單元 4　複數的幾何意涵　　　三年___班 座號：____　姓名：

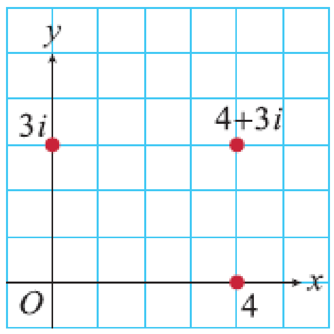
重點 1：複數平面

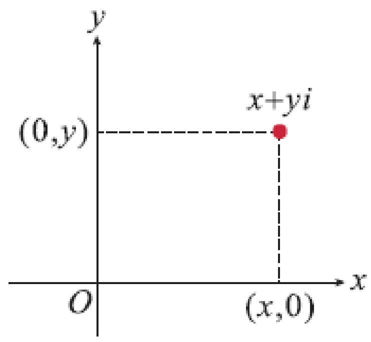
1.意義：將坐標平面上的點$(x，y)$對應到複數$x+y\,i$，反之，可將複數$x+y\,i$ (其中x，y為實數)對應到坐標平面上的點$(x，y)$。即坐標平面上的每一點都可以代表一個複數，且每一個複數都可以在坐標平面上標出位置。

我們把表示複數的坐標平面，稱為複數平面(又稱**高斯平面**或**阿爾岡**平面)

例：如右圖，將坐標平面上的點(4，3)代表複數$4+3i$，

其中，點(4，0)代表實數 4，點(0，3)代表虛數$3i$





2.複數平面名詞：

(1)實軸：x軸上的點$(x，0)$對應所有的實數$x+0i$，

而x軸又稱為實軸

(2)虛軸：y軸上的點$(0，y)$對應所有實部為 0 的虛數$0+yi$，

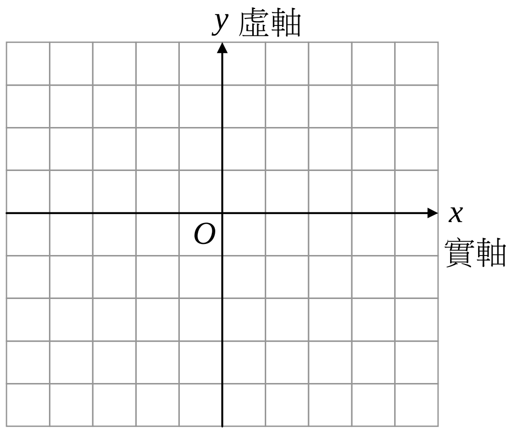
而y軸又稱為虛軸。

(3)當坐標平面上的 P 點對應複數$z=x+yi$時，稱$z=x+yi$為 P 點的複數坐標，記為$P(z)$或$P(x+yi)$

註：複數$a+bi$與其共軛複數$a-bi$在複數平面上的位置會對稱於**實軸**

◎複數坐標

例 1.1：在複數平面上標出下列複數所代表的點：$A(3+2i)$　　$B(3-2i)$　　$C(-3i)$　　$D(-4)$

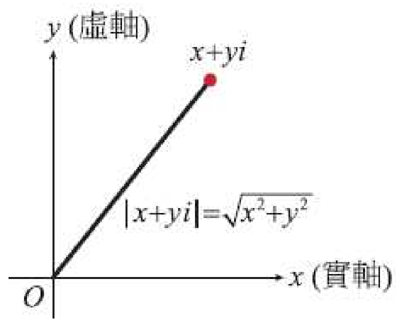


重點 2：複數的絕對值

1.在數線上，$|x|$表示點$P(x)$與原點的距離

2.在複數平面上，將複數$z=x+yi$的絕對值規定為點$(x，y)$與原點$(0，0)$的距離，

並表示成$|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$，如右圖所示

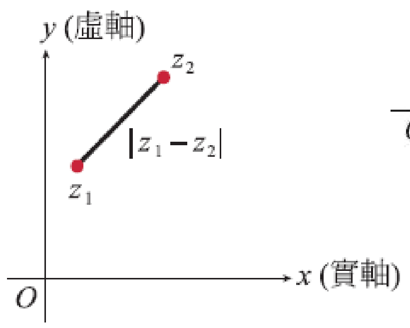


3.複數平面上z_1與z_2兩點的距離：

設兩複數$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，a，b，c，d為實數，

則$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$，如右圖

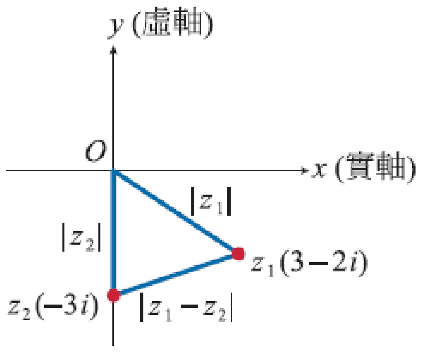
即z_1與z_2兩點的距離$=|z_1-z_2|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$



◎複數的絕對值

例 2.1：在複數平面上，設複數 $z_1=3-2i$， $z_2=-3i$，則：

(1)求 $|z_1|$，$|z_2|$ 與 $|z_1-z_2|$ 的值　　(2)求 z_1 與 z_2 兩點的距離



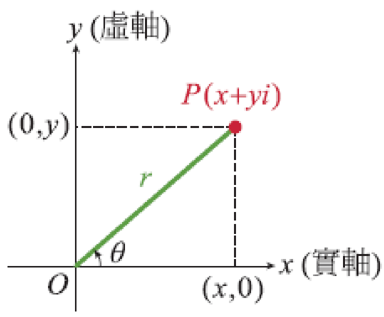
例 2.2：在複數平面上，所有滿足方程式 $|z-i|=|z+1|$ 的複數 z 形成什麼圖形？

重點 3：複數的極式

1.意義：在複數平面上，異於原點 O 的點 P($x+yi$)，令 $\overline{OP}=r$，且射線 OP 為有向角 θ 的終邊，則由三角比的定義

可得 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，如右圖所示

⇒即複數 $z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，稱為複數 z 的**極式**



2.極式的性質：

(1) $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) θ 稱為複數 z 的輻角，記作 $\theta=\arg(z)$

當 $0°\le\theta<360°$ $(0\le\theta<2\pi)$時，稱 θ 為複數 z 的主輻角，記作 $\theta=\mathrm{Arg}(z)$

◎複數的極式

例 3.1：將複數 $z=1+3i$ 表示為極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的形式，並求其輻角與主輻角

例 3.2：將下列各複數表為極式 (輻角取主輻角)

(1) $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i$　　(2) $z_2 = -1 - i$　　(3) $z_3 = i$

例 3.3：將下列各複數表為極式 (輻角取主輻角)

(1) $z = 4(\sin 80° + i\cos 80°)$　　(2) $z = 3(\cos 50° - i\sin 50°)$

重點 4：複數極式的乘法與除法

設複數 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$皆為極式，則：

(1)乘法 $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(2)除法 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

說明：利用和角公式，可得

(1)乘法 $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

(2)除法 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$

$$= \frac{r_1}{r_2} \times \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

◎極式的乘法與除法

例 4.1：求 $\dfrac{4(\cos 80^0 + i\sin 80^0)\times 3(\cos 50^0 + i\sin 50^0)}{6(\cos 35^0 + i\sin 35^0)\times(\cos 5^0 + i\sin 5^0)}$ 的值

例 4.2：已知 $z_1=6(\cos 10°+i\sin 10°)$， $z_2=2(\sin 70°+i\cos 70°)$，求 z_1z_2的值

重點 5：複數乘法的意涵

設複數 z 為複數平面上的一點，r 為正實數，且θ為有向角。則複數 z 與 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$相乘的幾何意義如下：

1.複數 z×r 的意涵：

在複數平面上 z×r 所對應的點，其**輻角**與 z 相等，其與原點 O 的距離為$|z|$的 r 倍，

此時稱 z×r 為「以原點 O 為中心、將 z 伸縮 r 倍」，如下圖 1

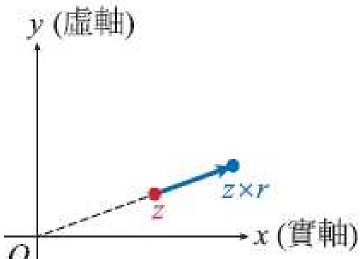


圖 1

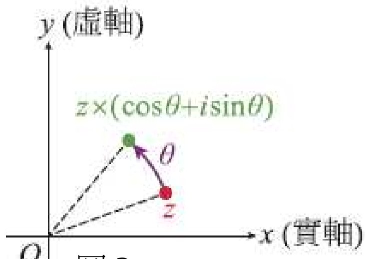


圖 2

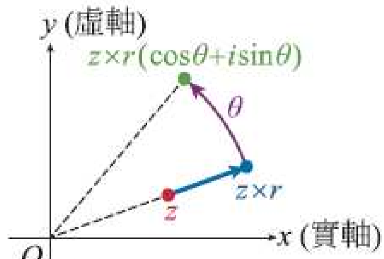


圖 3

2.複數 z×$(\cos\theta+i\sin\theta)$的意涵：

由極式的乘法公式可知，z×$(\cos\theta+i\sin\theta)$的結果就是以原點 O 為中心，將 z 依逆時針方向旋轉θ角，如上圖 2

3.複數 z×$r(\cos\theta+i\sin\theta)$的意涵：

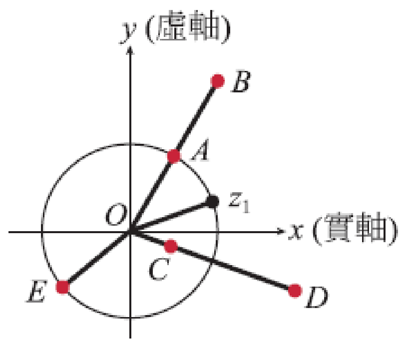
由極式的乘法公式可知，z×$r(\cos\theta+i\sin\theta)$的結果就是以原點 O 為中心，

先將 z 伸縮 r 倍($r>1$)得 z×r，再依逆時針方向旋轉θ角，如上圖 3

◎複數乘法的意涵

例 5.0：如右圖，複數 z_1 為單位圓上的一點，且 $z_2=2(\cos 40°+i\sin 40°)$。且 $\overline{z}$ 表示 z 的共軛複數，試問下列各複數對應的點分別是 A，B，C，D，E 的哪一點？

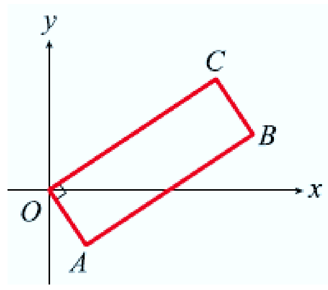
(1) z_1z_2　　　(2) $z_1\overline{z_2}$



例 5.1：在坐標平面上， 設矩形 OABC 滿足 O(0，0)，A(2，-3)，$\overline{OA}$：$\overline{OC}=1:3$，

且 B 與 C 均在第一象限。

(1)求 C 點的坐標　　　(2)求 B 點的坐標



重點 6：複數加、減法的應用

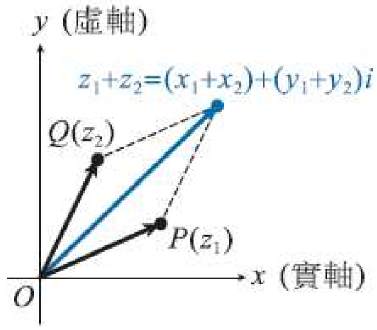
1.對應意義：設坐標平面上 P(x_1，y_1)，Q(x_2，y_2)對應的複數分別為 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，

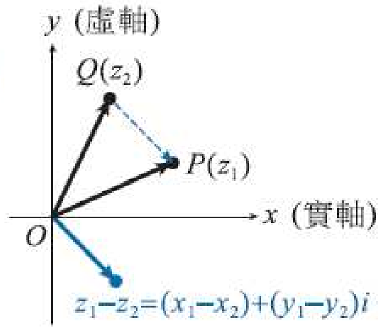
即複數 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$ 對應到向量 $\overrightarrow{OP}=(x_1，y_1)$，$\overrightarrow{OQ}=(x_2，y_2)$

2.複數的加減法與向量的加減法對應關係：

(1)加法：$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ 相對應到 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$

(2)減法：$z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i$ 相對應到 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$



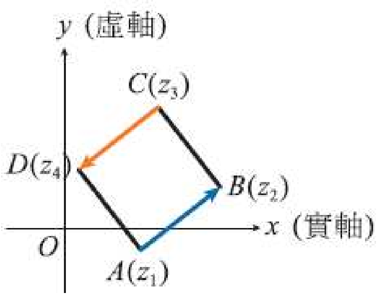


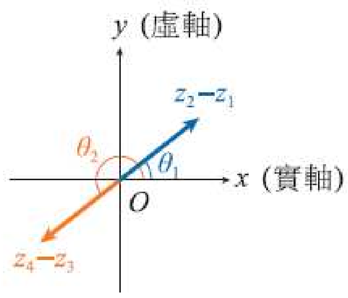
◎複數加、減法的應用

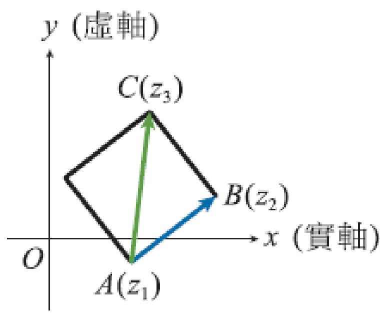
例 6.1：已知複數平面上的相異四點 A(z_1)，B(z_2)，C(z_3)，D(z_4)，且 ABCD 依逆時針方向可連成一個正方形，

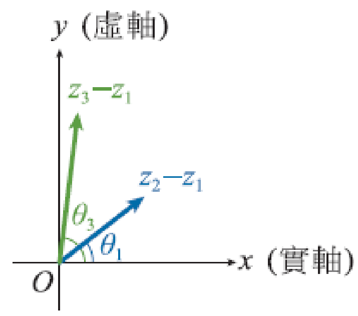
求下列各式的值：

(1) $\dfrac{z_2-z_1}{z_4-z_3}$　　　(2) $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$







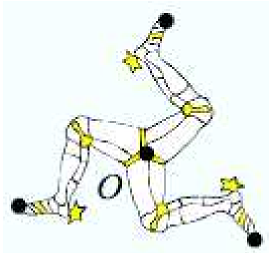


例 6.2：三腿跑步圖是英屬地曼島的代表標誌，它是由一隻穩健跑步的腿，透過旋轉 120°形成一個無限循環、永不摔倒的姿勢，如右圖所示。將此三腿跑步圖的旋轉點 O 貼合在複數平面的原點，

並已知其中一個腳尖所對應的複數為 $2+8\sqrt{3}\,i$，求：

(1)任一腳尖到 O 點的距離　(2)另外兩個腳尖所對應的複數

(3)三個腳尖所圍成的正三角形之邊長



重點 7：棣美弗定理

1.定理：若非零複數 z 的極式為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，

則對於任意正整數 n，得 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，稱為**棣美弗定理**

註：棣美弗 (A. de Moivre，1667~1754)法國數學家。他發現的棣美弗定理連結了三角學與複數。此外，對機率論也有相當的貢獻。

說明：(1)當 $n=1$ 時，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，原式成立

(2)設 $n=k$ 時原式成立，即 $z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$

(3)當 $n=k+1$ 時，$z^{k+1}=z^k z=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=r^{k+1}[(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)]$

$=r^{k+1}[\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)]=r^{k+1}[\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta]$

即當 $n=k+1$ 時，原式也成立，故由數學歸納法知棣美弗定理恆成立

2.棣美弗定理可以推廣到所有**整數次方**：

(1)由整數指數的定義，規定 $z^0=1$，$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$

(2) $z^{-n}=\dfrac{1(\cos 0+i\sin 0)}{r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}=\dfrac{1}{r^n}[\cos(0-n\theta)+i\sin(0-n\theta)]$

$=\dfrac{1}{r^n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]=r^{-n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]$

即棣美弗定理對於**負整數次方**也都成立，且 $z^0=1$，⇒棣美弗定理可以推廣到所有**整數次方**

◎棣美弗定理

例 7.1：求$(1-\sqrt{3}i)^5$的值

◎複數的負整數次方

例 7.2：求$(-1+i)^{-4}$的值

重點 8：複數的 n 次方根

1.意義：設 n 為正整數，且 a 是非零複數。由代數基本定理知道 n 次方程式 $z^n-a=0$ 共有 n 個根，

則將這 n 個根稱為 a 的 n 次方根

2. $a=1$ 的 n 次方根

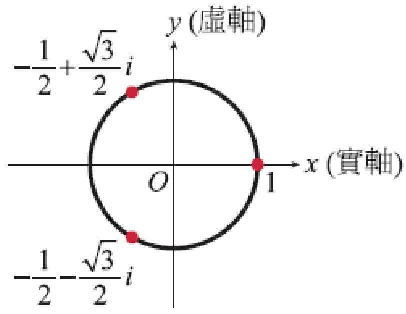
(1)當 $n=1$ 時，$z-1=0$，解得 $z=1$。故 1 的一次方根為 1

(2)當 $n=2$ 時，$z^2-1=0$，即$(z-1)(z+1)=0$，解得 $z=1$，-1

故 1 的兩個二次方根為 1 與-1

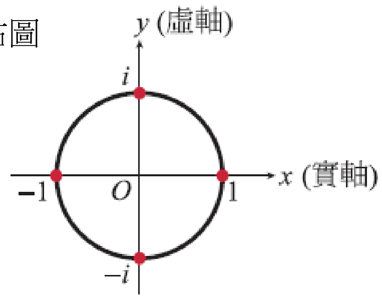
(3)當 $n=3$ 時，$z^3-1=0$，即$(z-1)(z^2+z+1)=0$，解得 $z=1$，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

故 1 的三個三次方根為 1，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，三個複數根在複數平面上的位置如右圖



(4)當 $n=4$ 時，$z^4-1=0$，即$(z-1)(z+1)(z^2+1)=0$，解得 $z=1$，-1，i，$-i$

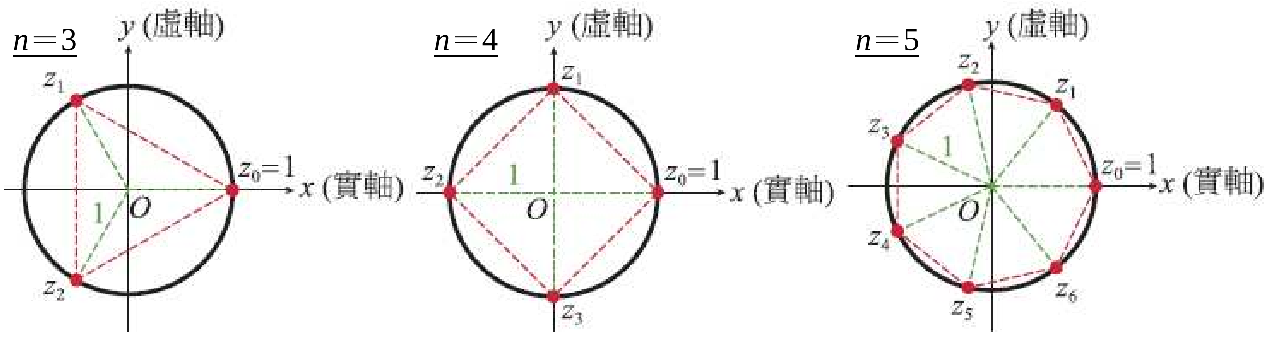
故 1 的四個四次方根為 1，-1，i 與$-i$，四個複數根在複數平面上的位置如右圖



3. $z^n=1$ 的 n 次方根之幾何意義：

在複數系裡，1 的 n 個 n 次方根為 $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，$k=0$，1，2，⋯，$(n-1)$

在複數平面上，它們恰為內接於單位圓的正 n 邊形之 n 個頂點，且其中一個頂點對應的複數是 1



◎複數 z 的 $z^n=1$ 的 n 次方根

例 8.1：求 1 的五次方根，並將它們描繪在複數平面上

例 8.2：求$-8+8\sqrt{3}\,i$的四次方根，並將它們描繪在複數平面上