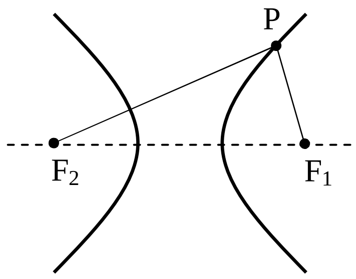
單元 7 雙曲線 (hyperbola)　三年____班　座號：____　姓名：

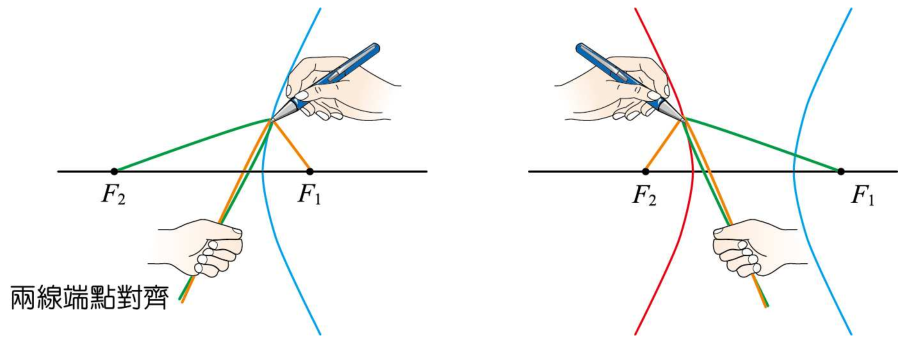
重點 1：雙曲線的基本概念

1.定義：如右圖，平面上，兩相異點 F_1，F_2，及一定長 $2a$ 滿足 $0<2a<\overline{F_1F_2}$，則：

所有滿足 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$ 的動點 P 所成之圖形 Γ，稱為「**雙曲線**」

其中 F_1，F_2 稱為雙曲線的「焦點(focus)」，如下左圖





2.圖形之判斷：

A.平面上，滿足 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$ 之 P 點軌跡：

(1)當 $0<2a<\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為雙曲線

(2)當 $2a=\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為二射線

(3)當 $2a>\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為無圖形(或空集合)

B.平面上，滿足 $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a$ 之 P 點軌跡：

(1)當 $0<2a<\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為雙曲線一支

(2)當 $2a=\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為一射線

(3)當 $2a>\overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為無圖形(或空集合)

在一張紙上畫出 F_1 及 F_2 兩點，再取兩條長度相差 $2a$ 的線，而且 $2a<\overline{F_1F_2}$，用釘子把長線的一端固定在點 F_2 上，短線的一端固定在點 F_1 上，如圖上藍色的曲線。

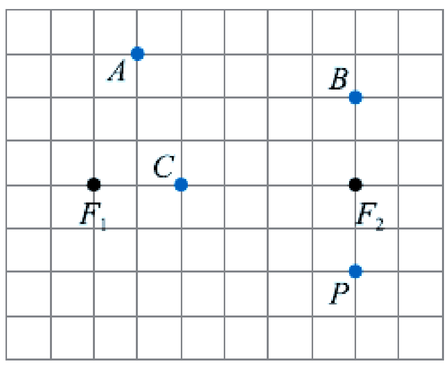
接下來，將長線的一端固定在點 F_1，短線的一端固定在點 F_2，可畫出圖上中紅色的曲線

3.雙曲線圖形特性：

雙曲線含有兩條非封閉的曲線，會左右對稱、亦會上下對稱，因此，雙曲線會以 F_1 與 F_2 的中點為對稱中心，簡稱中心

◎雙曲線的定義

例 1.1：右圖是每個方格邊長為 1 的方格紙。已知一雙曲線以 F_1，F_2 為焦點且通過 P 點，試問 A，B，C 哪個點也在此雙曲線上？



Ex1.1：已知一雙曲線以 $F_1(4，0)$，$F_2(-4，0)$為焦點且通過 P(2，0)，試問：

A(－4，6)，B(3，－3)，C(－1，0)哪個點也在此雙曲線上？

例 1.2：平面上二定點 F_1，F_2 與動點 P，且 $\overline{F_1F_2}=10$，試求下列各條件的點 P 之軌跡：

(1) $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=8$　　(2) $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=10$　　(3) $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=12$

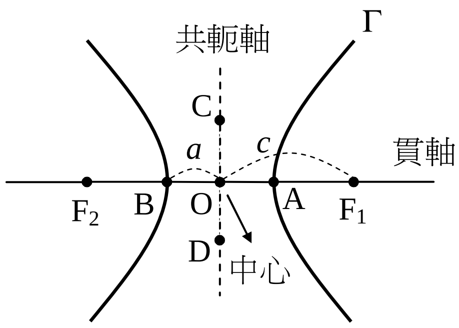
(4) $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=8$　　(5) $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=10$

重點 2：認識雙曲線的名詞 (以水平貫軸為例)

1.焦點：二定點 F_1 與 F_2 稱為焦點，且 $\overline{F_1F_2}=2c$

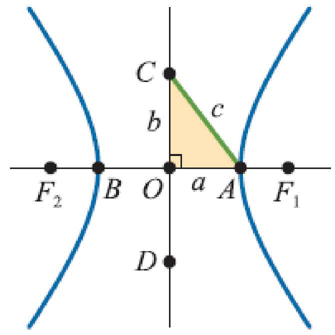
2.中心：兩焦點 F_1 與 F_2 所成線段的中點

3.貫軸：焦點所在之軸，貫軸長度 $\overline{AB}=2a$



4.共軛軸：通過中心點與貫軸垂直，共軛軸長度 $\overline{CD}=2b$

註：貫軸、共軛軸都是雙曲線的「對稱軸」



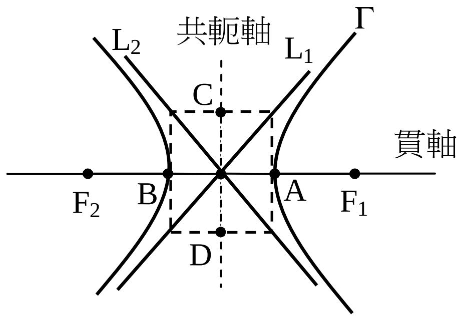
5.關係式：$c^2=a^2+b^2$　(c 值最大，$c>a>0$，$c>b>0$)

6.頂點：雙曲線與貫軸之交點，如圖 A，B 點

註：廣義的頂點包含貫軸上的頂點 A，B；共軛軸上的頂點 C，D

7.弦：雙曲線上任兩點之連線段 (有無限多條)

焦弦：通過焦點之弦 (有無限多條)



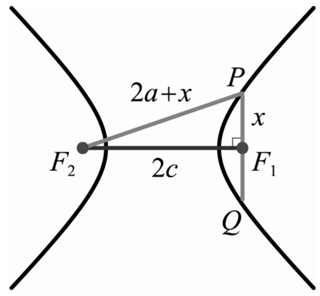
8.正焦弦：通過焦點與貫軸垂直的弦(有 2 條)，長度為 $\dfrac{2b^2}{a}$

註：設 $\overline{PQ}$ 為通過焦點 F_1 的正焦弦，令 $\overline{PF_1}=x$，如右圖

由雙曲線的定義可知 $\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a$，$\Rightarrow \overline{PF_2}=2a+x$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 是直角三角形，$\Rightarrow x^2+(2c)^2=(2a+x)^2$

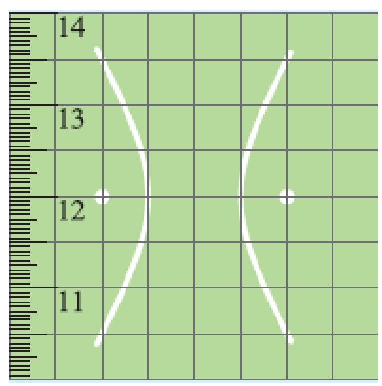
得 $x=\dfrac{c^2-a^2}{a}=\dfrac{b^2}{a}$　$(c^2=a^2+b^2)$，$\therefore \overline{PQ}=2x=\dfrac{2b^2}{a}$



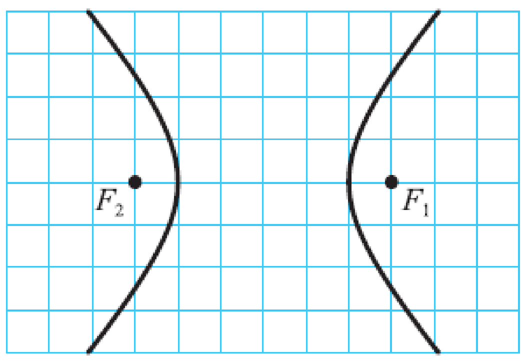
9.漸近線：在無窮遠處與雙曲線可以任意靠近但不相交的二直線，如 L_1，L_2

◎關係式

例 2.1：將市售的雙曲線板置於方格紙上，如右圖所示。已知每個方格的邊長為 1 單位，求該雙曲線的共軛軸長



Ex2.1：右圖是方格紙上的一個雙曲線，F_1，F_2 是雙曲線的兩焦點。已知每個方格的邊長為 1 單位，求該雙曲線的共軛軸長



重點 3：雙曲線之標準式 Ⅰ(水平貫軸)

1.意義：雙曲線之中心在原點(0，0)，兩焦點為 $F_1(c，0)$，$F_2(-c，0)$，貫軸長 $2a$，共軛軸長 $2b$，滿足 $c^2=a^2+b^2$，

得雙曲線方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，稱為**水平貫軸之雙曲線**

註：如右圖，設 $P(x,y)$ 是雙曲線上的任意一點，

由雙曲線的定義 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$，$\Rightarrow \overline{PF_1}-\overline{PF_2}=\pm 2a$，　$\therefore \overline{PF_1}=\overline{PF_2}\pm 2a$

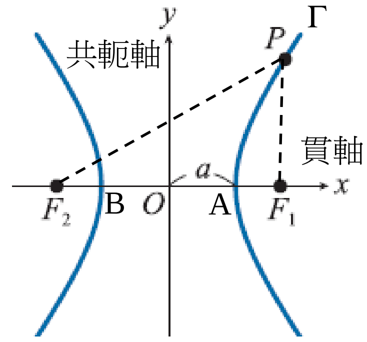
得 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$

兩邊平方，$x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$

$\Rightarrow -cx-a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，兩邊再平方，

$\Rightarrow c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$，得 $\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$

利用 $b^2=c^2-a^2$，$\Rightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，同除以 a^2b^2，得 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



2.性質：

(1)關係式 $\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$，$c>a>0$，$c>b>0$

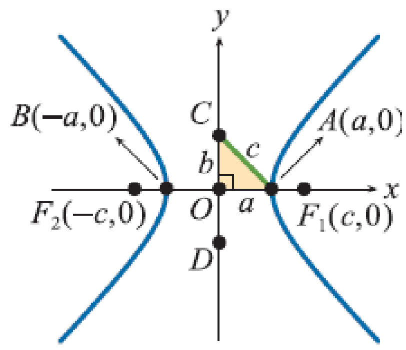
(2)雙曲線上距離中心最近的點為頂點 A，B

(3)設 $P(x，y)$是雙曲線上任一點，則 $x\geq a$ 或 $x\leq -a$

(4)貫軸與共軛軸互相垂直平分於中心

(5)正焦弦長＝$\dfrac{2b^2}{a}$

(6)雙曲線以貫軸、共軛軸為對稱軸



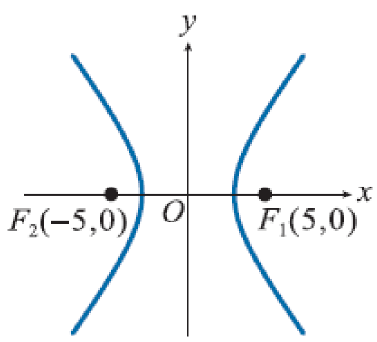
4.雙曲線平移：(見重點 6)

中心為原點的雙曲線 $\Gamma_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的每一點$(x_0，y_0)$，沿著向量$(h，k)$移動到點$(x_0+h，y_0+k)$，

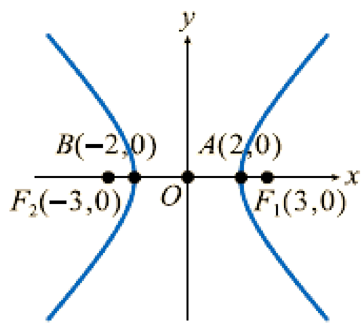
得中心為$(h，k)$的雙曲線 Γ_2，其方程式為：$\Gamma_2:\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

◎方程式

例 3.1：設雙曲線兩焦點在 $F_1(5，0)$與 $F_2(-5，0)$，貫軸長為 6，試求其方程式。

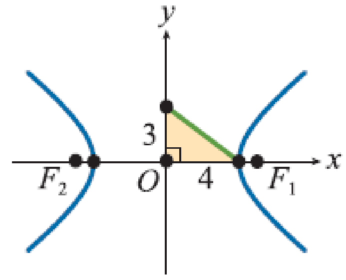


Ex3.1：設雙曲線兩頂點為 A(2，0)與 B(－2，0)，兩焦點為 $F_1(3，0)$與 $F_2(-3，0)$，試求其方程式



◎圖形名稱

例 3.2：求雙曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的頂點與焦點坐標



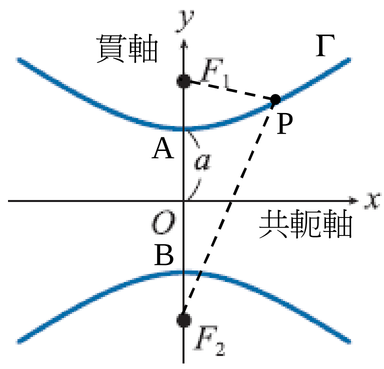
Ex3.2：試求雙曲線 $9x^2-25y^2=225$ 的頂點與焦點坐標

重點 4：雙曲線之標準式 II (鉛直貫軸)

1.意義：雙曲線之中心在原點，兩焦點為 $F_1(0，c)$，$F_2(0，-c)$，貫軸長 $2a$，

共軛軸長 $2b$，滿足 $c^2=a^2+b^2$，得雙曲線方程式為 $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，

稱為**鉛直貫軸之雙曲線**



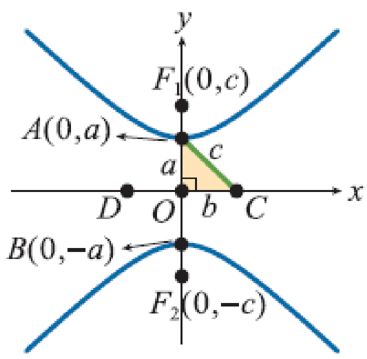
2.性質：如右圖，同水平貫軸雙曲線

3.雙曲線平移：

設雙曲線 Γ：$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，

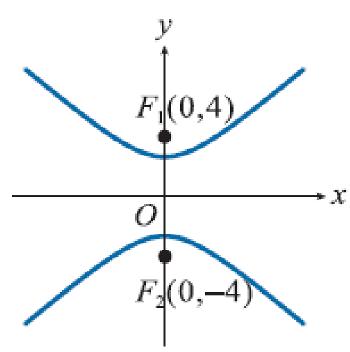
中心由原點 $O(0，0)$平移至點$(h，k)$，

得雙曲線方程式為 $-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

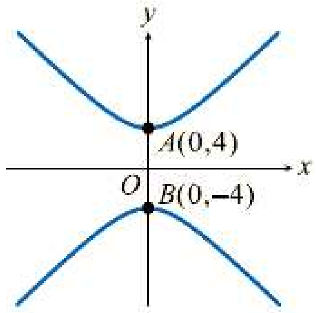


◎方程式

例 4.1：設雙曲線兩焦點在 $F_1(0，4)$與 $F_2(0，-4)$，共軛軸長為 4，試求其方程式



Ex4.1：設雙曲線兩頂點在 A(0，4)與 B(0，－4)，共軛軸長為 8，試求其方程式。



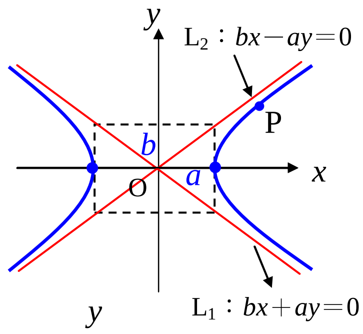
◎作圖，求各名稱

例 4.2：求雙曲線$-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$的頂點與焦點坐標

Ex4.2 求雙曲線$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$的頂點與焦點坐標

重點 5：雙曲線之漸近線

1.定義：若 P 點沿著雙曲線向遠處移動逐漸遠離中心時，如果 P 點至直線 L 的距離越來越近，而趨近於 0，稱直線 L 為雙曲線的一條**漸近線**。



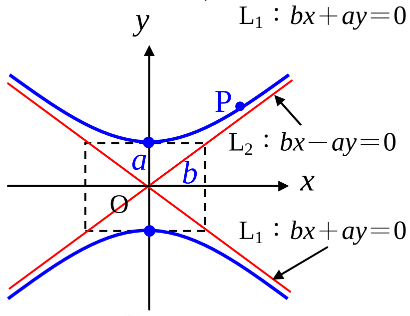
2.漸近線求法：

(1)若 Γ 為水平貫軸雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 時，則令 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，得 $(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=0$

得知漸近線為 L_1：$bx-ay=0$ 與 L_2：$bx+ay=0$

(2)平移後水平貫軸雙曲線 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 的漸近線方程式為 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$

即 $b(x-h)-a(y-k)=0$ 與 $b(x-h)+a(y-k)=0$



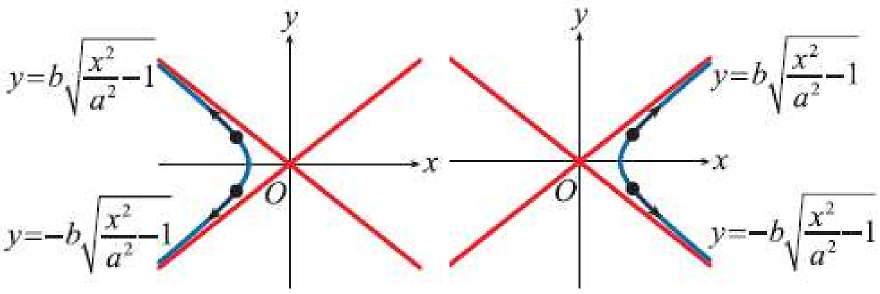
(3)若 Γ 為鉛直貫軸雙曲線 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 時，則令 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$，得 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$

得知漸近線為 $bx-ay=0$ 與 $bx+ay=0$

(4)平移後鉛直貫軸雙曲線 $-\frac{(x-k)^2}{b^2}+\frac{(y-h)^2}{a^2}=1$，

其漸近線方程式為 $-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$，

即 $b(y-k)-a(x-h)=0$ 與 $b(y-k)+a(x-h)=0$



3.漸近線性質：

(1)雙曲線的任一漸近線必不與雙曲線相交

(2)兩條漸近線必相交於中心，即以原點為中心，貫軸長 $2a$ 和共軛軸長 $2b$ 張出的矩形的對角線

(3)雙曲線的兩漸近線的分角線必互相垂直，其中一條為貫軸，另一條為共軛軸

(4)一般雙曲線的兩漸近線不一定互相垂直；而等軸雙曲線的兩漸近線必互相垂直；
反之，兩漸近線必互相垂直的雙曲線為等軸雙曲線

(5)雙曲線上一點 P 到兩條漸近線 L_1，L_2 的距離分別為 d_1 與 d_2，則 $d_1\cdot d_2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 是一個常數

註：設 $P(x_0,y_0)$ 為雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點，P 到直線 $L_1:bx-ay=0$ 與 $L_2:bx+ay=0$ 的距離分別為 d_1 與 d_2

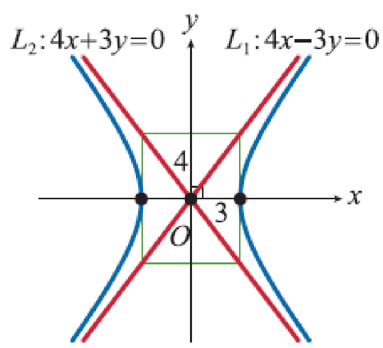
利用點到直線的距離公式，得 $d_1=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$d_2=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

且 $P(x_0,y_0)$ 在雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，$\therefore \frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$

$$d_1\cdot d_2=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$ 是一個常數

◎求漸近線方程式

例 5.1：求雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的兩條漸近線方程式



Ex5.1：試求雙曲線$-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$的兩條漸近線方程式。

◎已知雙曲線的漸近線方程式與其中一個焦點

例 5.2：求漸近線方程式為 $4x-3y=0$ 與 $4x+3y=0$，且其中一個焦點為(0，5)的雙曲線方程式

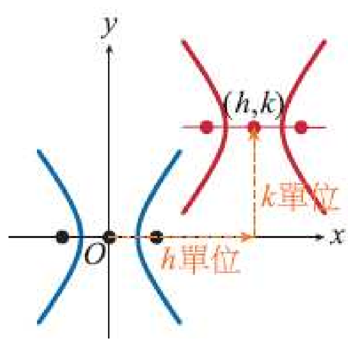
Ex5.2：求漸近線方程式為 $3x-4y=0$ 與 $3x+4y=0$，且通過點為(8，3)的雙曲線方程式

重點 6：雙曲線平移

1.雙曲線平移：

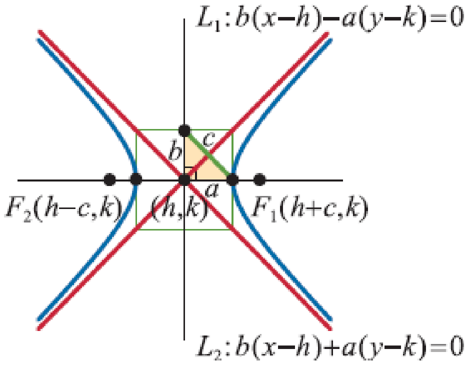
中心為原點的雙曲線$\Gamma_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上的每一點($x_0$，$y_0$)，沿著向量($h$，$k$)移動到

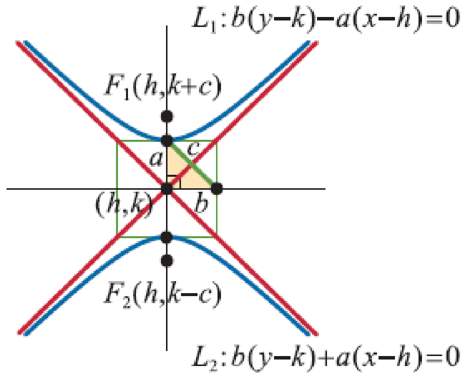
點(x_0+h，y_0+k)，得中心為(h，k)的雙曲線Γ_2，其方程式為$\Gamma_2:\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$



2.雙曲線平移的標準式：

(1)中心為(h，k)的水平貫軸雙曲線Γ：$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，如下左圖

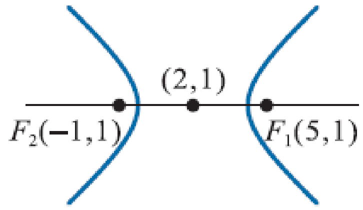




(2)中心為(h，k)的鉛直貫軸雙曲線Γ：$-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$，如上右圖

◎水平貫軸雙曲線平移方程式

例 6.1：試求兩焦點為 $F_1(5，1)$，$F_2(-1，1)$，貫軸長為 $2\sqrt{5}$ 的雙曲線方程式



Ex6.1：已知一雙曲線的兩焦點為$(-4，2)$，$(2，2)$，貫軸長為 4，試求此雙曲線的方程式

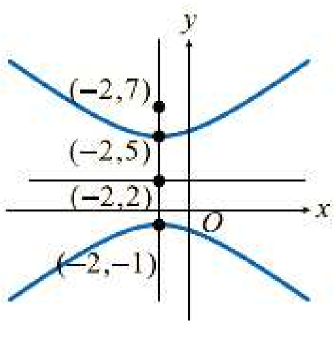
◎平移圖形名稱

例 6.2：試求雙曲線 $4x^2-y^2-8x-2y-1=0$ 的頂點、焦點坐標與漸近線方程式

Ex6.2：試作雙曲線 $x^2-2y^2+4x+8y-8=0$ 的圖形，並求其中心、焦點、頂點坐標與漸近線方程式

◎鉛直貫軸平移方程式

例 6.3：求兩頂點為 $A(-2，-1)$與 $B(-2，5)$，一焦點為 $F(-2，7)$的雙曲線方程式



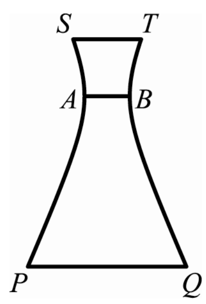
Ex6.3：已知一雙曲線的兩焦點為 $F_1(1，7)$，$F_2(1，-3)$，貫軸長為 8，試求此雙曲線的方程式

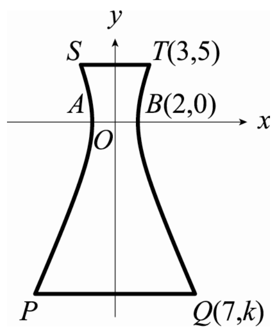
◎平移作圖，求各名稱

例 6.4：試求雙曲線 $4x^2-9y^2-8x+36y+4=0$ 的頂點、焦點坐標與漸近線方程式

Ex6.4：試求雙曲線 $9x^2-16y^2+18x+32y+137=0$ 的頂點、焦點坐標與漸近線方程式。

例 6.5：右圖是某發電廠的冷卻塔，其側面的截面圖為雙曲線，其中頸部 $\overline{AB}$ 剛好是雙曲線的貫軸。且與 $\overline{ST}$，$\overline{PQ}$ 互相平行，已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{ST}=6$，$\overline{PQ}=14$，且 $\overline{AB}$ 與 $\overline{ST}$ 相距 5，試求 $\overline{AB}$ 與 $\overline{PQ}$ 的距離





Ex6.5：在海面上由聯絡網發現一艘船的位置在雙曲線 $x^2-y^2=1$ 與 $y^2-\dfrac{x^2}{2}=1$ 的交點上。已知該船位於第一象限，試求該船位置的坐標