單元 6　積分的應用　　三年___班 座號：____　姓名：

重點 1：兩條曲線間的面積

1.面積公式：設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為區間 $[a，b]$ 上的兩個連續函數且滿足 $f(x)\geq g(x)$。

令 R 表示 $f(x)$，$g(x)$ 的圖形與 $x=a$，$x=b$ 所圍成的區域面積為 $\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

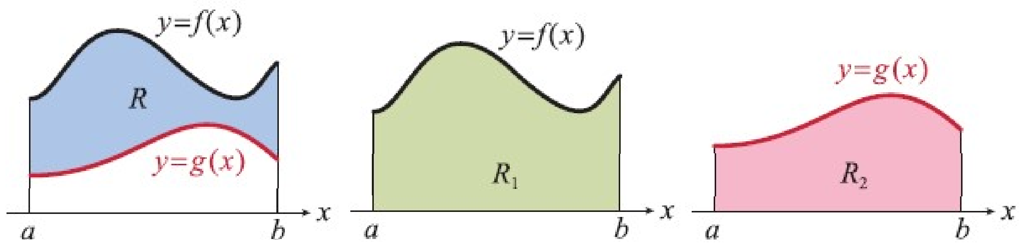
2.公式說明：

(1)當區域 R 都在 x 軸的上方時，如右圖

R 的面積＝(R_1 的面積)－(R_2 的面積)

$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

$$=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$



(2)當區域 R 不全在 x 軸的上方時：

此時可以適當地選取實數 c，使得 $f(x)+c$ 與 $g(x)+c$ 的圖形都在 x 軸之上方，如下圖

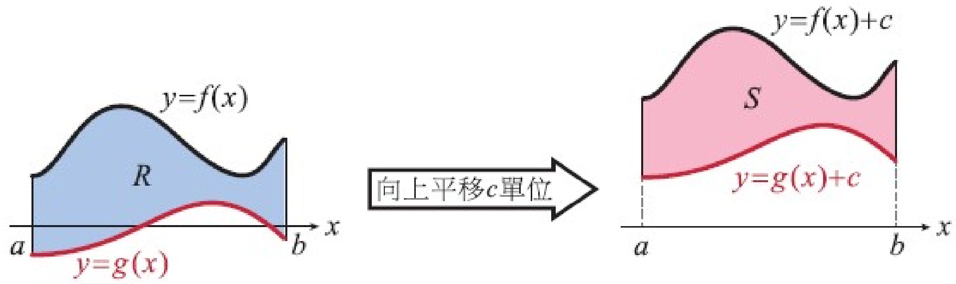
因為圖形平移後面積不會改變，所以

R 的面積＝S 的面積

$$=\int_a^b (f(x)+c)dx-\int_a^b (g(x)+c)dx$$

$$=\int_a^b [(f(x)+c)-(g(x)-c)]dx$$

$$=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$



註：(1)若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形在區間 $[a，b]$ 之間沒有交點

則 $f(x)$，$g(x)$ 的圖形與 $x=a$，$x=b$ 所圍成的區域面積為 $\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$

(2)若無法確定 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形在區間 $[a，b]$ 之間的相交情形

則 $f(x)$，$g(x)$ 的圖形與 $x=a$，$x=b$ 所圍成的區域面積為 $\left|\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right|$

3.廣義曲線間面積之計算：

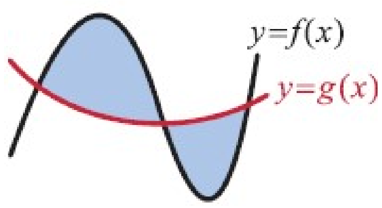
將兩函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形所圍成的所有封閉區域統稱為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形所圍成的區域

如圖中的鋪色區域就是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形所圍成的區域，面積計算步驟如下：

Step1：先求出兩曲線的所有交點；

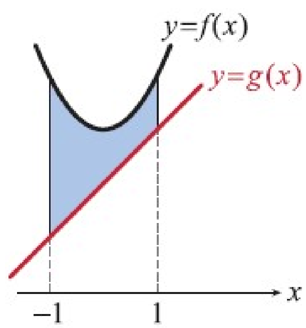
Step2：再做分段積分，每段以(上函數減下函數)作各封閉區域的面積積分計算

Step3：計算它們的總和就可求得兩函數圖形所圍成的區域面積

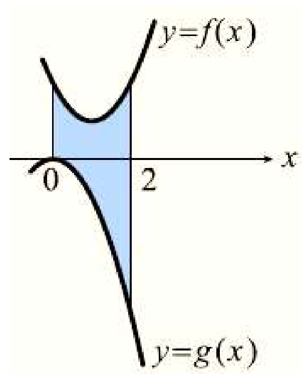


◎求曲線間的面積

例 1.1：求兩函數 $f(x)=x^2+3$，$g(x)=x+2$ 的圖形與 $x=-1$，$x=1$ 所圍成的區域面積

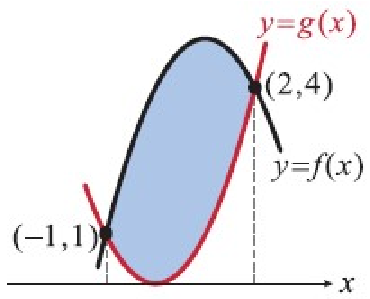


Ex1.1：求兩函數 $f(x)=x^2-2x+2$，$g(x)=-x^2$ 的圖形與 $x=0$，$x=2$ 所圍成的區域面積

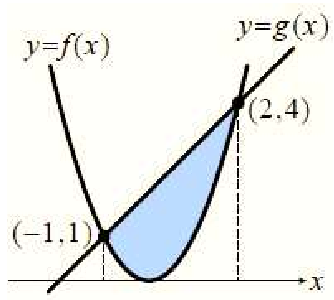


◎廣義曲線間面積之計算

例 1.2：求兩函數 $f(x)=-x^2+2x+4$ 與 $g(x)=x^2$ 的圖形所圍成的區域面積

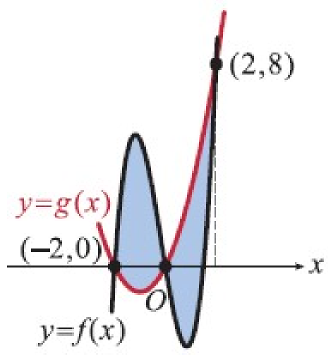


Ex1.2：求兩函數 $f(x)=x^2$ 與 $g(x)=x+2$ 的圖形所圍成的區域面積

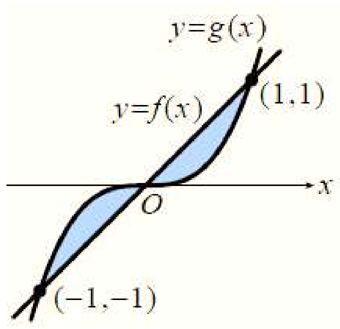


◎所圍成的封閉區域不只一塊

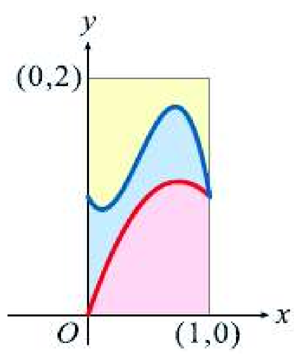
例 1.3：求兩函數 $f(x)=2x^3+x^2-6x$ 與 $g(x)=x^2+2x$ 的圖形所圍成的區域面積



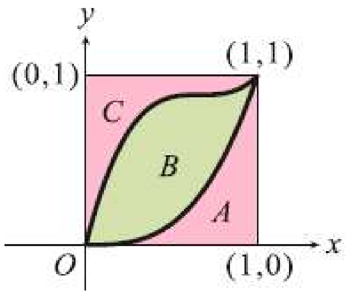
Ex1.3：求兩函數 $f(x)=x$ 與 $g(x)=x^3$ 的圖形所圍成的區域面積



例 1.4：學校計畫在一面寬 1 公尺、長 2 公尺的矩形牆壁上油漆，並事先在坐標平面上設計其草圖如右。
已知紅、藍曲線分別是用函數 $f(x)=-2x^2+3x$ 與 $g(x)=-8x^3+10x^2-2x+1$ 在區間[0，1]上的圖形描繪而成，求此草圖中的紅、藍、綠三塊區域之面積比



Ex1.4：工廠計畫推出以樹葉為主題的瓷磚，其設計草圖如右。已知葉子 B 的上、下緣分別是用函數 $f(x)=3x^3-6x^2+4x$ 與 $g(x)=x^3$ 在區間[0，1]上的圖形描繪而成，求 A，B，C 三塊區域的面積比

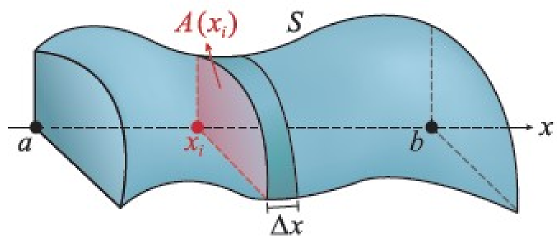


重點 2：立體的體積公式

1.立體的體積公式：

如右圖，設立體 S 位於兩平行平面 $x=a$ 與 $x=b$ $(a<b)$之間。

若通過點$(x，0，0)$且垂直 x 軸的平面與 S 所截出截面(圖中的淡紅色區域)的面積為 $A(x)$，且 $A(x)$為連續函數，則 S 的體積為 $\int_a^b A(x)dx$



2.說明：利用定積分方式來求 S 的體積

(1)分割：將區間$[a，b]$平分成 n 等分，分割點為 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，並分別過這些等分點作垂直 x 軸的平面，得有 $n+1$ 個平面將 S 分割成 n 個厚度均為 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ 的薄片，則這些薄片的體積總和就是 S 的體積

(2)逼近：在區間$[x_{i-1}，x_i]$ $(i=1，2，\cdots，n)$中任取一點 t_i，則以高為 Δx，底面積為 $A(t_i)$的柱體體積為 $A(t_i)\Delta x$ 作為該區間薄片體積的近似值。

依照這樣的方式，n 個區間共產生 n 個柱體，且這 n 個柱體的體積總和為 $\sum_{i=1}^{n}A(t_i)\Delta x\approx$ S 的體積

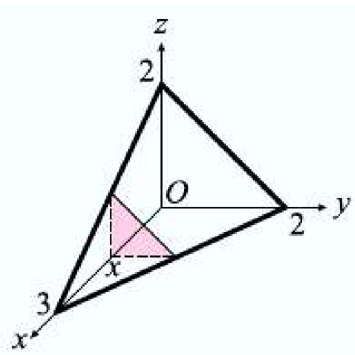
(3)求極限：根據定積分的定義，因為 $A(x)$為連續函數，所以 S 的體積等於 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(t_i)\Delta x=\int_a^b A(x)dx$

◎立體的體積

例 2.1：在空間中，設 S 為平面 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1$ 與三個坐標平面圍成的錐體，如圖所示

(1)已知通過點$(x，0，0)$ 且垂直 x 軸的平面與 S 所截出的圖形為等腰直角三角形，其面積為 $A(x)$，求 $A(x)$

(2)求 S 的體積



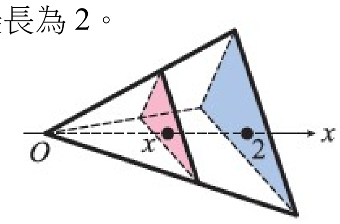
Ex2.1：如圖，在空間中，x 軸從藍色正三角形的重心$(2，0，0)$垂直穿過，且藍色正三角形的邊長為 2。

設 S 為藍色正三角形與原點 O 所構成的三角錐

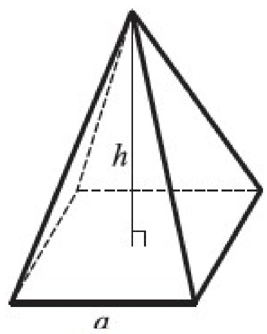
(1)已知通過點$(x，0，0)$且垂直 x 軸的平面與 S 所截出的圖形為正三角形，

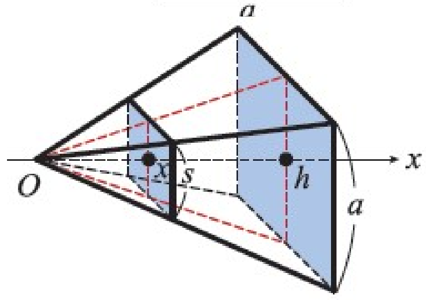
其面積為 $A(x)$，求 $A(x)$

(2)求 S 的體積



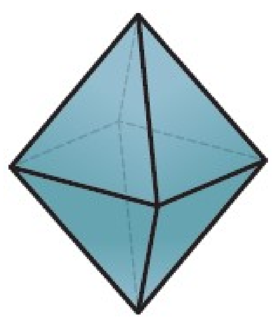
例 2.2：如右圖，利用立體的體積公式，計算底面為邊長 a 的正方形、高為 h 的直四角錐體

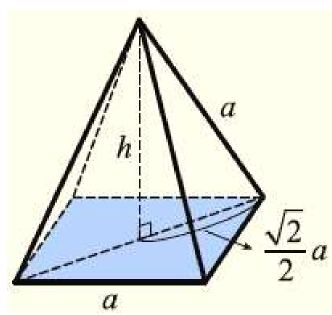




Ex2.2：當直四角錐體的 8 個邊都等長時，稱其為正四角錐體。右圖是由兩個邊長為 a 的正四角錐體組成的八面體，

求此八面體的體積

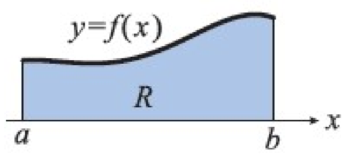


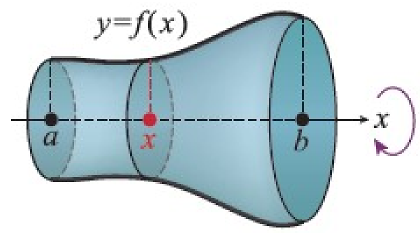


重點 3：旋轉體的體積公式

1.旋轉體的體積公式：

設函數 $f(x)$是區間$[a，b]$上的非負連續函數，將 $f(x)$的圖形與 x 軸，$x=a$ 與 $x=b$ $(a<b)$所圍成的區域繞 x 軸所得的旋轉體體積為 $\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$



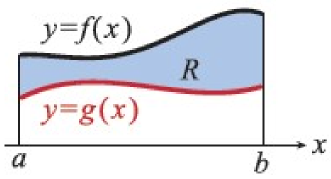


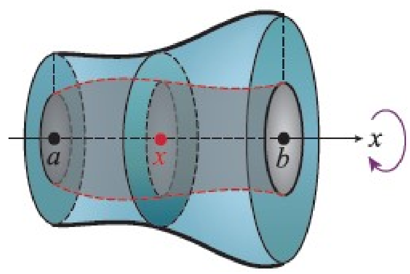
◎說明：利用定積分方式求旋轉體的體積

區域 R 繞 x 軸旋轉可得出一旋轉體，因為通過$(x，0，0)$且垂直 x 軸的平面與這旋轉體所截出的圖形是半徑為 $f(x)$的圓，所以截出的面積為 $r(f(x))^2$。利用立體的體積公式，得此旋轉體的體積為 $\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$

2.雙旋轉體的體積公式：

設函數 $f(x)$與 $g(x)$在區間$[a，b]$上為連續函數，且滿足 $f(x)\ge g(x)\ge 0$，令區域 R 為 $f(x)$與 $g(x)$的圖形與 x 軸，$x=a$ 與 $x=b$ $(a<b)$所圍成的區域繞 x 軸所得的旋轉體體積為 $\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx - \int_a^b \pi(g(x))^2\,dx$

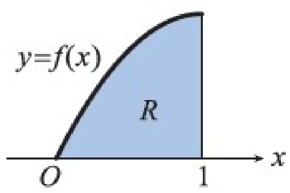




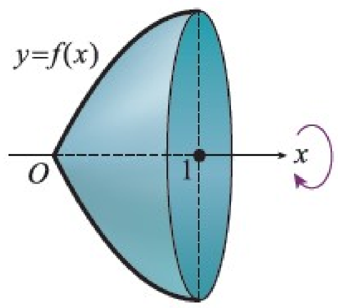
註：區域 R 的旋轉體乃是「$f(x)$的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域繞 x 軸所得的旋轉體」中挖掉「$g(x)$的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域繞 x 軸所得的旋轉體」後所剩下來的部分

◎旋轉體的體積

例 3.1：已知 R 為函數 $f(x)=-x^2+2x$ 的圖形與 x 軸、$x=0$ 及 $x=1$ 所圍成的區域，求 R 繞 x 軸所得的旋轉體體積

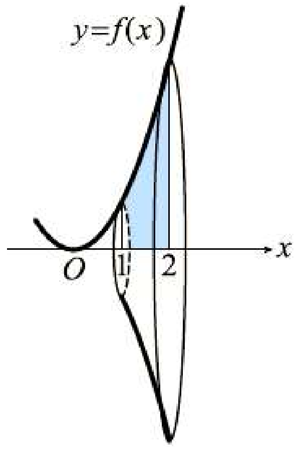


(1) 區域R



(2) 旋轉體

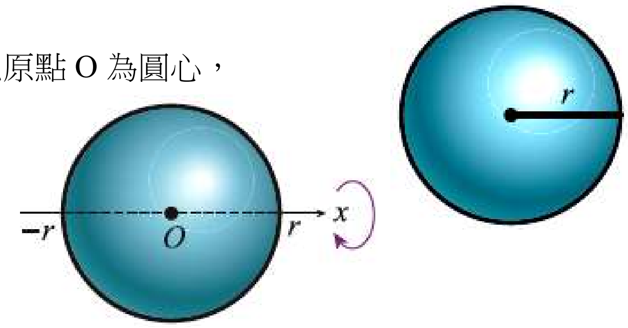
Ex3.1：已知 R 為函數 $f(x)=x^2$ 的圖形與 x 軸、$x=1$ 及 $x=2$ 所圍成的區域，求 R 繞 x 軸所得的旋轉體體積

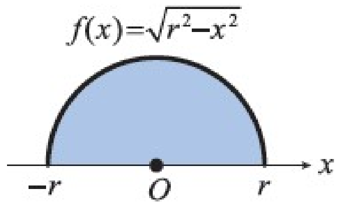


例 3.2：證明：半徑為 r 的球體體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$

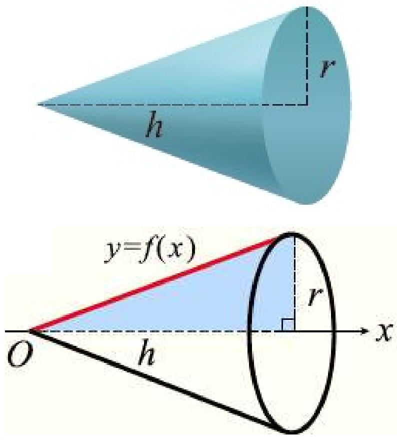
解：(1)將此球體放在坐標空間中，使得球心為原點 O。此球體可以視為以原點 O 為圓心，半徑為 r 的上半圓區域繞 x 軸所得的旋轉體，如圖所示。

因為圓方程式 $x^2+y^2=r^2$，$\Rightarrow y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$



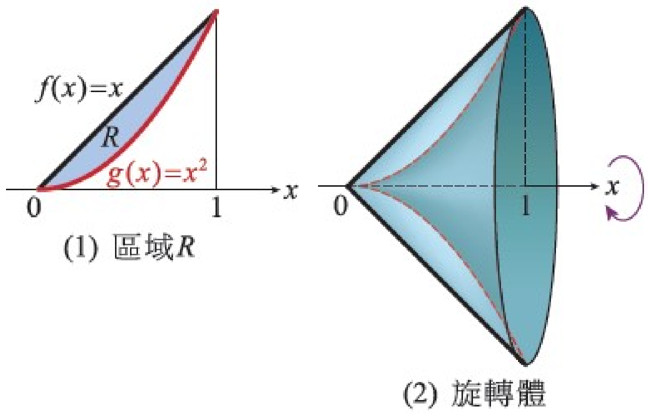


Ex3.2：證明：底半徑為 r，高為 h 的值圓錐體之體積為 $\frac{1}{3}\pi r^2h$，即體積恰等於 $\frac{1}{3}$ ×底面積×高

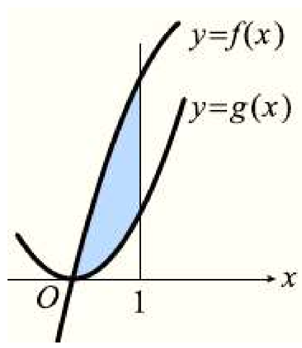


◎雙旋轉體

例 3.3：已知 R 為兩函數 $f(x)=x$ 與 $g(x)=x^2$ 的圖形與 $x=0$，$x=1$ 所圍成的區域，求 R 繞 x 軸所得的旋轉體體積



Ex3.3：已知 R 為兩函數 $f(x)=-x^2+4x$ 與 $g(x)=x^2$ 的圖形與 $x=0$，$x=1$ 所圍成的區域，求 R 繞 x 軸所得的旋轉體體積



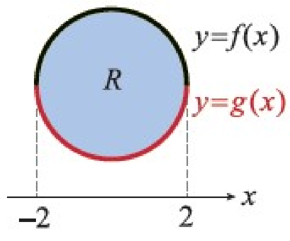
◎形狀像甜甜圈的旋轉體體積

例 3.4：求以點(0，3)為圓心，半徑為 2 的圓繞 x 軸所得的旋轉體體積

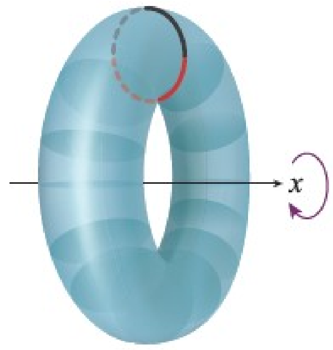
解：圓方程式：$x^2+(y-3)^2=4$ 可看成是由其上半圓弧與下半圓弧所圍成的區域，圓改寫為 $y=3\pm\sqrt{4-x^2}$，

得知：令函數 $f(x)=3+\sqrt{4-x^2}$ 的圖形是上半圓弧

與函數 $g(x)=3-\sqrt{4-x^2}$ 的圖形是下半圓弧



(1) 區域R



(2) 旋轉體

Ex3.4：已知 R 是以點(0，5)為圓心，半徑為 3 的上半圓弧與 x 軸、$x=-3$ 及 $x=3$ 所圍成的區域，

求 R 繞 x 軸所得的旋轉體體積(這個旋轉體形狀像月餅)