單元 3　複數與多項式方程式　　三年___班 座號：____　姓名：

重點 1：複數(complex number)

1.符號 i：規定符號 $i=\sqrt{-1}$，且 i 滿足下列性質：

(1) $i^2=-1$　　(2)當實數 $b>0$ 時，$\sqrt{-b}=\sqrt{b}\,i$

2.符號 i 的性質：

(1)① $i=\sqrt{-1}$，② $i^2=-1$，③ $i^3=-i$，④ $i^4=1$

(2)推廣，① $i^{4k+1}=i$　② $i^{4k+2}=-1$，③ $i^{4k+3}=-i$，④ $i^{4k+4}=1$，其中 k 為非負整數

(3)當 n 為正整數時，i^n 只有 i，-1，$-i$ 與 1 四個可能的值，而且它們是依序循環不息的

3.複數的定義：設 a，b 為實數，形如 $a+bi$ 的數稱為複數，其中 a 稱為 $a+bi$ 的實部，b 稱為 $a+bi$ 的虛部

一般以符號 $z=a+bi$ 表示複數，實部 a 以 R(z)，虛部 b 以 I(z)表示

4.複數的表示：

(1)複數 $a+(-b)i=a-bi$

(2) $a+0i=a$，　$0+bi=bi$，　$1i=i$

(3)當虛部 $b=0$ 時，$a+0i=a$，相當於一個實數，也就是說，實數可視為虛部為 0 的複數

(4)當虛部 $b\neq0$ 時，稱 $a+bi$ 為虛數，例如 $1+2i$，$3i$ 等都是虛數，也是複數

註：實數是複數的一部分，我們把實數系擴張成一個較大的數系，稱為**複數系**

◎符號 i

例 1.1：以 i 表示下列各方程式的解：

(1) $x^2=-1$　　(2) $x^2=-2$　　(3) $x^2=-9$

Ex1.1：以 i 表示下列各方程式的解：

(1) $x^2=-3$　　(2) $x^2+4=0$　　(3) $x^2=-12$

◎複數的定義

例 1.2：求下列各複數的實部與虛部

(1) $z=1-2i$　　(2) $z=4$　　(3) $z=3i$

Ex1.2：求下列各複數的實部與虛部

(1) $z=\sqrt{2}+3i$　　(2) $z=-\sqrt{5}\,i$　　(3) $z=0$

例 1.3：求下列各式的值：

(1)求 i^1，i^2，…，i^7，i^8 的值　　(2)求 $i^1+i^2+\cdots+i^7+i^8$ 的值

Ex1.3：求下列各式的值：

(1) i^{50}　　(2) $i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}+i^{14}+i^{15}$

重點 2：複數的四則運算

1.複數的相等：當兩個複數的實部相等、虛部也相等時，稱這兩個複數相等。

即當 a，b，c，d 為實數時，$a+bi=c+di$ 的意思是 $a=c$ 且 $b=d$

註：當 a，b 為實數，若 $a+bi=0$，則 $a=b=0$

2.設 a，b，c，d 為實數，$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，則：

(1)加法：$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2)減法：$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3)乘法：$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad-bc)i$

3.複數的性質：

若 z_1，z_2，z_3 為三個任意的複數，則下列各性質成立

(1)交換律：$z_1+z_2=z_2+z_1$，　$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

(2)結合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$，　$z_1(z_2\,z_3)=(z_1\,z_2)z_3$

(3)分配律：$z_1(z_2+z_3)=z_1\,z_2+z_1\,z_3$

4.設 z 為複數，規定 $z^2=z\cdot z$，$z^3=z\cdot z\cdot z$，……　一般而言，設 n 為大於 1 的正整數，規定 $z^n=z^{n-1}z$

◎複數的相等

例 2.1：已知實數 a，b 滿足 $(a-2)+4i=1+2bi$，求 a，b 的值

Ex2.1：已知實數 a，b 滿足 $(a+b+4)+(a-2)i=0$，求 a，b 的值

◎複數的加法、減法與乘法

例 2.2：已知複數 $z_1=3+4i$，$z_2=5-3i$，求下列各式的值

(1) z_1+z_2　　(2) z_1-z_2　　(3) $z_1\cdot z_2$

Ex2.2：已知複數 $z_1=2+\sqrt{3}\,i$，$z_2=2-\sqrt{3}\,i$，求下列各式的值

(1) z_1+z_2　　(2) z_1-z_2　　(3) $z_1\cdot z_2$

重點 3：複數的除法運算

1.共軛複數：設複數 $z=a+bi$，a，b 為實數，則稱 $a-bi$ 為 $a+bi$ 的共軛複數，記作 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=a+bi$

2.共軛複數性質：設複數 z，w，則：

(1) $\overline{(\bar{z})}=z$

(2) $|\bar{z}|=|z|$，其中 $z=a+bi$，$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

(3) $(\bar{z})^n=\overline{z^n}$，其中 n 為整數

(4) ① $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$，　② $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$，　③ $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$，　④ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$，其中 $w\neq 0$

3.複數的除法：設 a，b，c，d 為實數，$z_1=a+bi$，$z_2=c+di\neq 0$，則：

除法：$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

註：作除法運算時，分子，分母同時乘上分母的共軛複數

◎複數的除法

例 3.1：將下列各複數表示成 $a+bi$ (其中 a，b 為實數)的形式

(1) $\frac{1}{3+4i}$　　(2) $\frac{2+i}{1-i}$

Ex3.1：將下列各複數表示成 $a+bi$ (其中 a，b 為實數)的形式

(1) $\dfrac{1+3i}{-1+3i}$　　(2) $\dfrac{2+i}{i}$

重點 4：二次方程式的根

1.意義：形如 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$)的方程式稱為二次方程式，當 a，b，c 皆為實數時，稱其為實係數二次方程式

2.公式解：利用配方法可以將 $ax^2+bx+c=0$ 得到 $(x+\dfrac{b}{2a})^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$，解得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

⇒① b^2-4ac 稱為判別式，記作 D

②在複數系中，判別式 D 可以是正數、負數或是零，則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 有意義

即實係數二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，利用公式解得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(1)當 $D=b^2-4ac>0$ 時，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有兩相異實根

(2)當 $D=b^2-4ac=0$ 時，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有兩相等實根(二重根)

(3)當 $D=b^2-4ac<0$ 時，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有兩共軛虛根(兩根互為共軛複數)

◎求解二次方程式

例 4.1：解方程式 $x^2-2x+5=0$

Ex4.1：解下列各方程式：(1) $x^2+x+1=0$　　(2) $2x^2+2x+1=0$

◎判別式性質

例 4.2：已知方程式 $x^2+kx+9=0$ 有兩實根，求實數 k 的範圍

Ex4.2：已知方程式 $x^2+3x-k=0$ 有兩共軛虛根，求實數 k 的範圍

重點 5：二次方程式的根與係數的關係

1.意義：實係數二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，利用公式解得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

令判別式 D$=b^2-4ac$，則 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$，即 $x=$或$\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

2.根與係數的關係：

設 α，β 為實係數二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，令兩根分別為 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$，$\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$，則：

(1)兩根的和 $\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\dfrac{b}{a}$

(2)兩根的積 $\alpha\beta=(\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a})(\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a})=\dfrac{c}{a}$

註：$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$

例 5.1：已知 α，β 為方程式 $2x^2+4x+5=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(3) $\alpha^3+\beta^3$

Ex5.1：已知 α，β 為方程式 $x^2-4x+7=0$ 的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$　　(3) $\alpha^3+\beta^3$

重點 6：n 次方程式的根

1.意義：當 $f(x)$為 n 次多項式時，稱 $f(x)=0$ 為 n 次多項式方程式，簡稱為 n 次方程式；當多項式的係數都為實數時，稱其為實係數 n 次方程式。

2.根或解：若有一個數 a 滿足 $f(a)=0$，就稱 a 是 $f(x)=0$ 的根或解。

註：有時候為了強調這個根 a 所在的數系，會將 a 稱為整數根、有理根、實根或複數根

3.代數基本定理：設 n 為正整數，任一**複係數** n 次方程式至少有一個**複數根**

即任何複係數 n 次方程式都恰有 n 個根(重根須重複計算其個數)

註：(1)設 n 為正整數時，任一**實係數** n 次方程式恰有 n 個**複數根**

(2)重複地使用代數基本定理與多項式的除法，可以證得 $f(x)=0$ 恰有 n 個根。

$\Rightarrow$可將 $f(x)$分解成 n 個一次式的乘積，即 $f(x)=a(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，其中 a 為 $f(x)$的首項係數，複數 a_1，a_2，…，a_n 為 $f(x)=0$ 的所有根

註：高斯(C.F.Gauss，1777~1855）德國數學家。古今三大數學家之一，被譽為數學王子。

◎n 次方程式的根

例 6.1：已知 1 為實係數方程式 $x^3-x^2-2x+a=0$ 的一個根

(1)求 a 的值　　　　(2)求所有的根

Ex6.1：已知-1 為實係數方程式 $x^3+x^2+3x+a=0$ 的一個根

(1)求 a 的值　　　　(2)求所有的根

例 6.2：解方程式$(x-1)(x+1)^2(x^2+x-3)=0$

Ex6.2：解實係數六次方程式$(x-5)(x^2+1)(x-1)^3=0$

重點 7：虛根成雙定理

1.定理：設 $f(x)$為實係數 n 次多項式(n 為大於 1 的整數)。若 $z=a+bi$ (其中 a，b 為實數且 $b\neq 0$)是方程式 $f(x)=0$ 的一個虛根，則它的共軛複數 $\bar{z}=a-bi$ 也是方程式 $f(x)=0$ 的一個虛根

註：有理係數方程式的無理根亦成對出現

2.性質：

(1)實係數多項式方程式的**虛根個數**必為**偶數**

(2)當 n 為奇數時，n 次多項式方程式只能有奇數個實根(一個、三個、五個、…)；即實係數**奇數**次方程式**至少有一實根**

◎虛根成對定理

例 7.1：已知 $1-3i$ 為實係數方程式 $x^4-3x^3+6x^2+ax+b=0$ 的一個根

(1)求 a 與 b 的值　(2)求所有的根

Ex7.1：已知 $2+i$ 為實係數方程式 $x^4-5x^3+8x^2-x-5=0$ 的一個根，求所有的根

例 7.2：已知 $a-i$ 與 $1+bi$ (其中 a 與 b 為實數，且 $b\neq 0$)為實係數三次方程式 $x^3+x^2+cx+d=0$ 的兩個根

(1)求 a 與 b 的值　(2)求 c 與 d 的值　(3)求所有的根

Ex7.2：已知 $a-i$ 與 $2-bi$ (其中 a 與 b 為實數，且 $b\neq 0$)為實係數三次方程式 $x^3-2x^2+9x+k=0$ 的兩個根，求所有的根

例 7.3：設 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式，選出所有正確的選項

(1)方程式 $f(x)=0$ 一定有實根　(2)方程式 $f(x)=0$ 一定有虛根

(3)方程式 $xf(x)=3$ 一定有實根　(4)若 $f(1+i)=0$，則 $f(2+2i)\neq 0$

Ex7.3：設 $f(x)=0$ 為實係數五次方程式，選出所有正確的選項

(1)方程式 $f(x)=0$ 一定有實根　(2)方程式 $f(x)=0$ 一定有虛根

(3)方程式 $f(x)=0$ 一定沒有實根　(4)若 $f(x)=4$ 一定有實根

重點 8：勘根定理

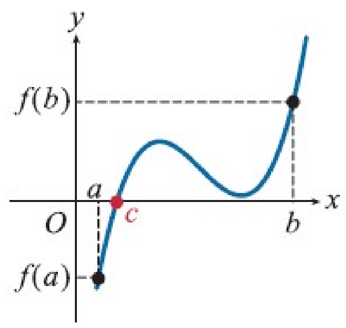
緣由：實係數 n 次方程式有 n 個根，且當 n 是奇數時，方程式至少有一個實根。

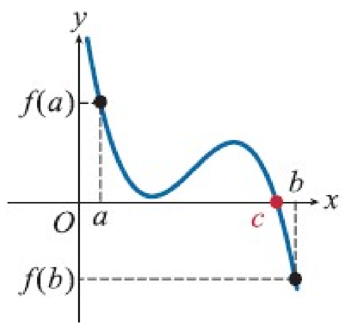
求 n 次方程式實根的精確值是很困難的，此時，可以求其**實根的範圍**。而**求實根範圍的方法**，稱為**勘根定理**

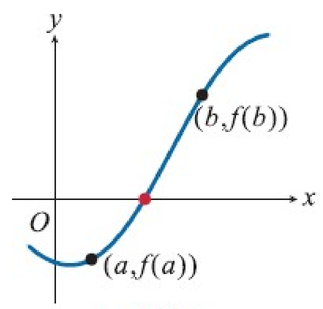
1.介值定理：設函數 $f(x)$ 在區間 $[a，b]$ 上連續，且 $f(a)\neq f(b)$。若 k 是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間（不含 $f(a)$，$f(b)$)的實數，則在 a 與 b 之間（不含 a，b)至少有一實數 c，使得 $f(c)=k$

2.勘根定理：設 $f(x)$ 為實係數多項式，且 a 與 b 是兩個相異實數。若 $f(a)f(b)<0$ (即 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號)，則方程式 $f(x)=0$ 在區間 $(a，b)$ 內至少有一個實根

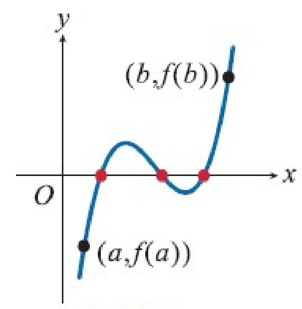
說明：函數 $f(x)$ 為實係數多項式(為連續函數)。若 $f(a)f(b)<0$，即 $f(a)$ 與 $f(b)$ **異號**，因此 0 介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間，則利用**介值定理**，可得在區間 $(a，b)$ 內至少有一實數 c，使得 $f(c)=0$，如下左二圖







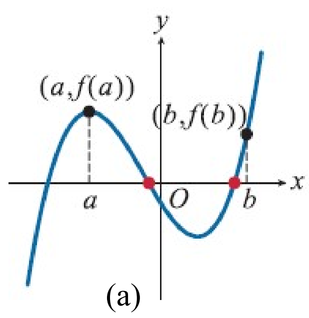
(a)一實根



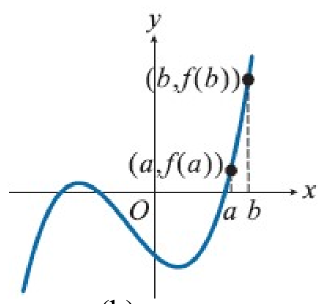
(b)三實根

註：(1)當 $f(x)$ 為實係數多項式且 $f(a)f(b)<0$ 時，勘根定理保證方程式 $f(x)=0$ 在區間 $(a，b)$ 內「至少」有一個實根，但並非「恰有」一實根，如上右二圖所示。即可能為一或三或……等奇數個實數根

(2)當 $f(x)$ 為實係數多項式且 $f(a)f(b)>0$，即 $f(a)$ 與 $f(b)$ **同號**時，方程式 $f(x)=0$ 在區間 $(a，b)$ 內可能有實根(如圖(a)所示)，也可能沒有實根(如圖(b)所示)



(a)



(b)

◎勘根定理

例 8.1：試問方程式 $x^3-8x+1=0$ 在哪些連續整數之間有實根？

Ex8.1：試問方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 在哪些連續整數之間有實根？

例 8.2：已知實係數多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 滿足 $f(0)<0$，$f(\sqrt{2})>0$，$f(\sqrt{5})<0$，$f(\sqrt{10})>0$，又方程式 $f(x)=0$ 的三根均為整數，求 a，b，c 的值

Ex8.2：已知實係數多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx-6$ 滿足 $f(-1)=0$ 與 $f(\sqrt{2})f(\sqrt{5})<0$，且方程式 $f(x)=0$ 的三根均為整數，求 a，b 的值

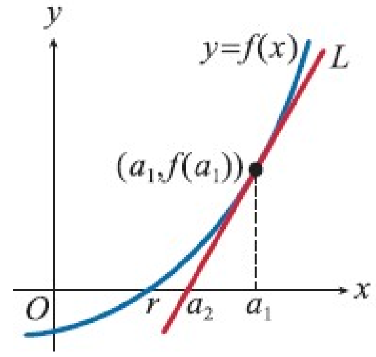
例 8.3：已知方程式 $x^3-6x^2-9x+k=0$ 有三個相異實根，求實數 k 的範圍

Ex8.3：求三次方程式 $x^3-6x^2-9x-4=0$ 的實根個數

重點 9：牛頓法

緣由：利用**勘根定理**可以求得**實根 r 的範圍**，而求得**實根 r 的近似值**之一個方法，就是**牛頓法**

◎牛頓法：如右圖為多項式函數 $f(x)$ 的部分圖形，其中圖形與 x 軸交點的 x 坐標 r 就是方程式 $f(x)=0$ 的一個實根



1.找一個接近實根 r 的初始值 a_1 開始(可以來自勘根定理)

2.設 L 是以點$(a_1, f(a_1))$為切點的切線。因為 L 的斜率為 $f'(a_1)$，

　利用點斜式，得方程式為 L：$y-f(a_1)=f'(a_1)(x-a_1)$

3.當 $f'(a_1)\neq 0$(切線 L 不是水平切線)時，切線與 x 軸交於點$\left(a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}, 0\right)$

　令 $a_2=a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}$ 成為實根 r 的**第二個近似值**

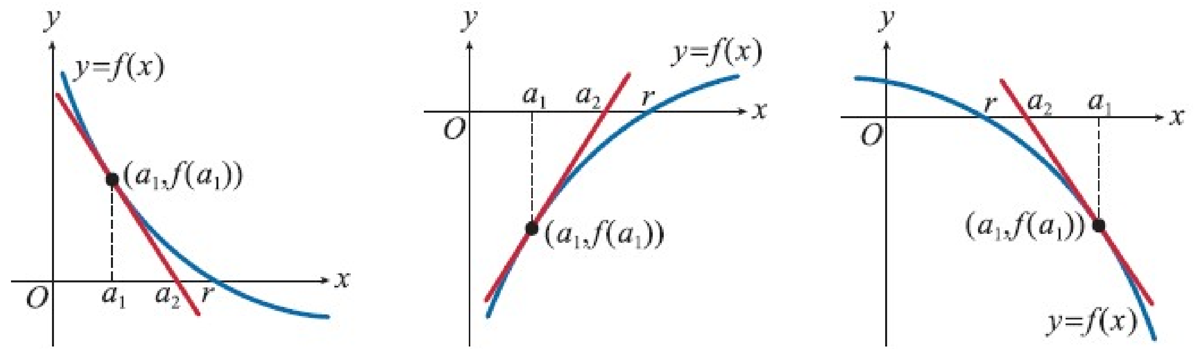
4.從 a_2 開始，經同樣的程序，當 $f'(a_2)\neq 0$ 時，可以得到實根 r 的**第三個近似值** $a_3=a_2-\dfrac{f(a_2)}{f'(a_2)}$

5.持續這樣的程序，當 $f'(a_k)\neq 0$ 時，可以得到實根 r 的第 $k+1$ 個近似值 $a_{k+1}=a_k-\dfrac{f(a_k)}{f'(a_k)}$

6.這一序列的近似值 a_1，a_2，a_3，…會愈來愈接近實根 r，這種求實根近似值的方法是由牛頓提出來的，稱為**牛頓法**

註：(1)當 $f(x)$ 為多項式函數，且 r 為 $f(x)=0$ 的一個實根時，只要適當選取足夠接近 r 的初始值 a_1，牛頓法的遞迴式所生成的數列會愈來愈接近實根 r

　(2)下列為三個比較常見的形狀，及其使用牛頓法一次的情形



◎牛頓法求實根的近似值

例 9.1：試以牛頓法求方程式 $x^3+4x-8=0$ 實根的近似值到小數點以下第四位 (使小數點以下四位與精確值相同)

Ex9.1：試以牛頓法求方程式 $x^3-2=0$ 實根的近似值到小數點以下第三位 (使小數點以下三位與精確值相同)