單元 3 微分　三年___班　座號：____　姓名：

重點 1：導數與切線

1.緣由：如右圖

(1)設 $P(a，f(a))$是函數 $f(x)$圖形上的一個定點，

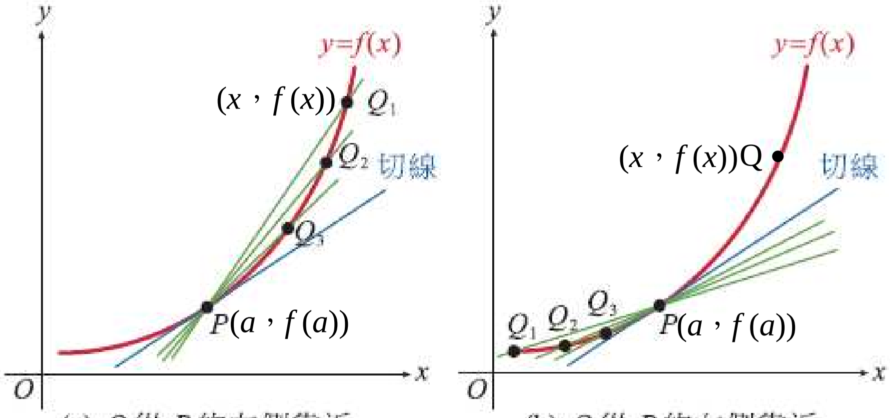
而 $Q(x，f(x))$是圖形上異於 P 的一定點，

連接 P 與 Q 可得割線 PQ，其斜率為 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(2)令$\Delta x=x-a$ 為 x 的變化量

$\Delta y=x-a$ 為 $f(x)-f(a)$為 y 的變化量

$\Rightarrow$割線 PQ 的斜率為 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$



(a) Q 從 P 的右側靠近　(b) Q 從 P 的左側靠近

(3)當Δx 趨近於 0 時，這些割線的斜率趨近於定值 m，即 $m=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2.導數的定義：

當極限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在時，稱此極限為函數 $f(x)$在 $x=a$ 處的導數，記作 $f'(a)$，即 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

3.導數的第二定義：

令 $x=a+h$ 代入，$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

4.導數與切線的斜率：

若導數 $f'(a)$存在，則稱通過點 $P(a，f(a))$且斜率為 $f'(a)$的直線為函數 $f(x)$的圖形在 P 點的切線，而 P 點稱為切點

利用點斜式：以點 $P(a，f(a))$為切點的切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

5.若函數 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$在 $x=a$ 處連續；反之，在 $x=a$ 連續，並不能保證 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分(例 1.3)

◎導數與切線方程式

例 1.1：設函數 $f(x)=x^2$，則：

(1)求導數 $f'(2)$　　(2)在 $f(x)$的圖形上，求以點 $P(2，4)$為切點的切線方程式

Ex1.1：設函數 $f(x)=x^2+x$，則：

(1)求導數 $f'(1)$　　(2)在 $f(x)$的圖形上，求以點 $P(1，2)$為切點的切線方程式

例 1.2：在函數 $f(x)=x^3+1$ 的圖形上，求以點 $P(1，2)$為切點的切線方程式

Ex1.2：在函數 $f(x)=x^3$ 的圖形上，求以點 $P(2，8)$為切點的切線方程式

◎$f'(a)$存在時，稱 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分

例 1.3：函數 $f(x)=|x|$在 $x=0$ 處的導數是否存在？

Ex1.4：函數 $f(x)=|x|$在 $x=-2$ 處是否可微分？

重點 2：導函數與微分公式

1.導函數：給定函數 $f(x)$，當 $f(x)$定義域中的每一個數 a，其導數 $f'(a)$均存在時，稱 $f'(x)$為 $f(x)$的導函數，
並稱 $f(x)$為可微分函數。

註：(1)函數 $y=f(x)$的導函數記作 $f'(x)$，也可以記為 y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$，$(f(x))'$

(2)符號 $\dfrac{dy}{dx}$ 是由萊布尼茲(G. W. Leibniz，德國，1646~1716)與牛頓先後獨立提出微積分的基本理論，
並創造微積分中使用的符號

2.可微分：當函數 $f(x)$在開區間 I 內的每一數之導數都存在時，稱函數 $f(x)$在區間 I 上可微分

註：當函數 $f(x)$為可微分函數時，「求函數 $f(x)$的導函數」的過程，稱為將函數 $f(x)$微分

3.微分公式：

當函數 $f(x)$為可微分函數時，「求函數 $f(x)$的導函數」的過程，稱為將函數 $f(x)$微分。常用的微分公式如下：

(1)若常數函數 $f(x)=c$，則 $f'(x)=0$，即 $(c)'=0$

(2)若函數 $f(x)=x^n$，n 為正整數，則 $f'(x)=nx^{n-1}$，即 $(x^n)'=nx^{n-1}$

(3)若函數 $f(x)$為可微分函數，c 為常數，則 $cf(x)$也是可微分函數，且 $(cf(x))'=cf'(x)$

(4)若函數 $f(x)$與 $g(x)$皆為可微分函數，則 $f(x)+g(x)$也是可微分函數，且 $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

(5)多項式函數的導函數公式：

若實係數多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 為可微分函數，

則導函數 $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots\ldots+2a_2x+a_1$

(6)二階導函數：

多項式函數 $f(x)$的導函數 $f'(x)$也是可微分函數，則將 $f'(x)$的導函數稱為 $f(x)$的二階導函數，以符號 $f''(x)$表示

◎利用導數的定義，求導函數

例 2.1：求函數 $f(x)=x^3+2x^2$的導函數

Ex2.1：求函數 $f(x)=3x^2+4x$ 的導函數

例 2.2：求函數 $f(x)=\sqrt{x}$　$(x>0)$　的導函數

Ex2.2：求函數 $f(x)=\dfrac{1}{x}\,(x\neq 0)$ 的導函數

◎多項式函數的導函數公式

例 2.3：求多項式函數 $f(x)=2x^3-3x^2-5x+4$ 的導函數

Ex2.3：求多項式函數 $f(x)=4x^3-3x^2+5$ 的導函數

例 2.4：設函數 $f(x)=2x^4+x^3-3x^2+4x-8$，求：

(1)導函數 $f'(x)$　　(2)二階導函數 $f''(x)$

Ex2.4：設函數 $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$，試求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f'(x)-f'(3)}{x-3}$ 的值

重點 3：兩個可微分函數乘積的導函數公式

1.設函數 $f(x)$，$g(x)$ 皆為可微分函數，則 $f(x)g(x)$ 也是可微分函數，且 $(f(x)g(x))'=f(x)'g(x)+f(x)g(x)'$

2.設函數 $f(x)$，$g(x)$ 皆為可微分函數，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $g(x)\neq 0$ 處是可微分函數，且 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

3.合成函數微分公式：(連鎖律)(隱函數微分)

設函數 $f(x)$，$g(x)$ 皆為可微分函數，則合成含數 $(g\circ f)(x)$ 也是可微分函數，且 $(g\circ f)'(x)=g(f(x))'f(x)'$

註：合成函數 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

◎乘積微分公式

例 3.1：求函數 $h(x)=(x^2-1)(x^2+x-3)$的導函數

Ex3.1：已知函數 $h(x)=(x^2+3x)(x^3+2x^2-x+33)$，求 $h'(1)$的值

◎分式(除式)微分公式

例 3.2：求函數 $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$的導函數

Ex3.2：已知函數 $h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，求 $h'(1)$的值

例 3.3：求函數 $h(x)=\dfrac{1}{4x^2+3}$的導函數

Ex3.3：求函數 $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 的導函數

◎隱函數微分公式

例 3.4：已知函數 $f(x)=x^2+3x+4$，$g(x)=x^7$，求合成函數$(g\circ f)(x)$的導函數

Ex3.4：已知函數 $f(x)=3x+2$，$g(x)=x^5$，求合成函數$(g\circ f)(x)$的導函數

例 3.5：求函數 $h(x)=(x^2+x+1)^3$ 的導函數

Ex3.5：求函數 $h(x)=(2x-3)^8$ 的導函數

例 3.6：已知函數 $h(x)=(x^2-x+1)^{10}(x-2)^{20}$，求 $h'(1)$的值

Ex3.6：(1)已知函數 $f(x)=(x-1)^{10}$，求 $f'(2)$的值

(2)已知函數 $h(x)=(x-1)^{10}(2x-5)^{30}$，求 $h'(2)$的值

重點 4：高階導函數

1.意義：設函數 $f(x)$為可微分函數，則 $f'(x)$為 $f(x)$的一階導函數；

將「$f'(x)$」的導函數稱為 $f(x)$的二階導函數，記作 $f''(x)$，仿此，

$f''(x)$的導函數稱為 $f(x)$的三階導函數，記作 $f'''(x)$，而四階以上的導函數，記作 $f^{(4)}(x)$， $f^{(5)}(x)$，……

2.多項式函數 $f(x)$的泰勒展式：

利用微分的方法將多項式表成在 $x=a$ 的泰勒展開式

即 $f(x)=a_n(x-a)^n+a_{n-1}(x-a)^{n-1}+\cdots\cdots+a_1(x-a)+a_0$，其中 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$，$k=0$，1，2，…，$n$

例 4.1：已知函數 $f(x)=x^4+x^2-2x+3$，求 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$與 $f^{(4)}(x)$

Ex4.1：已知函數 $f(x)=x^4+5x+6$，求 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$與 $f^{(4)}(x)$

Ex4.11：已知函數 $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$，求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f'(x)-f'(3)}{x-3}$ 的值

例 4.2：將 $f(x)=x^3-10x^2+24x+1$ 表成 $a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3$ 的形式

Ex4.2：將 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 表成 $a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+a_3(x-2)^3$ 的形式

重點 5：導數的應用(求切線方程式)

意義：求函數 $f(x)$ 的圖形在切點 $P(a，b)$ 的切線，其中導數 $f'(a)$ 存在，且為切線的斜率，
利用點斜式求得切線方程式為 $y-b=f'(a)(x-a)$

◎求過圖形上點的切線方程式

例 5.1：在函數 $f(x)=x^8-x^3+x+2$ 的圖形上，求以點 $P(1，3)$ 為切點的切線方程式

Ex5.1：在函數 $f(x)=x^5+x^4+2x^3+4x+5$ 的圖形上，求以點 $P(-1，2)$ 為切點的切線方程式

例 5.2：在函數 $f(x)=(x-1)(2x-5)^3$ 的圖形上，求以點 P(2，-1)為切點的切線方程式

Ex5.2：在函數 $f(x)=x(x-3)^5$ 的圖形上，求以點 P(2，-2)為切點的切線方程式

◎利用導函數求出切點坐標

例 5.3：在函數 $f(x)=2x^3+3x^2-9x+5$ 的圖形上，已知以 P 為切點的切線斜率為 3，求切點 P 的坐標

Ex5.3：已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的圖形和直線 $x-y+4=0$ 相切於點(-2，2)，求實數 a，b 的值

◎求過「圖形外一點」的切線方程式

例 5.4：已知 P(2，-2)為二次函數 $f(x)=x^2-2x+2$ 圖形外一點，求過 P 點的切線方程式

Ex5.4：已知 P(1，1)為二次函數 $f(x)=-x^2+1$ 圖形外一點，求過 P 點的切線方程式

重點 6：導數的應用(一次估計)(一次近似)

1.意義：設函數 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，且 P(a，$f(a)$)是 $f(x)$圖形上一點，則：如右圖

過 P 點的切線方程式為 L：$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

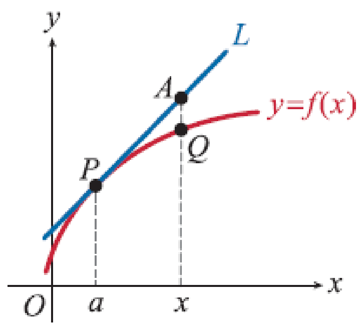
過點(x，0)的鉛直線交函數 $f(x)$的圖形於點 Q(x，$f(x)$)

交切線 L 於點 A(x，$f(a)+f'(a)(x-a)$)

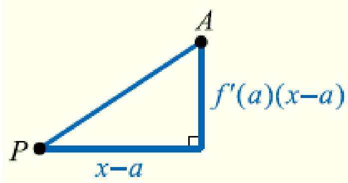
⇒當 x 很接近 a 時，Q 點也很接近 A 點，此時 Q 點與 A 點的 y 坐標近似，

即 $f(x)$近似於一次函數 $f(a)+f'(a)(x-a)$

⇒稱函數 $f(x)$在 $x=a$ 附近的一次估計(或一次近似)



2.一次估計公式：



若函數 $f(x)$在 $x=a$ 處可微分，

則當 x 很接近 a 時，$f(x)$近似於一次函數 $f(a)+f'(a)(x-a)$

註：利用函數 $f(x)$在 $x=a$ 的泰勒展式中，計算一次近似函數

例 6.1：設函數 $f(x)=x^3-10x^2+24x+1$，則：

(1)求函數 $f(x)$在 $x=1$ 附近的一次估計

(2)承(1)，求 $f(1.01)$的近似值

(3)使用計算機計算 $f(1.01)$的精確值，並計算它與(2)求得的近似值相差多少？

Ex6.1：設函數 $f(x)=x^3+x^2+x+1$，則：

(1)求函數 $f(x)$在 $x=1$ 附近的一次估計

(2)承(1)，求 $f(0.97)$的近似值

(3)使用計算機計算 $f(0.97)$的精確值，並計算它與(2)求得的近似值相差多少？

例 6.2：(1)已知 n 為正整數，且 $f(x)=(1+x)^n$，求 $f(x)$在 $x=0$ 附近的一次估計

(2)承(1)，求$(1+10^{-5})^4$的近似值

Ex6.2：設函數 $f(x)=(1+x-x^2)^5$，則：

(1)求 $f(x)$在 $x=1$ 附近的一次估計

(2)承(1)，求 $f(0.99)$的近似值

Ex6.21：將本金 1 萬元存入銀行，年利率 1.2%，每年複利計息一次，使用一次估計的方法估算存滿 6 年的本利和

重點 7：導數的應用(運動學上的意義)

1.意義：設某質點作直線運動，且時刻 t 的位置函數 $s(t)$。因為此質點從時刻 a 到時刻 t $(t\neq a)$的**平均速度**為 $\dfrac{s(t)-s(a)}{t-a}$

所以當 $t\to a$ 時 (即時間差趨近 0)，平均速度趨近於瞬時速度。當 $s(t)$在 $t=a$ 處可微分時，

我們稱 $s'(t)=\lim\limits_{t\to a}\dfrac{s(t)-s(a)}{t-a}$ 為此質點在時刻 a 的**瞬時速度**

若 $s(t)$可微分，則 $s'(t)$是此質點的瞬時速度函數，簡稱**速度函數**

2.加速度函數：

質點從時刻 a 到時刻 t $(t\neq a)$的平均加速度為 $\dfrac{s'(t)-s'(a)}{t-a}$，當 $s'(t)$在 $t=a$ 處可微分時，則 $s''(t)=\lim\limits_{t\to a}\dfrac{s'(t)-s'(a)}{t-a}$

為此質點在 $t=a$ 的**瞬時加速度**，若 $s'(t)$可微分，則 $s''(t)$是此質點的瞬時加速度函數，簡稱**加速度函數**

3.(結論)導數在運動學上的意義：

設某質點作直線運動，且時刻 t 的位置函數 $s(t)$。則：

(1)若 $s(t)$可微分，則 $s'(t)$是此質點的**瞬時速度函數**，簡稱**速度函數**

(2)若 $s'(t)$可微分，則 $s''(t)$是此質點的**瞬時加速度函數**，簡稱**加速度函數**

例 7.1：已知某質點作直線運動時，時刻 t 的位置函數為 $s(t)=50t-4.9t^2$，求此質點在時刻 $t=2$ 的瞬時速度及瞬時加速度

Ex7.1：已知在筆直的跑道上，某跑者在距離終點一百公尺這段時間內，時間 t 秒的位置函數為 $s(t)=\dfrac{1}{5}t^2+8t$ (公尺)，求：

(1)此人衝過終點線時的秒數

(2)此人衝過終點線時的瞬時速度及瞬時加速度