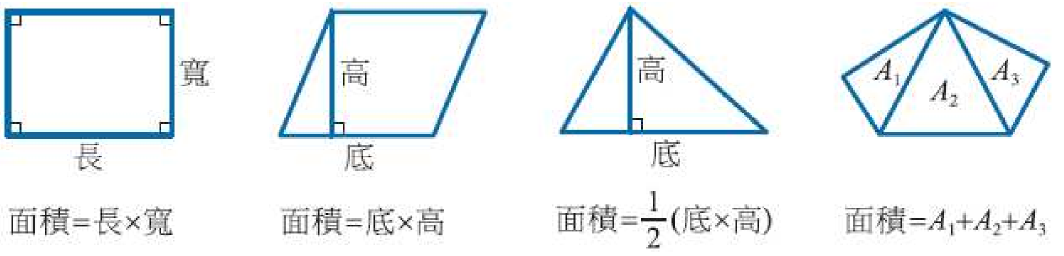
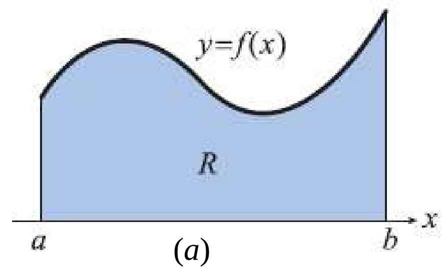
單元 5　積分　　　　三年___班 座號：____　姓名：

重點 1：函數圖形下的面積與黎曼和

1.規則圖形下的面積：如圖

矩形的面積是長乘以寬；平行四邊形的面積是底乘以高；三角形面積是底乘以高的一半。而多邊形的面積可以將它分割成數個三角形，這些三角形的面積總和就是此多邊形的面積





(a)

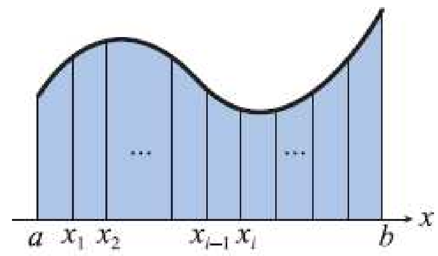
2.邊界含有曲線的區域，利用多邊形的面積來「逼近」其面積

設函數 $f(x)$在區間$[a，b]$上連續，且 $f(x)\geq 0$，如圖(a)所示，令 R 為 $f(x)$的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域

(1)分割：先將區間$[a，b]$平分成 n 等分，每一等分長為$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，

分割點為 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

再過這些等分點分別作 x 軸的垂直線，這些垂直線把 R 分割成 n 個區域，如圖(b)所示。這些區域面積總和就是 R 的面積

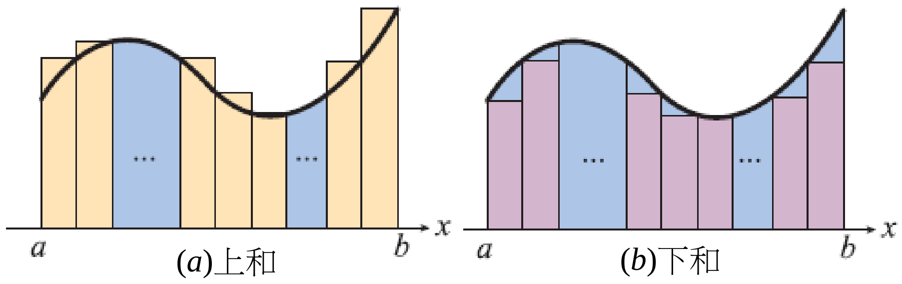


(b) 分割

(2)逼近：因為 $f(x)$在區間$[a，b]$上連續，所以在每一等分區間上，$f(x)$都有最大值與最小值。令在區間$[x_{i-1}，x_i]$ $(i=1，2，\cdots，n)$上的最大值為M_i，最小值為m_i，則：

①上和$U_n=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x$，如右圖$(a)$

②下和$L_n=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x$，如右圖$(b)$



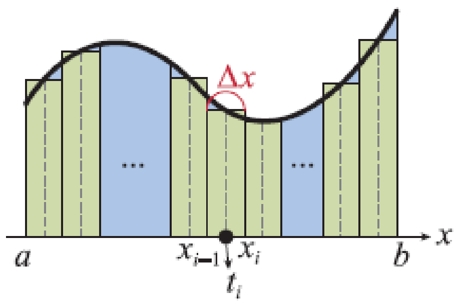
說明：在區間$[x_{i-1}，x_i]$中任取一點t_i，則：

如右圖，高為$f(t_i)$，$\Delta x=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$

寬為Δx的長方形面積$f(t_i)\Delta x$作為該區間區域面積的近似值，

此時圖中的 n 個矩形面積總和為$\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x$，且$L_n\leq\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x\leq U_n$，其中

總和$\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x$稱為函數 $f(x)$對於分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 的**黎曼和**



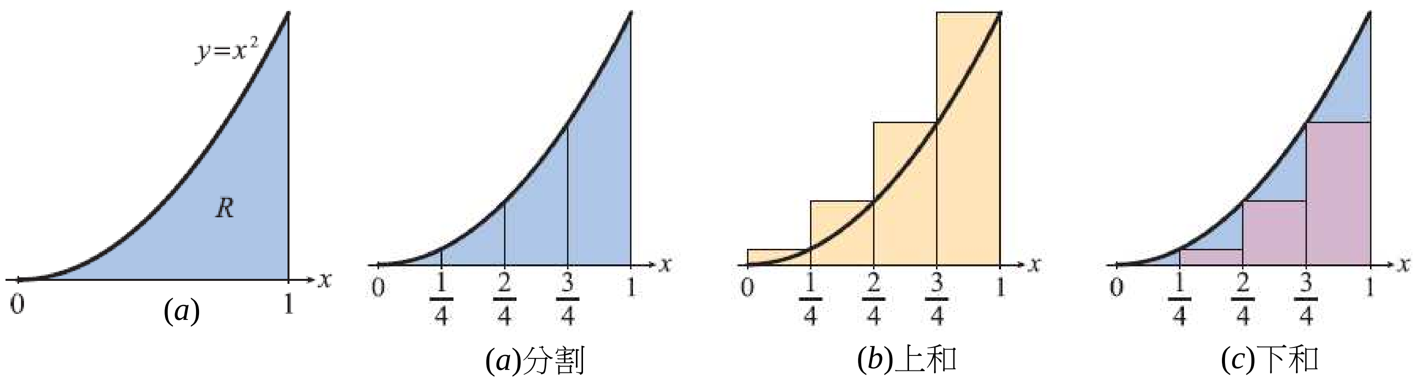
(3)求極限：當 $f(x)$在閉區間上連續時，上和、下和與黎曼和會有共同的極限，且該共同的極限為 R 的面積，

即 R 的面積$=\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x$，其中$t_i$為區間$[x_{i-1}，x_i]$中任一點

註：黎曼和名稱的由來是為了紀念數學家黎曼(Riemann，德國，1826~1866)對於積分學的貢獻

例 1.1：求函數 $f(x)=x^2$的圖形與 x 軸、 將 $x=0$ 至 $x=1$ 區間 4 等分所圍成的區域 R 之面積

解：(1)分割：將區間$[0，1]$平分成 4 等分，再過這些等分點分別作 x 軸的垂直線，這些垂直線把 R 分割成 4 個區域，如圖(a)所示。這些區域的面積總和就是 R 的面積



(2)逼近：①在圖(a)中，我們就一個長條來考慮，過此區域上方邊界的最高點作水平線，並與另三邊所在的三條直線圍出一個矩形。於是 4 個長條共圍出 4 個矩形，如圖(b)所示，稱這 4 個矩形的面積總和為**上和**；

②同樣地，從區域上方邊界的最低點作水平線也可得 4 個矩形(其中一個矩形的高為 0)，如圖(c)所示，稱這 4 個矩形的面積總和為**下和**。

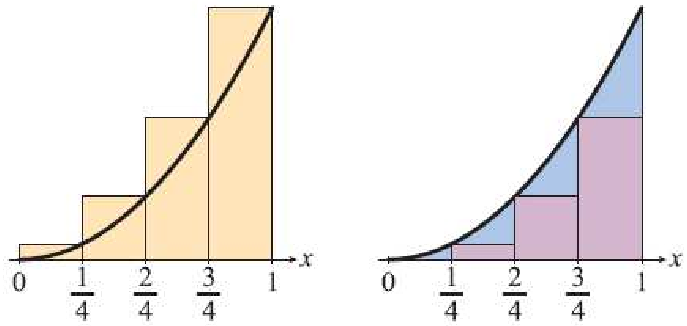
③顯然：下和 $\le$ R 的面積 $\le$ 上和

因為 $f(x)=x^2$ 在區間[0，1]上遞增且每段寬度均為$\frac{1}{4}$，則：

上和$=\frac{1}{4}\times(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^2+\frac{1}{4}\times(\frac{3}{4})^2+\frac{1}{4}\times(\frac{4}{4})^2=\frac{15}{32}$

下和$=\frac{1}{4}\times(\frac{0}{4})^2+\frac{1}{4}\times(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{4}\times(\frac{2}{4})^2+\frac{1}{4}\times(\frac{3}{4})^2=\frac{7}{32}$

$\Rightarrow \frac{7}{32} \le$ R 的面積 $\le \frac{15}{32}$

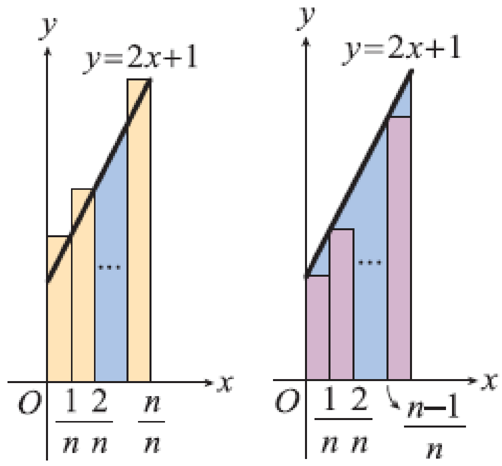


(b)上和　　(c)下和

例 1.2：設函數 $f(x)=2x+1$ 的圖形與 x 軸、$x=0$ 及 $x=1$ 所圍成的區域為 R。將區間[0，1]平分成 n 等分。

(1)求上和 U_n 與下和 L_n

(2)利用(1)的結果求 R 的面積



重點 2：函數的定積分

1.定義：設 $f(x)$為[a，b]上的連續函數，將區間[a，b]平分成 n 等分，分割點為 $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$

t_i 為區間[x_{i-1}，x_i]中任一點，$\Delta x=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$

則黎曼和的極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ 稱為函數 $f(x)$在區間[a，b]上的定積分，

並記作 $\int_a^b f(x)dx$，其中 a 與 b 分別稱為該定積分的下限與上限

$\sum\limits_{i=1}^{n}$	$f(t_i)$	Δx	黎曼和
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$\int_a^b$	$f(x)$	dx	定積分

註：函數 $f(x)$在區間[a，b]中，不限定 $f(x)\ge 0$；

2.積分符號$\int$是由英文 Sum(和)的第一個字母 S 拉長而來

重點 3：多項式函數的反導函數

1.意義：設 F(x)與 $f(x)$是兩個多項式函數。當 $F'(x)=f(x)$時，我們稱 F(x)是 $f(x)$的一個反導函數，但不唯一

例如：$\frac{1}{3}x^3$與$\frac{1}{3}x^3+5$ 都是 x^2的反導函數

2.反導函數原理：若多項式函數 F(x)與 G(x)都是 $f(x)$的反導函數，則 G(x)＝F(x)＋C，C 為常數

3.反導函數公式：

(1)設二次多項式函數 $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$的所有反導函數為 $F(x)=\frac{a_2}{3}x^3+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C$　(C 為任意常數)

(2)多項式函數$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$的所有反導函數為$\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C$，C 為常數

◎求反導函數

例 3.1：求 x^2+5x-4 所有反導函數

例 3.2：已知 F(x)為 $f(x)=3x^2-2x+1$ 的一個反導函數且 F(2)＝4，求 F(x)

重點 4：微積分基本定理

1.定理：設 $f(x)$為[a，b]上的連續函數，若 F(x)是多項式函數 $f(x)$的一個反導函數，則$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

2.定積分計算：

當 F(x)是多項式函數 $f(x)$的一個反導函數時，F(x)從 $x=a$ 到 $x=b$ 的變化量 F(b)－F(a)稱為 $f(x)$在[a，b]上的定積分，以符號$\int_a^b f(x)dx$ 表示，即$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

註：(1)計算反導函數 F(x)時，假設的常數項 C 會削去，故將 F(b)－F(a)以符號 $F(x)\big|_a^b$ 表示

(2)微積分基本定理是牛頓與萊布尼茲的偉大貢獻

例 4.1：求下列各式的值：(1)$\int_{-2}^{3}(4x^3-2x)dx$　　(2) $\int_2^4(3x^2+2x+1)dx$

例 4.2：已知 $\int_{-1}^{2}(ax^2+2x-1)dx=b$ 且 $\int_{1}^{3}(ax^2+b)dx=44$，求實數 a，b 的值

重點 5：定積分的運算性質

1.性質：若 $f(x)$與 $g(x)$為區間[a，b]上的連續函數，則：

(1) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(2) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ ，其中 k 為任意常數

註：$\int_a^b (mf(x)+ng(x))dx=m\int_a^b f(x)dx+n\int_a^b g(x)dx$ ，其中 m，n 為實數

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ ，其中 $a\le c\le b$

2.若定積分為 x 的函數，則$(\int_a^x f(t)dt)dx=f(x)$

說明：設 $\int_a^x f(t)dt=\mathrm{F}(t)\Big|_a^x=\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)$，則$(\int_a^x f(t)dt)dx=[\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)]'=\mathrm{F}'(x)-0=f(x)$

例 5.1：已知函數 $f(x)$滿足 $\int_1^3 f(x)dx=2$ 且 $\int_3^5 f(x)dx=6$，求下列各式的值：

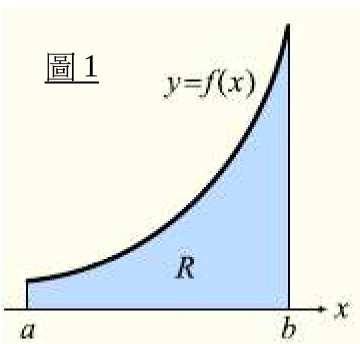
(1) $\int_1^5 f(x)dx$　　(2) $\int_1^5 4f(x)dx$　　(3) $\int_1^5 (5f(x)-2x)dx$

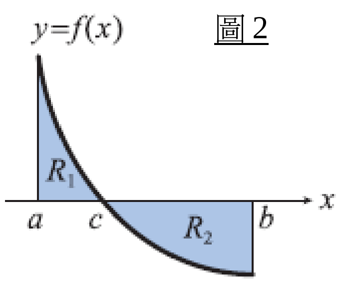
重點 6：定積分與面積

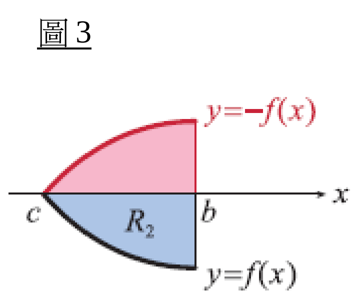
緣由：利用定積分的定義來表示函數圖形下的面積

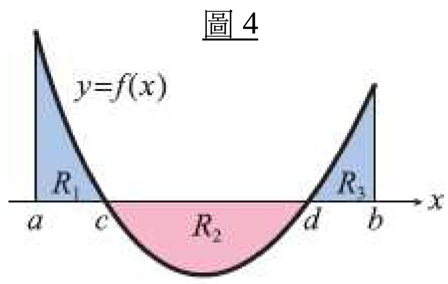
1.意義：設多項式函數 $f(x)$在區間[a，b]上滿足 $f(x)\ge 0$，令 R 為 $f(x)$的圖形與 x 軸，$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域，

如下圖 1 所示，則區域 R 的面積為 $\int_a^b f(x)dx$









重點 6：定積分與面積

2.定積分的應用：

(A)上圖 2 鋪色區域為 $f(x)$的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域，其中：

(1)在區間[a，c]上 $f(x)\geq 0$，R_1 的面積是由定積分與函數圖形下的面積＝$\int_a^c f(x)dx$

(2)在區間[c，b]上 $f(x)\leq 0$，R_2 的面積＝$\int_c^b (-f(x))dx=-\int_c^b f(x)dx$

說明：因為 $y=f(x)$的圖形與 $y=-f(x)$的圖形對稱於 x 軸，所以 R_2 的面積等於 $y=-f(x)$的圖形與 x 軸、$x=c$ 及 $x=b$ 所圍成的區域面積，又在區間[c，b]上$-f(x)\geq 0$，則$\int_c^b (-f(x))dx=-\int_c^b f(x)dx$

⇒鋪色區域的面積＝R_1 的面積－R_2 的面積＝$\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx$

(B)上圖 4 鋪色區域 R_1、R_2 與 R_3 為 $f(x)$的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的三個區域，其中 R_1 與 R_3 在 x 軸的上方，R_2 在 x 軸的下方，則：

⇒鋪色區域的面積＝$\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$

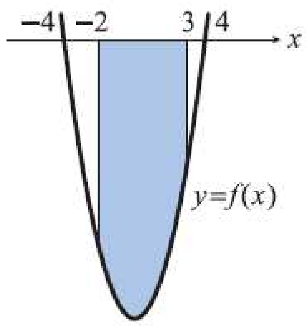
＝R_1 的面積－R_2 的面積＋R_3 的面積＝(R_1 的面積＋R_3 的面積)－R_2 的面積

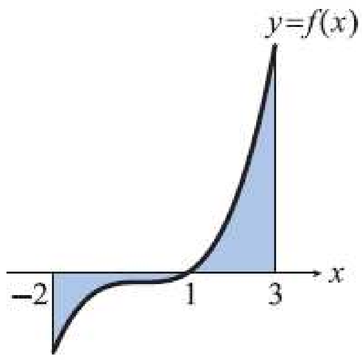
註：一般而言，

定積分$\int_a^b f(x)dx=f(x)$的圖形與 x 軸，$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域中(x 軸上方的面積和)－(x 軸下方的面積和)

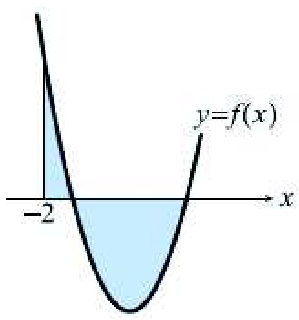
例 6.1：求下列各函數 $f(x)$的圖形與 x 軸、$x=-2$ 及 $x=3$ 所圍成區域的面積：

(1) $f(x)=x^2-16$　　(2) $f(x)=x^3-1$

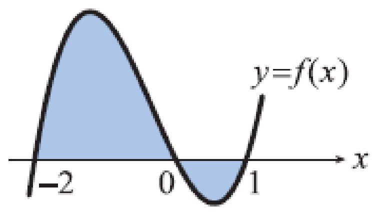




例 6.2：右圖的鋪色區域是函數 $f(x)=x^2-2x-3$ 的圖形與 x 軸、$x=-2$ 所圍成的區域，求鋪色區域的面積

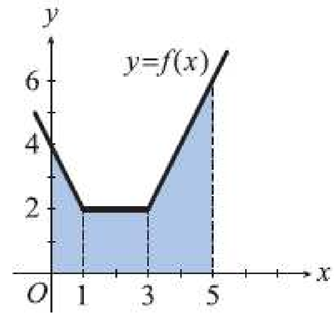


例 6.3：求函數 $f(x)=x^3+x^2-2x$ 的圖形與 x 軸所圍成的區域面積



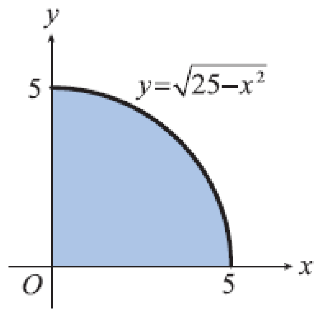
◎含有絕對值的函數之定積分

例 6.4：已知函數 $f(x)=|x-1|+|x-3|$，求 $\int_0^5 f(x)dx$ 的值



◎特殊的定積分，可以透過圖形的面積求得

例 6.5：求 $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}$ 的值



重點 7：連續函數值的平均

1.數值的平均：n 個數值 a_1，a_2，…，a_n 的平均等於所有數值的總和除以個數，即平均數＝$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

2.連續函數在閉區間內函數值的平均：

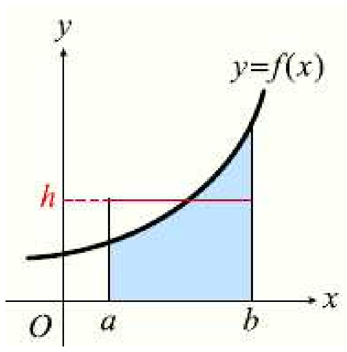
設 $f(x)$為區間[a，b]上的連續函數，則將 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 稱為 $f(x)$在區間[a，b]內函數值的平均

說明：1.如右圖，鋪色陰影區的面積＝$\int_a^b f(x)dx$

2.設一矩形的面積等於函數 $f(x)$圖形下的面積(即鋪色區域的面積)

矩形的面積＝長×寬＝$(b-a)\times h=\int_a^b f(x)dx$

$\Rightarrow$函數值的平均＝$h=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

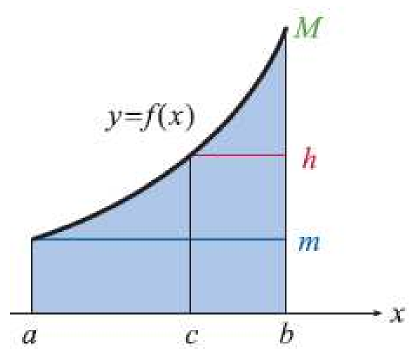


註：一般而言，將連續函數的**定積分值**除以**區間長度**，即為此區間內函數值的平均

3.連續函數值的平均存在：

函數值的平均＝$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 介於區間上的最大值 M 與最小值 m 之間，如右圖

根據介值定理，在區間[a，b]上至少可以找到一個實數 c，使得 $f(c)=h$

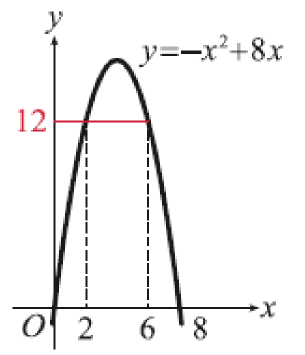


◎函數值的平均

例 7.1：設函數 $f(x)=-x^2+8x$，則：

(1)求 $f(x)$在區間[2，8]內函數值的平均 h

(2)已知 $2\le c\le 8$，且 $f(c)=h$，求 c 的值



重點 8：定積分在運動學上的意義

1.速度函數：當質點作直線運動時，其位置函數的微分就是速度函數

設某質點作直線運動，在時刻 t 時，該質點的位置函數為 $s(t)$，速度函數為 $v(t)$，則 $s'(t)=v(t)$，

即 $s(t)$為 $v(t)$的一個反導函數。

2.位移：根據微積分基本定理得知，質點從時刻 $t=a$ 到 $t=b$ 期間的位移 $s(b)-s(a)=$定積分 $\int_a^b v(t)dt$

即 $\int_a^b v(t)dt=s(b)-s(a)$，透過速度函數的定積分，求得某段時間的位移

3.變化率函數：

導數 $F'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}$ 是函數 $F(x)$在 $x=a$ 處的瞬時變化率，於是導函數 $F'(x)=f(x)$代表 $F(x)$的變化率函數

根據微積分基本定理，可以利用變化率函數 $f(x)$的定積分，求得從 $x=a$ 到 $x=b$ 時 $F(x)$的變化量

即 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

例 8.1：甲、乙兩車在筆直的道路上行駛。當兩車同時通過 A 點後，甲車以速度函數 $v(t)=-\dfrac{1}{27}t^2-\dfrac{2}{9}t+12$ (公尺 / 秒)減速行駛，乙車以等速度行駛。已知經過 9 秒兩車又同時通過 B 點，求：

(1) A，B 兩點的距離　　(2) 乙車的速度