單元 4　複數的幾何意涵　　三年___班　座號：____　姓名：

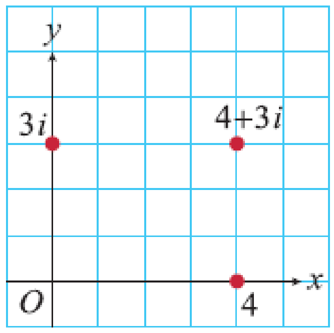
重點 1：複數平面

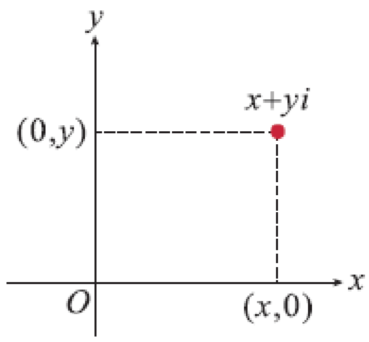
1.意義：將坐標平面上的點$(x，y)$對應到複數 $x+y\,i$，反之，可將複數 $x+y\,i$ (其中 x，y 為實數)對應到坐標平面上的點$(x，y)$。即坐標平面上的每一點都可以代表一個複數，且每一個複數都可以在坐標平面上標出位置。

我們把表示複數的坐標平面，稱為複數平面(又稱**高斯平面**或**阿爾岡**平面)

例：如右圖，將坐標平面上的點(4，3)代表複數 $4+3i$，

其中，點(4，0)代表實數 4，點(0，3)代表虛數 $3i$





2.複數平面名詞：

(1)實軸：x 軸上的點$(x，0)$對應所有的實數 $x+0i$，

而 x 軸又稱為實軸

(2)虛軸：y 軸上的點$(0，y)$對應所有實部為 0 的虛數 $0+yi$，

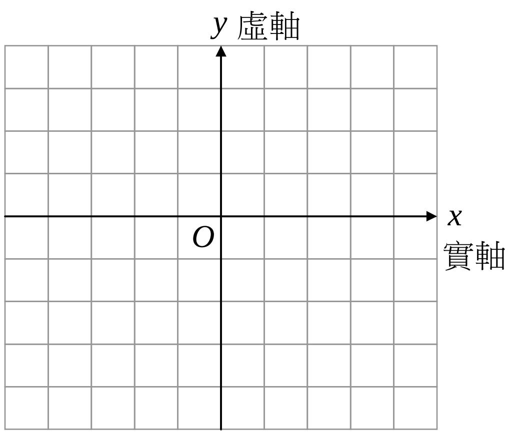
而 y 軸又稱為虛軸。

(3)當坐標平面上的 P 點對應複數 $z=x+yi$ 時，稱 $z=x+yi$ 為 P 點的複數坐標，記為 P(z)或 P$(x+yi)$

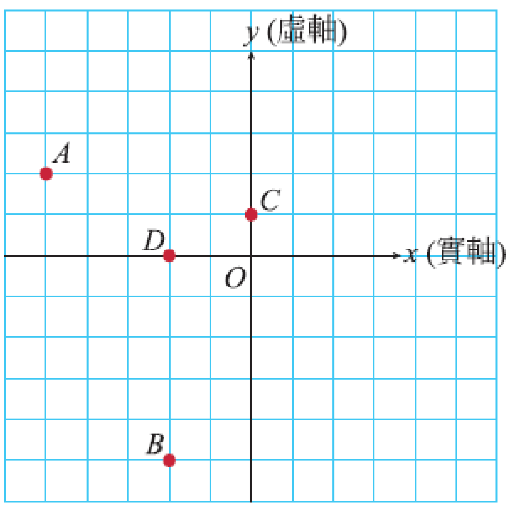
註：複數 $a+bi$ 與其共軛複數 $a-bi$ 在複數平面上的位置會對稱於**實軸**

◎複數坐標

例 1.1：在複數平面上標出下列複數所代表的點：A$(3+2i)$　　B$(3-2i)$　　C$(-3i)$　　D(-4)



Ex1.1：如右圖，分別寫出複數平面上 A，B，C，D 所代表的複數

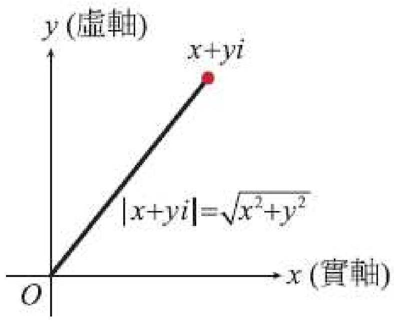


重點 2：複數的絕對值

1.在數線上，$|x|$表示點 P(x)與原點的距離

2.在複數平面上，將複數 z＝$x+yi$ 的絕對值規定為點(x，y)與原點(0，0)的距離，

並表示成$|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$ ，如右圖所示

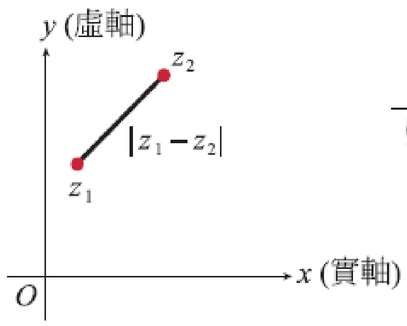


3.複數平面上 z_1 與 z_2 兩點的距離：

設兩複數 $z_1=a+bi$， $z_2=c+di$，a，b，c，d 為實數，

則 $z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$，如右圖

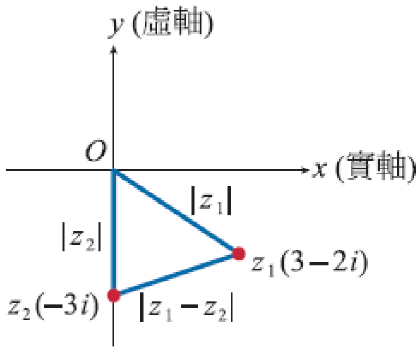
即 z_1 與 z_2 兩點的距離＝$|z_1-z_2|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$



◎複數的絕對值

例 2.1：在複數平面上，設複數 $z_1=3-2i$， $z_2=-3i$，則：

(1)求$|z_1|$，$|z_2|$與$|z_1-z_2|$的值　　　(2)求 z_1 與 z_2 兩點的距離



Ex2.1：已知 $z=3+4i$，且 $\bar{z}$ 表複數 z 的共軛複數，求下列各絕對值：

(1)$|z|$　　(2)$|\bar{z}|$　　(3)$|z-\bar{z}|$

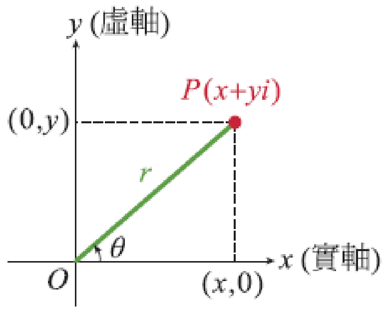
例 2.2：在複數平面上，所有滿足方程式$|z-i|=|z+1|$的複數 z 形成什麼圖形？

Ex2.2：在複數平面上，所有滿足方程式$|z-1-i|=2$的複數 z 形成什麼圖形？

重點 3：複數的極式

1.意義：在複數平面上，異於原點 O 的點 P($x+y\,i$)，令$\overline{OP}=r$，且射線 OP 為有向角θ的終邊，則由三角比的定義

可得$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，如右圖所示



⇒即複數 z$=x+y\,i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，稱為複數 z 的**極式**

2.極式的性質：

(1) $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) θ稱為複數 z 的輻角，記作$\theta=\arg(z)$

當 $0°\le\theta<360°$ ($0\le\theta<2\pi$)時，稱θ為複數 z 的主輻角，記作$\theta=\mathrm{Arg}(z)$

◎複數的極式

例 3.1：將複數 z$=1+3i$ 表示為極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的形式，並求其輻角與主輻角

Ex3.1：將複數 z$=\sqrt{3}-i$ 表示為極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的形式，並求其輻角與主輻角

例 3.2：將下列各複數表為極式 (輻角取主輻角)

(1) $z_1=-1+\sqrt{3}\,i$ (2) $z_2=-1-i$ (3) $z_3=i$

Ex3.2：將下列各複數表為極式 (輻角取主輻角)

(1) $z_1=-\sqrt{3}-i$ (2) $z_2=2-2i$ (3) $z_3=4$

例 3.3：將下列各複數表為極式 (輻角取主輻角)

(1) $z=4(\sin 80°+i\cos 80°)$ (2) $z=3(\cos 50°-i\sin 50°)$

Ex3.3：將下列各複數表為極式 (輻角取主輻角)

(1) $z=4(\sin 110°+i\cos 110°)$　　(2) $z=3(\cos 200°-i\sin 200°)$

重點 4：複數極式的乘法與除法

設複數 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$皆為極式，則：

(1)乘法 $z_1 z_2=r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(2)除法 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

說明：利用和角公式，可得

(1)乘法 $z_1 z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]=r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(2)除法 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$

$=\dfrac{r_1}{r_2}\times\dfrac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)]}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

◎極式的乘法與除法

例 4.1：求 $\dfrac{4(\cos 80^0+i\sin 80^0)\times 3(\cos 50^0+i\sin 50^0)}{6(\cos 35^0+i\sin 35^0)\times(\cos 5^0+i\sin 5^0)}$ 的值

Ex4.1：求 $\dfrac{3(\cos 55^0+i\sin 55^0)\times 6(\cos 25^0+i\sin 25^0)}{9(\cos 20^0+i\sin 20^0)}$ 的值

例 4.2：已知 $z_1=6(\cos 10°+i\sin 10°)$，$z_2=2(\sin 70°+i\cos 70°)$，求 $z_1\,z_2$ 的值

Ex4.2：求 $\dfrac{15(\sin 50^0+i\cos 50^0)}{5(\cos 50^0-i\sin 50^0)}$ 的值

重點 5：複數乘法的意涵

設複數 z 為複數平面上的一點，r 為正實數，且 θ 為有向角。則複數 z 與 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 相乘的幾何意義如下：

1.複數 z×r 的意涵：

在複數平面上 z×r 所對應的點，其**輻角**與 z 相等，其與原點 O 的距離為 $|z|$ 的 r 倍，
此時稱 z×r 為「以原點 O 為中心、將 z 伸縮 r 倍」，如下圖 1

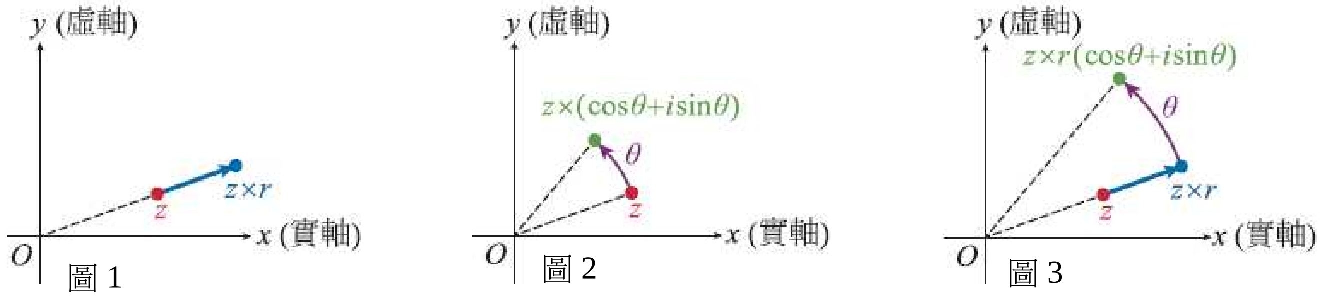


圖 1　圖 2　圖 3

2.複數 z×$(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的意涵：

由極式的乘法公式可知，z×$(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的結果就是以原點 O 為中心，將 z 依逆時針方向旋轉 θ 角，如上圖 2

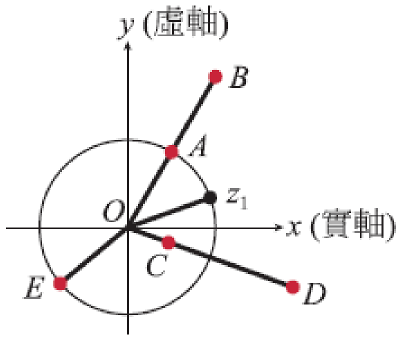
3.複數 z×$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的意涵：

由極式的乘法公式可知，z×$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的結果就是以原點 O 為中心，
先將 z 伸縮 r 倍($r>1$)得 z×r，再依逆時針方向旋轉 θ 角，如上圖 3

◎複數乘法的意涵

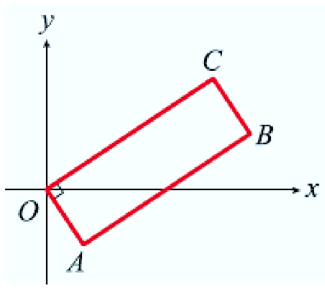
例 5.0：如右圖，複數 z_1 為單位圓上的一點，且 $z_2=2(\cos 40°+i\sin 40°)$。且 $\bar{z}$ 表示 z 的共軛複數，試問下列各複數對應的點分別是 A，B，C，D，E 的哪一點？

(1) $z_1 z_2$ (2) $z_1 \overline{z_2}$

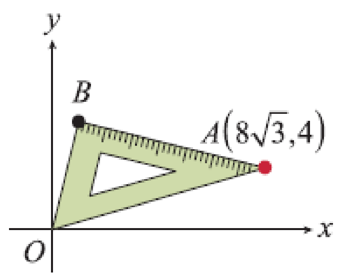


例 5.1：在坐標平面上， 設矩形 OABC 滿足 O(0，0)，A(2，－3)，$\overline{OA}$ ：$\overline{OC}$ ＝1 : 3，且 B 與 C 均在第一象限。

(1)求 C 點的坐標 (2)求 B 點的坐標



Ex5.1：如右圖，將 30°- 60°- 90°的三角板放置在坐標平面上。已知 A 點的坐標為($8\sqrt{3}$ ，4)，求 B 點的坐標



重點 6：複數加、減法的應用

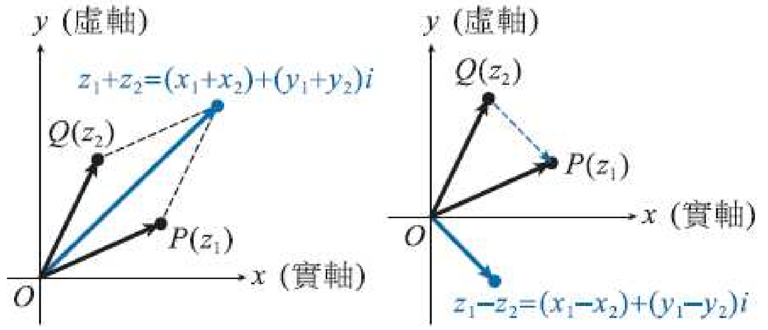
1.對應意義：設坐標平面上 P(x_1, y_1)，Q(x_2, y_2)對應的複數分別為 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，

即複數 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$ 對應到向量 $\overrightarrow{OP}=(x_1, y_1)$，$\overrightarrow{OQ}=(x_2, y_2)$

2.複數的加減法與向量的加減法對應關係：

(1)加法：$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ 相對應到 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$

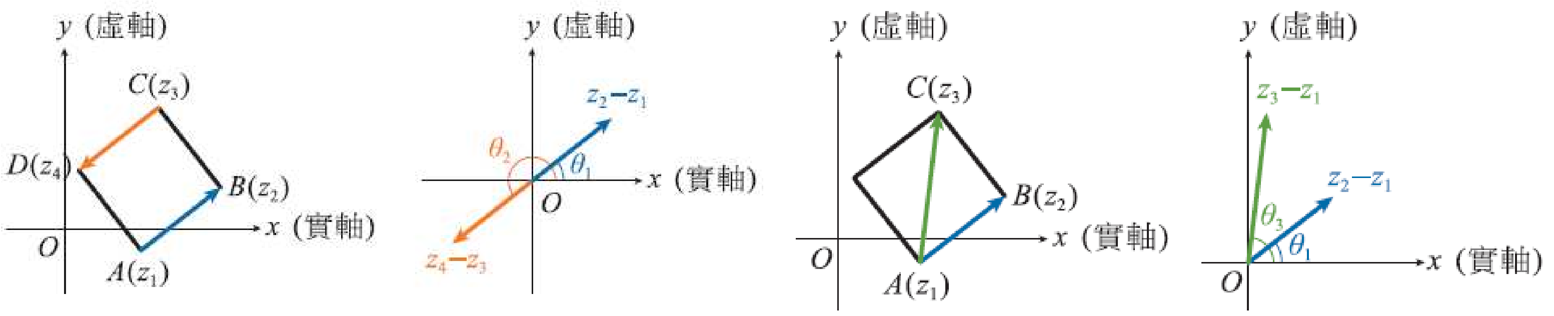
(2)減法：$z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i$ 相對應到 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$



◎複數加、減法的應用

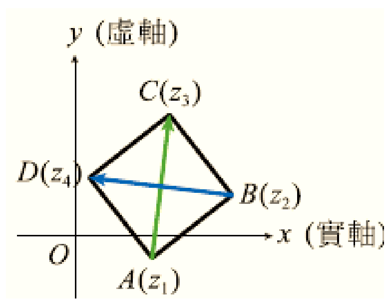
例 6.1：已知複數平面上的相異四點 A(z_1)，B(z_2)，C(z_3)，D(z_4)，且 ABCD 依逆時針方向可連成一個正方形，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{z_2-z_1}{z_4-z_3}$　　(2) $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$

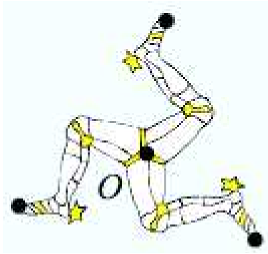


Ex6.1：已知複數平面上的相異四點 A(z_1)，B(z_2)，C(z_3)，D(z_4)，且 ABCD 依逆時針方向可連成一個正方形，求下列各式的值：

(1) $z_1-z_2+z_3-z_4$　　(2) $\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_2}$



例 6.2：三腿跑步圖是英屬地曼島的代表標誌，它是由一隻穩健跑步的腿，透過旋轉 120°形成一個無限循環、永不摔倒的姿勢，如右圖所示。將此三腿跑步圖的旋轉點 O 貼合在複數平面的原點，



並已知其中一個腳尖所對應的複數為 $2+8\sqrt{3}\,i$，求：

(1)任一腳尖到 O 點的距離　　(2)另外兩個腳尖所對應的複數

(3)三個腳尖所圍成的正三角形之邊長

Ex6.2：雪花是自然界中冰的一種結晶，其六個雪柱的頂點構成正六邊形，如右圖所示。將此雪花的中心點貼合在複數平面的原點，並已知其中一雪柱的頂點所對應之複數為 $z=4\sqrt{3}+10i$，求與 z 相鄰的兩個雪柱頂點所對應之複數

重點 7：棣美弗定理

1.定理：若非零複數 z 的極式為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，

則對於任意正整數 n，得 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，稱為**棣美弗定理**

註：棣美弗 (A. de Moivre，1667~1754)法國數學家。他發現的棣美弗定理連結了三角學與複數。此外，對機率論也有相當的貢獻。

說明：(1)當 $n=1$ 時，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，原式成立

(2)設 $n=k$ 時原式成立，即 $z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$

(3)當 $n=k+1$ 時，$z^{k+1}=z^k z=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=r^{k+1}[(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)]$$

$$=r^{k+1}[\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)]=r^{k+1}[\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta]$$

即當 $n=k+1$ 時，原式也成立，故由數學歸納法知棣美弗定理恆成立

2.棣美弗定理可以推廣到所有**整數次方**：

(1)由整數指數的定義，規定 $z^0=1$，$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$

(2) $z^{-n}=\dfrac{1(\cos 0+i\sin 0)}{r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}=\dfrac{1}{r^n}[\cos(0-n\theta)+i\sin(0-n\theta)]$

$$=\frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]=r^{-n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]$$

即棣美弗定理對於**負整數次方**也都成立，且 $z^0=1$，⇒棣美弗定理可以推廣到所有**整數次方**

◎棣美弗定理

例 7.1：求 $(1-\sqrt{3}i)^5$ 的值

Ex7.1：求下列各複數的值：

(1) $(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)^{10}$ (2) $(2-2i)^8$

◎複數的負整數次方

例 7.2：求$(-1+i)^{-4}$的值

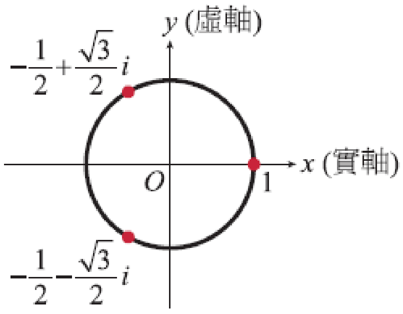
Ex7.2：求$(\sqrt{3}+i)^{-9}$的值

重點 8：複數的 n 次方根

1.意義：設 n 為正整數，且 a 是非零複數。由代數基本定理知道 n 次方程式 $z^n-a=0$ 共有 n 個根，

則將這 n 個根稱為 a 的 n 次方根

2. $a=1$ 的 n 次方根



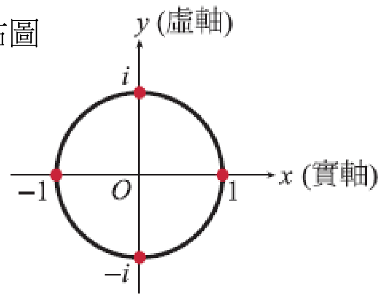
(1)當 $n=1$ 時，$z-1=0$，解得 $z=1$。故 1 的一次方根為 1

(2)當 $n=2$ 時，$z^2-1=0$，即$(z-1)(z+1)=0$，解得 $z=1$，-1

故 1 的兩個二次方根為 1 與-1

(3)當 $n=3$ 時，$z^3-1=0$，即$(z-1)(z^2+z+1)=0$，解得 $z=1$，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

故 1 的三個三次方根為 1，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，三個複數根在複數平面上的位置如右圖



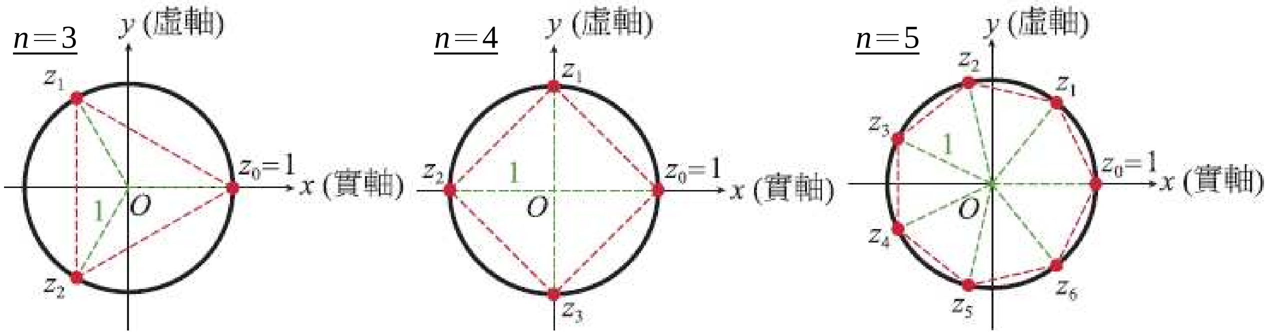
(4)當 $n=4$ 時，$z^4-1=0$，即$(z-1)(z+1)(z^2+1)=0$，解得 $z=1$，-1，i，$-i$

故 1 的四個四次方根為 1，-1，i 與$-i$，四個複數根在複數平面上的位置如右圖

3. $z^n=1$ 的 n 次方根之幾何意義：

在複數系裡，1 的 n 個 n 次方根為 $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，$k=0$，1，2，⋯，$(n-1)$

在複數平面上，它們恰為內接於單位圓的正 n 邊形之 n 個頂點，且其中一個頂點對應的複數是 1



◎複數 z 的 $z^n=1$ 的 n 次方根

例 8.1：求 1 的五次方根，並將它們描繪在複數平面上

Ex8.1：解下列各複數方程式：

(1) $z^6=1$ (2) $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

例 8.2：求 $-8+8\sqrt{3}\,i$ 的四次方根，並將它們描繪在複數平面上

Ex8.2：求$-4+4\sqrt{3}\,i$的三次方根，並將它們描繪在複數平面上所圍的三角形面積