數 z 與 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$相乘的幾何意義如下：

1.複數 z×r 的意涵：

在複數平面上 z×r 所對應的點，其**輻角**與 z 相等，其與原點 O 的距離為$|z|$的 r 倍，

此時稱 z×r 為「以原點 O 為中心、將 z 伸縮 r 倍」，如下圖 1

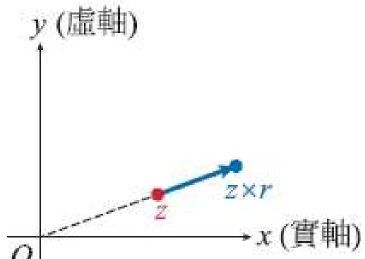


圖 1

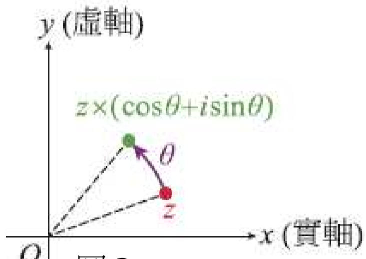


圖 2

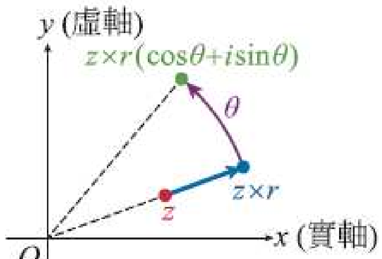


圖 3

2.複數 z×$(\cos\theta + i\sin\theta)$的意涵：

由極式的乘法公式可知，z×$(\cos\theta + i\sin\theta)$的結果就是以原點 O 為中心，將 z 依逆時針方向旋轉 θ 角，如上圖 2

3.複數 z×$r(\cos\theta + i\sin\theta)$的意涵：

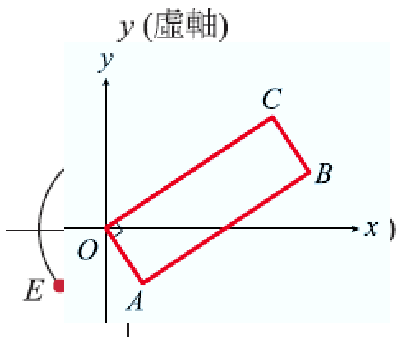
由極式的乘法公式可知，z×$r(\cos\theta + i\sin\theta)$的結果就是以原點 O 為中心，

先將 z 伸縮 r 倍($r>1$)得 z×r，再依逆時針方向旋轉 θ 角，如上圖 3

◎複數乘法的意涵

例 5.1：在坐標平面上， 設矩形 OABC 滿足 O(0，0)，A(2，－3)，$\overline{OA}$：$\overline{OC}$＝1 : 3，

且 B 與 C 均在第一象限，則：(1)求 C 點的坐標 (2)求 B 點的坐標



重點 6：棣美弗定理

1.定理：若非零複數 z 的極式為 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$，

則對於任意正整數 n，得 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$，稱為**棣美弗定理**

註：<u>棣美弗</u> (A. de Moivre，1667~1754)法國數學家。他發現的棣美弗定理連結了三角學與複數。此外，對機率論也有相當的貢獻。

說明：(1)當 $n=1$ 時，$z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$，原式成立

(2)設 $n=k$ 時原式成立，即 $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$

(3)當 $n=k+1$ 時， $z^{k+1} = z^k z = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= r^{k+1}[\,(\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)]$$

$$= r^{k+1}[\cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta)] = r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta]$$

即當 $n=k+1$ 時，原式也成立，故由數學歸納法知棣美弗定理恆成立

2.棣美弗定理可以推廣到所有**整數次方**：

(1)由整數指數的定義，規定 $z^0=1$， $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$

(2) $z^{-n} = \dfrac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} = \dfrac{1}{r^n}[\cos(0-n\theta) + i\sin(0-n\theta)]$

$$= \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)] = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$$

即棣美弗定理對於**負整數次方**也都成立，且 $z^0=1$，⇒棣美弗定理可以推廣到所有**整數次方**

◎棣美弗定理

例 6.1：求$(1-\sqrt{3}i)^5$的值