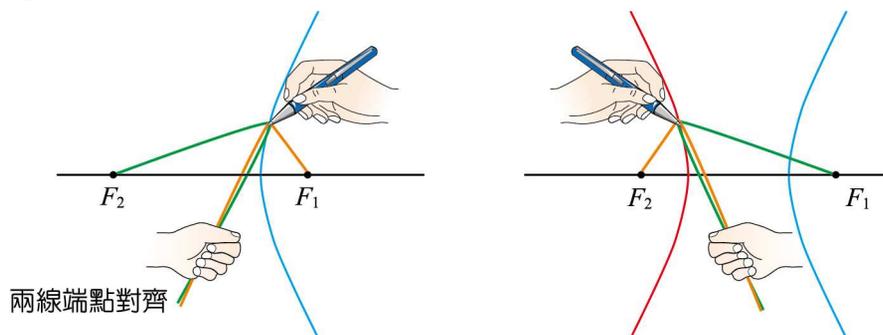
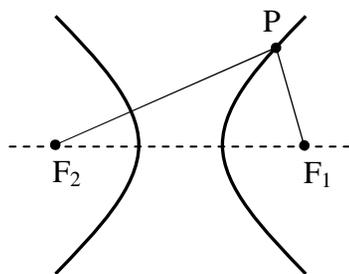


重點 1：雙曲線的基本概念

1. 定義：如右圖，平面上，兩相異點 F_1, F_2 ，及一定長 $2a$ 滿足 $0 < 2a < \overline{F_1F_2}$ ，則：

所有滿足 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$ 的動點 P 所成之圖形 Γ ，稱為「雙曲線」

其中 F_1, F_2 稱為雙曲線的「焦點(focus)」，如下左圖



2. 圖形之判斷：

A. 平面上，滿足 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$ 之 P 點軌跡：

- (1) 當 $0 < 2a < \overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為雙曲線
- (2) 當 $2a = \overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為二射線
- (3) 當 $2a > \overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為無圖形(或空集合)

B. 平面上，滿足 $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$ 之 P 點軌跡：

- (1) 當 $0 < 2a < \overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為雙曲線一支
- (2) 當 $2a = \overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為一射線
- (3) 當 $2a > \overline{F_1F_2}$ 時，軌跡為無圖形(或空集合)

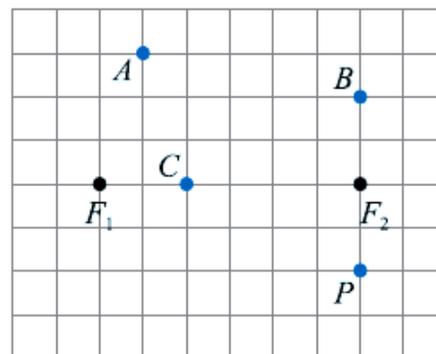
在一張紙上畫出 F_1 及 F_2 兩點，再取兩條長度相差 $2a$ 的線，而且 $2a < \overline{F_1F_2}$ ，用釘子把長線的一端固定在點 F_2 上，短線的一端固定在點 F_1 上，如圖上藍色的曲線。

接下來，將長線的一端固定在點 F_1 ，短線的一端固定在點 F_2 ，可畫出圖上中紅色的曲線

3. 雙曲線圖形特性：

雙曲線含有兩條非封閉的曲線，會左右對稱、亦會上下對稱，因此，雙曲線會以 F_1 與 F_2 的中點為對稱中心，簡稱中心

例 1.1：右圖是每個方格邊長為 1 的方格紙。已知一雙曲線以 F_1, F_2 為焦點且通過 P 點，試問 A, B, C 哪個點也在此雙曲線上？



例 1.2：平面上二定點 F_1, F_2 與動點 P ，且 $\overline{F_1F_2} = 10$ ，試求下列各條件的點 P 之軌跡：

- (1) $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 8$ (2) $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 10$ (3) $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 12$
 (4) $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 8$ (5) $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 10$

重點 2：認識雙曲線的名詞 (以水平貫軸為例)

1. 焦點：二定點 F_1 與 F_2 稱為焦點，且 $\overline{F_1F_2} = 2c$

2. 中心：兩焦點 F_1 與 F_2 所成線段的中點

3. 貫軸：焦點所在之軸，貫軸長度 $\overline{AB} = 2a$

4. 共軛軸：通過中心點與貫軸垂直，共軛軸長度 $\overline{CD} = 2b$

註：貫軸、共軛軸都是雙曲線的「對稱軸」

5. 關係式： $c^2 = a^2 + b^2$ (c 值最大， $c > a > 0, c > b > 0$)

6. 頂點：雙曲線與貫軸之交點，如圖 A, B 點

註：廣義的頂點包含貫軸上的頂點 A, B ；共軛軸上的頂點 C, D

7. 弦：雙曲線上任兩點之連線段 (有無限多條)

焦弦：通過焦點之弦 (有無限多條)

8. 正焦弦：通過焦點與貫軸垂直的弦 (有 2 條)，長度為 $\frac{2b^2}{a}$

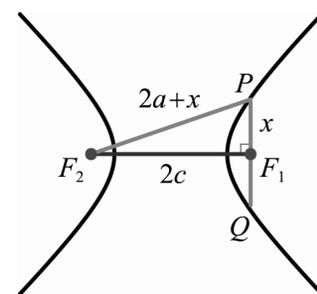
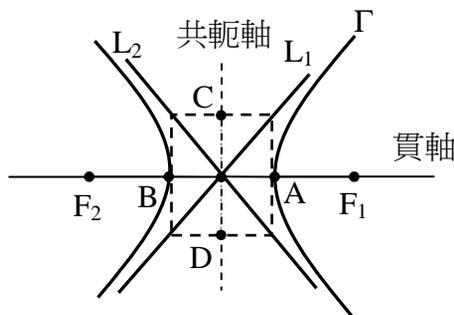
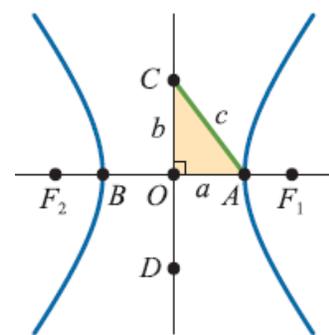
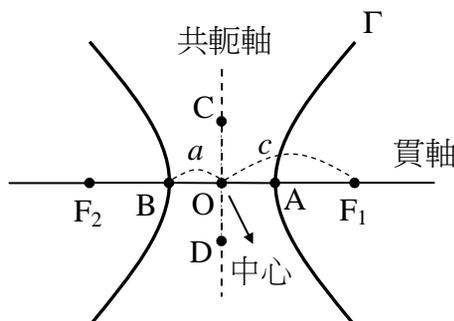
註：設 \overline{PQ} 為通過焦點 F_1 的正焦弦，令 $\overline{PF_1} = x$ ，如右圖

由雙曲線的定義可知 $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$ ， $\Rightarrow \overline{PF_2} = 2a + x$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 是直角三角形， $\Rightarrow x^2 + (2c)^2 = (2a + x)^2$

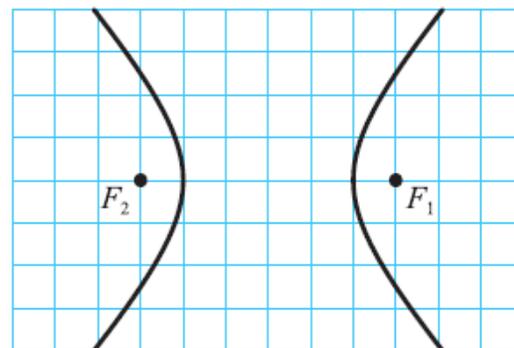
得 $x = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$ ($c^2 = a^2 + b^2$)， $\therefore \overline{PQ} = 2x = \frac{2b^2}{a}$

9. 漸近線：在無窮遠處與雙曲線可以任意靠近但不相交的二直線，如 L_1, L_2



例 2.1：右圖是方格紙上的一個雙曲線， F_1, F_2 是雙曲線的兩焦點。

已知每個方格的邊長為 1 單位，求該雙曲線的共軛軸長



重點 3：雙曲線之標準式 I (水平貫軸)

1. 意義：雙曲線之中心在原點 $(0, 0)$ ，兩焦點為 $F_1(c, 0)$ ， $F_2(-c, 0)$ ，貫軸長 $2a$ ，共軛軸長 $2b$ ，滿足 $c^2 = a^2 + b^2$ ，

得雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，稱為水平貫軸之雙曲線

註：如右圖，設 $P(x, y)$ 是雙曲線上的任意一點，

由雙曲線的定義 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$ ， $\Rightarrow \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$ ， $\therefore \overline{PF_1} = \overline{PF_2} \pm 2a$

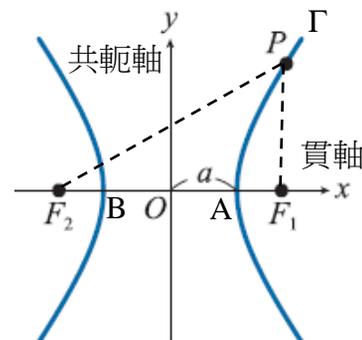
得 $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a$

兩邊平方， $x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2$

$\Rightarrow -cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ ，兩邊再平方，

$\Rightarrow c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$ ，得 $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

利用 $b^2 = c^2 - a^2$ ， $\Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ，同除以 a^2b^2 ，得 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



2. 性質：

(1) 關係式 $a^2 + b^2 = c^2$ ， $c > a > 0$ ， $c > b > 0$

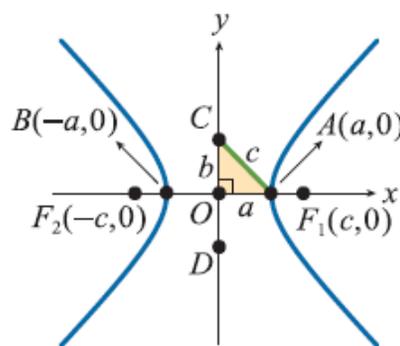
(2) 雙曲線上距離中心最近的點為頂點 A，B

(3) 設 $P(x, y)$ 是雙曲線上任一點，則 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$

(4) 貫軸與共軛軸互相垂直平分於中心

(5) 正焦弦長 = $\frac{2b^2}{a}$

(6) 雙曲線以貫軸、共軛軸為對稱軸



4. 雙曲線平移：

中心為原點的雙曲線 $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的每一點 (x_0, y_0) ，沿著向量 (h, k) 移動到點 $(x_0 + h, y_0 + k)$ ，

得中心為 (h, k) 的雙曲線 Γ_2 ，其方程式為： $\Gamma_2: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

例 3.1：設雙曲線兩焦點在 $F_1(5, 0)$ 與 $F_2(-5, 0)$ ，貫軸長為 6，試求其方程式

例 3.2：求雙曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的頂點與焦點坐標

重點 4：雙曲線之標準式 II (鉛直貫軸)

1. 意義：雙曲線之中心在原點，兩焦點為 $F_1(0, c)$ ， $F_2(0, -c)$ ，貫軸長 $2a$ ，

共軛軸長 $2b$ ，滿足 $c^2 = a^2 + b^2$ ，得雙曲線方程式為 $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ，

稱為**鉛直貫軸之雙曲線**

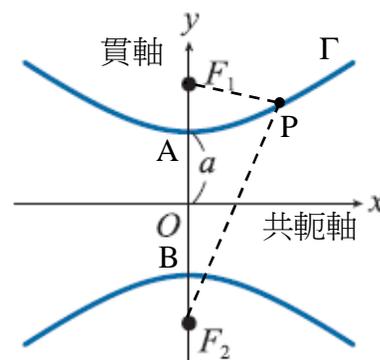
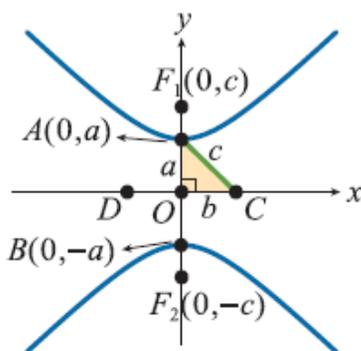
2. 性質：如右圖，同水平貫軸雙曲線

3. 雙曲線平移：

設雙曲線 Γ ： $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ，

中心由原點 $O(0, 0)$ 平移至點 (h, k) ，

得雙曲線方程式為 $-\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$



例 4.1：設雙曲線兩焦點在 $F_1(0, 4)$ 與 $F_2(0, -4)$ ，共軛軸長為 4，試求其方程式

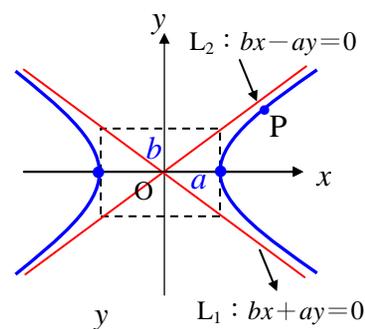
例 4.2：求雙曲線 $-\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的頂點與焦點坐標

重點 5：雙曲線之漸近線

1. 定義：若 P 點沿著雙曲線向遠處移動逐漸遠離中心時，如果 P 點至直線 L 的距離越來越近，而趨近於 0，稱直線 L 為雙曲線的一條**漸近線**。

2. 漸近線求法：

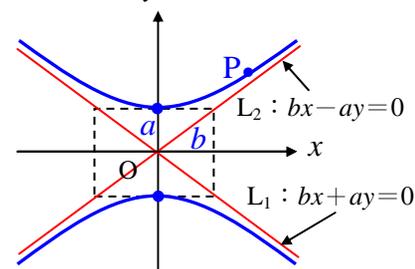
(1) 若 Γ 為水平貫軸雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 時，則令 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ，得 $(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 0$
 得知漸近線為 $L_1: bx - ay = 0$ 與 $L_2: bx + ay = 0$



(2) 平移後水平貫軸雙曲線 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 的漸近線方程式為 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$

即 $b(x-h) - a(y-k) = 0$ 與 $b(x-h) + a(y-k) = 0$

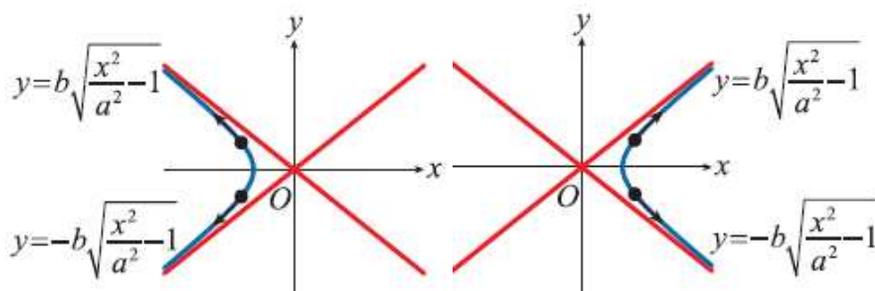
(3) 若 Γ 為鉛直貫軸雙曲線 $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 時，則令 $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ ，得 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$
 得知漸近線為 $bx - ay = 0$ 與 $bx + ay = 0$



(4) 平移後鉛直貫軸雙曲線 $-\frac{(x-k)^2}{b^2} + \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1$ ，

其漸近線方程式為 $-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$ ，

即 $b(y-k) - a(x-h) = 0$ 與 $b(y-k) + a(x-h) = 0$



3. 漸近線性質：

- (1) 雙曲線的任一漸近線必不與雙曲線相交
- (2) 兩條漸近線必相交於中心，即以原點為中心，貫軸長 $2a$ 和共軛軸長 $2b$ 張出的矩形的對角線
- (3) 雙曲線的兩漸近線的分角線必互相垂直，其中一條為貫軸，另一條為共軛軸
- (4) 一般雙曲線的兩漸近線不一定互相垂直；而等軸雙曲線的兩漸近線必互相垂直；
 反之，兩漸近線必互相垂直的雙曲線為等軸雙曲線

例 5.1：求雙曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的兩條漸近線方程式

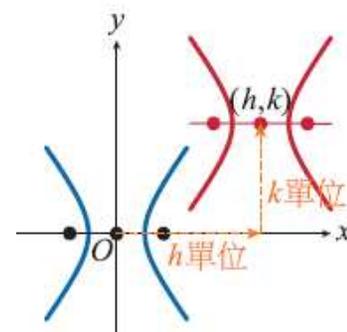
Ex5.2：求漸近線方程式為 $3x - 4y = 0$ 與 $3x + 4y = 0$ ，且通過點為 $(8, 3)$ 的雙曲線方程式

重點 6：雙曲線平移

1. 雙曲線平移：

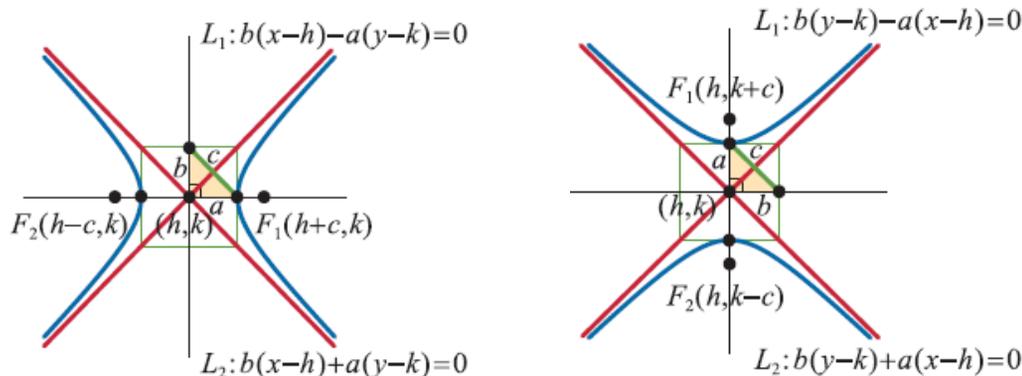
中心為原點的雙曲線 $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的每一點 (x_0, y_0) ，沿著向量 (h, k) 移動到

點 $(x_0 + h, y_0 + k)$ ，得中心為 (h, k) 的雙曲線 Γ_2 ，其方程式為 $\Gamma_2: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



2. 雙曲線平移的標準式：

(1) 中心為 (h, k) 的水平貫軸雙曲線 $\Gamma: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ，如下左圖



(2) 中心為 (h, k) 的鉛直貫軸雙曲線 $\Gamma: -\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ，如上右圖

例 6.1：試求兩焦點為 $F_1(5, 1)$ ， $F_2(-1, 1)$ ，貫軸長為 $2\sqrt{5}$ 的雙曲線方程式

例 6.2：試求雙曲線 $4x^2 - y^2 - 8x - 2y - 1 = 0$ 的頂點、焦點坐標與漸近線方程式

例 6.3：求兩頂點為 $A(-2, -1)$ 與 $B(-2, 5)$ ，一焦點為 $F(-2, 7)$ 的雙曲線方程式

例 6.4：試求雙曲線 $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ 的頂點、焦點坐標與漸近線方程式