Ch 4.3 矩陣的應用　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：轉移矩陣(transition matrix)

1.意義：矩陣 A 具有下列的性質，稱矩陣 A 為 n 階的**轉移矩陣**

(1)矩陣 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 為方陣

(2)矩陣 A 中的每一個元 a_{ij} ，$0\le a_{ij}\le 1$，且每一行的各元之和等於 1

註：轉移矩陣的定義：設 n 階方陣 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，正整數 $n\ge 2$，滿足：

(1) $0\le a_{ij}\le 1$，$1\le i\le n$，$1\le j\le n$　　(2) $a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}=1$，$1\le j\le n$

稱矩陣 A 為 n 階的轉移矩陣

註：轉移矩陣由俄國數學家**馬可夫**(Andrei Andreyevich Markov，1856～1922)提出

2.轉移矩陣的由來：

設兩事件甲、乙，若每經一期間後，列表如右：

甲有比例 a 保持為甲，有比例 c 變為乙，且 $a+c=1$；而

乙有比例 b 保持為乙，有比例 d 變為甲，且 $c+d=1$；

則稱矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$為**轉移矩陣**，其中$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$稱為**機率向量**

前 ╲ 後	甲	乙
甲	a	b
乙	c	d

3.轉移矩陣的性質：

設初始值的矩陣為 X_0，轉移矩陣為 A，則：

第一次變換後 $X_1=AX_0$

第二次變換後 $X_2=AX_1=A(AX_0)=A^2X_0$

第三次變換後 $X_3=AX_2=A(AX_1)=A(A^2X_0)=A^3X_0$，……，得知 $X_n=A^n X_0$

4.機率向量：對於 $n\times 1$ 階的行矩陣，若各元皆為介於 0，1 之間的實數且各元之和為 1 時，我們稱之為**機率向量**

例如：$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$等……皆為機率向量

◎轉移矩陣

例 1.1：判斷下列矩陣，哪些為轉移矩陣？

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.9 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Ex1.1：下列哪些是轉移矩陣？

$$A=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 3-\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{2} & \sqrt{5}-2 \end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

例 1.2：假設小菡上學搭車方式有坐公車與搭捷運兩種選擇。根據統計，小菡的習慣如下：

(1)若今天坐公車上學，明天有 80 %的機率繼續坐公車，有 20 %的機率改搭捷運

(2)若今天搭捷運上學，明天有 60 %的機率繼續搭捷運，有 40 %的機率改坐公車

已知小菡星期一早上坐公車上學，試計算星期二坐公車與搭捷運上學的機率分別是多少？

Ex1.2：假設小菡上學搭車方式有坐公車與搭捷運兩種選擇。根據統計，小菡的習慣如下：

(1)若今天坐公車上學，明天有 80 %的機率繼續坐公車，有 20 %的機率改搭捷運

(2)若今天搭捷運上學，明天有 60 %的機率繼續搭捷運，有 40 %的機率改坐公車

已知小菡星期一早上坐公車上學，試計算星期三坐公車與搭捷運上學的機率分別是多少？

例 1.3：設某城市其市區及郊區人口遷移狀況如下：

每年住在市區的人有 90%留在市區，有 10%流向郊區；而郊區的人有 80%留在郊區，有 20%流向市區。

已知市區與郊區目前的人口比例分別為 75%與 25%，如果將初始市區與郊區人口比例用 2×1 階的機率向量 X_0 表示為 $X_0 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \text{市區} \\ \text{郊區} \end{array}$，則：

(1)試寫出該城市人口遷移的轉移矩陣 A　　(2)試求一年後的人口比例矩陣 X_1

Ex1.3：某縣縣政府每週五對全縣居民發放甲，乙兩種彩券，每位居民均可憑身分證免費選擇領取甲券一張或乙券一張。根據長期統計，上週選擇甲券的民眾會有 85%在本週維持選擇甲券，15%改選乙券；而選擇乙券的民眾會有 35%在本週改選甲券，65%維持選擇乙券，則：

(1)試寫出描述上述現象的轉移矩陣

(2)若已知上週有 70%的居民選擇甲券，30%選擇乙券，則本週選擇甲，乙兩種彩券的比例分別是多少？

重點 2：平面上的二階線性變換

1.定義：任何一個二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，在坐標平面上將點 $P(x，y)$依據關係式$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$

對應到點 $P'(X，Y)$時，稱二階方陣 A 將點 $P(x，y)$作線性變換到點 $P'(X，Y)$，

而點 $P'(X，Y)$稱為點 $P(x，y)$的對應點。或稱將點 $P(x，y)$對應為 $P'(ax+by，cx+dy)$，這種變換為**線性變換**

2.說明：將$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$解釋成$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$作用在$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$上，得到$\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

即若將平面上的點$(x，y)$寫成$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$的形式，則$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$作用在點 $P(1，2)$上，得到點 $P'(10，5)$

$\Rightarrow$方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$代表一個坐標平面上點(或向量)與點(或向量)之間的一個**變換規則**(簡稱為**變換**)

3.線性變換性質：

(1)任意一個線性變換一定會把**原點**變換到**原點**，即$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2)線性變換會把 ***x* 方向**的單位向量變成**第一行**，即$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$

(3)線性變換會把 ***y* 方向**的單位向量變成**第二行**，即$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

(4)單位向量的線性組合：$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，即一個**線性變換**可以由$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$的變換結果決定

4.已知 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$點 $P(x，y)$變換到點 $P'(X，Y)$，即$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$

若 A 具有乘法反方陣(即 $\det A=ad-bc\neq 0$)時，則$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

◎平面上的線性變換

例 2.1：設 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$所定義的線性變換把點 $O(0，0)$、$P(1，0)$、$Q(0，1)$、$R(4，5)$變換到 O'、P'、Q'、R' 四點，試求各點坐標

Ex2.1：設 $A=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 2 & 7\end{bmatrix}$所定義的線性變換把點 $O(0，0)$、$P(1，0)$、$Q(0，1)$、$R(-2，-4)$變換到 O'、P'、Q'、R' 四點，試求各點坐標

◎線性變換矩陣

例 2.2：若線性變換矩陣 A 將$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$變換到$\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}$，將$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$變換到$\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$，試求：

(1)矩陣 A　　(2)承(1)，矩陣 A 將點$\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$變換到哪一個點？

Ex2.2：若線性變換矩陣 A 將$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$變換到$\begin{bmatrix}2\\ 7\end{bmatrix}$，將$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$變換到$\begin{bmatrix}-1\\ -3\end{bmatrix}$，試求：

(1)矩陣 A　　(2)承(1)，矩陣 A 將點$\begin{bmatrix}-3\\ 4\end{bmatrix}$變換到哪一個點？

◎利用反方陣反求變換點

例 2.3：若 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}$所定義的線性變換將點 S 變換到點 $S'(3，5)$，試求 S 點坐標

Ex2.3：若 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\-3&4\end{bmatrix}$所定義的線性變換將點 P 變換到點 $P'(9，-2)$，試求 P 點坐標

重點 3：線性變換的面積比

1.意義：在坐標平面上，設二階矩陣 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$為一線性變換矩陣，若多邊形 S_1 經線性變換後成多邊形 S_2，

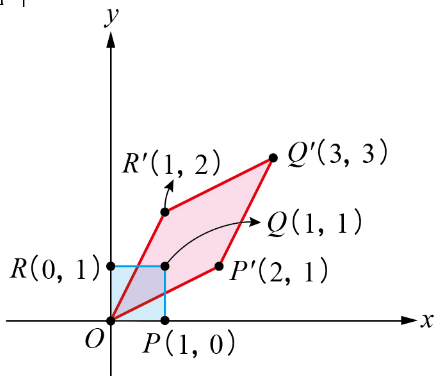
則$\dfrac{S_2\text{的面積}}{S_1\text{的面積}}=|\det A|=\left|\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\right|$，其中$|\det A|$為變換後面積放大或縮小的倍率

2.範例：如右圖，單位正方形 $O(0，0)$，$P(1，0)$，$Q(1，1)$，$R(0，1)$經矩陣 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$

變換成一個平行四邊形 $OP'Q'R'$，其中 $P'(2，1)$，$Q'(3，3)$，$R'(1，2)$

⇒平行四邊形 $OP'Q'R'$的面積為$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$的絕對值$=|\det A|\times$正方形 $OPQR$ 面積

即經過矩陣 A 線性變換後，面積變成原來的$|\det A|$倍



◎線性變換的面積比

例 3.1：設 O，P，Q 三點坐標為 $O(0，0)$，$P(3，2)$，$Q(1，5)$。若 O，P，Q 三點經過矩陣 $A=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}$線性變換後，得到新的三點 O'，P'，Q'，試求 $\overrightarrow{O'P'}$ 與 $\overrightarrow{O'Q'}$ 所張成的平行四邊形面積

Ex3.1：設 $\overrightarrow{OP}=(2，1)$，$\overrightarrow{OQ}=(1，3)$，矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$。若 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 經過矩陣 A 線性變換後得到 $\overrightarrow{O'P'}$ 與 $\overrightarrow{O'Q'}$，

試求 $\overrightarrow{O'P'}$ 與 $\overrightarrow{O'Q'}$ 所張成的平行四邊形面積

重點 4：伸縮矩陣，伸縮變換

1.意義：將 x，y 的坐標分別伸縮**某個倍數**的變換稱為**伸縮變換**

即二階矩陣 $\begin{bmatrix}h&0\\0&k\end{bmatrix}$，$h$，$k>0$，若變換的作用是以原點 O 為中心分別將 x，y 坐標伸縮為 h，k 倍，

就是 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}h\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix}$ 的線性變換稱為**伸縮變換**，而稱 $\begin{bmatrix}h&0\\0&k\end{bmatrix}$ 為**伸縮變換之矩陣**

2.代數意義：

若以原點 O 為中心，將點 $P(x，y)$ 沿著 x 軸方向伸縮 h 倍$(h>0)$，沿著 y 軸方向伸縮 k 倍$(k>0)$，得點 $P'(x'，y')$，

則 $\begin{cases}x'=hx\\y'=ky\end{cases}$，用矩陣表示為 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}hx\\ky\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h&0\\0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix}h&0\\0&k\end{bmatrix}$ 稱為**伸縮變換之矩陣**

即表示 $P(x，y)$ 經過線性變換作用後會對應到 $P'(x'，y')=P'(hx，ky)$

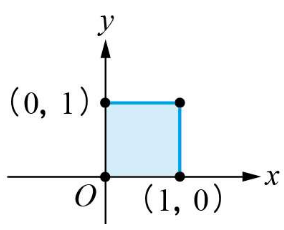
3.經伸縮變換後的區域面積：

由伸縮變換之矩陣為 $A=\begin{bmatrix}h&0\\0&k\end{bmatrix}$，又 $\det A=\det\begin{bmatrix}h&0\\0&k\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}h&0\\0&k\end{vmatrix}=hk$

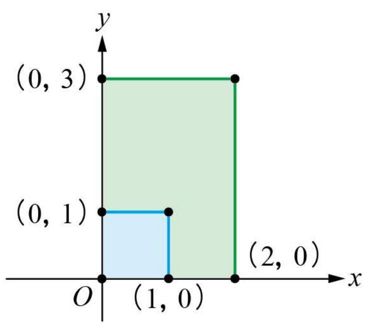
若平行四邊形 R 經伸縮變換後的區域為 R'，則 R' 的面積是 R 的面積的 $|\det A|=|hk|$ 倍

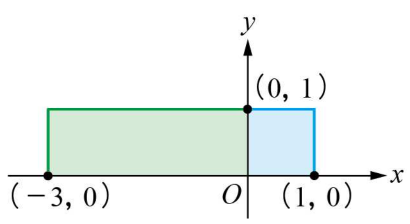
◎伸縮變換

例 4.1：右圖的單位正方形經由下列矩陣變換後會變成什麼形狀？

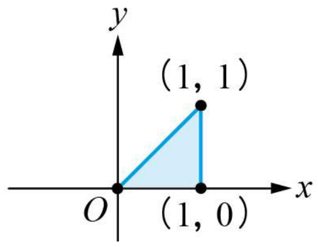


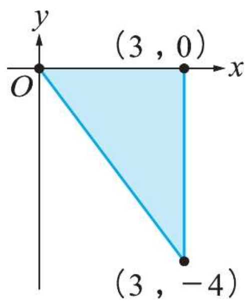
(1) $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$　　(2) $B=\begin{bmatrix}-3&0\\0&1\end{bmatrix}$





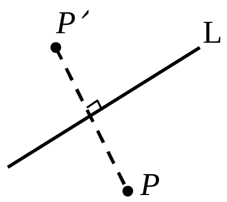
Ex4.1：右圖的圖形經由矩陣$\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$變換後會變成什麼形狀？

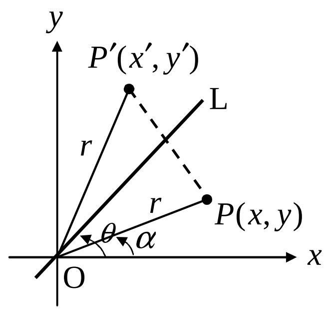


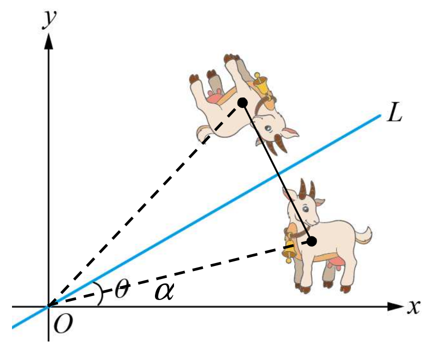


重點 5：鏡射矩陣，鏡射變換

1.意義：若直線 L 是 $\overline{PP'}$ 的中垂線，則稱點 P 對直線 L 之對稱點 P'，如圖，而將這種由 P 對應到 P' 的變換，稱為點 P 對直線 L 的**鏡射**，或稱點 P 對直線 L 的**對稱點**，直線 L 稱為**鏡射軸**







2.代數意義：

坐標平面上，$P(x，y)=P(r\cos\alpha，r\sin\alpha)$，$r>0$，直線 L 是**過原點 O 且與 x 軸正向**夾角為 θ 的直線，如圖，若點 $P(x，y)$對直線 L 鏡射後得點 $P'(x'，y')$，$\overline{OP'}=r$ 且 $\overline{OP'}$ 與 x 軸正向的夾角為 $\theta+(\theta-\alpha)=2\theta-\alpha$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=r\cos(2\theta-\alpha)\\ y'=r\sin(2\theta-\alpha)\end{cases}，\Rightarrow\begin{cases}x'=r(\cos2\theta\cos\alpha+\sin2\theta\sin\alpha)=x\cos2\theta+y\sin2\theta\\ y'=r(\sin2\theta\cos\alpha-\cos2\theta\sin\alpha)=x\sin2\theta-y\cos2\theta\end{cases}，\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

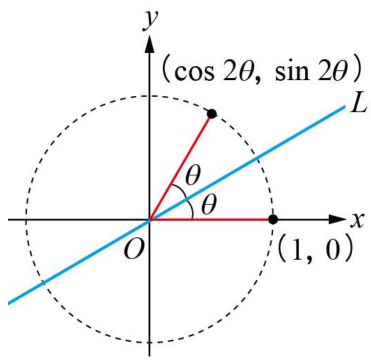
稱矩陣$\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$為**鏡射矩陣**

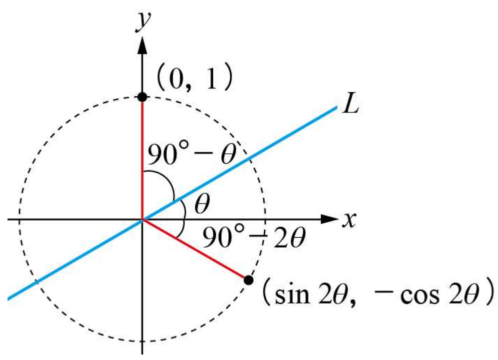
3.利用線性變換：設直線 L 為通過原點的直線，對直線 L 作鏡射的變換稱為鏡射變換，若直線 L 的斜角為 θ，則：

(1)點(1，0)會變換到單位圓上逆時針旋轉 2θ 的位置，即$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\cos2\theta\\ \sin2\theta\end{bmatrix}$，如下左圖

(2)點(0，1)會變換到單位圓上順時針旋轉 $90°-2\theta$ 的位置，即$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\cos[-(90^0-2\theta)]\\ \sin[-(90^0-2\theta)]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin2\theta\\ -\cos2\theta\end{bmatrix}$，如下右圖

$\Rightarrow$可得到鏡射矩陣為$\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$





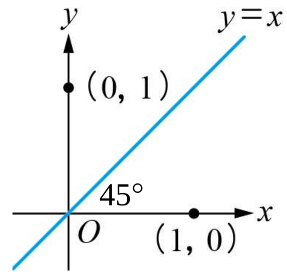
4.鏡射變換後的區域面積：

因鏡射矩陣為 $A=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$，則 $\det A=\det\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}=-1$，$\therefore|\det A|=1$

$\Rightarrow$平行四邊形 R 經鏡射變換後的區域 R' 的面積與**原來區域 R 相同**

◎鏡射變換

例 5.1：利用$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$對直線 $y=x$ 作鏡射的變換結果，寫出對直線 $y=x$ 作鏡射的變換矩陣



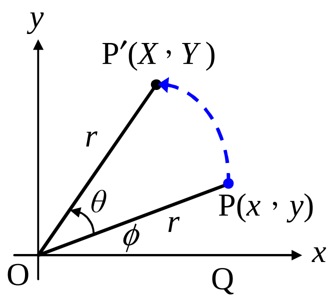
Ex5.1：(1)寫出對直線 $y=-x$ 作鏡射的變換矩陣　　(2)寫出對 y 軸作鏡射的變換矩陣

重點 6：旋轉矩陣，旋轉變換

1.意義：二階矩陣$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$其所定義的線性變換為以**原點 O 為中心**，旋轉 θ 角的**旋轉變換**，稱為**旋轉矩陣**，

　註：逆時針旋轉角度 θ 為**正**，順時針旋轉角度 θ 為**負**

2.說明：如右圖



設 $\overline{OP}=\overline{OP'}=r$，$\angle POQ=\phi$，點 $P(x，y)$，若滿足 $x=r\cos\phi$，$y=r\sin\phi$，$r>0$

且以 O 點為中心，逆時針旋轉 θ 角到 $P'(X，Y)$，即 $\overline{OP'}$ 與 x 軸正向的夾角為$(\phi+\theta)$

$\Rightarrow\begin{cases}X=r\cos(\phi+\theta)\\ Y=r\sin(\phi+\theta)\end{cases}$，如右圖

$\Rightarrow\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos(\theta+\phi)\\ r\sin(\theta+\phi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos\theta\cos\phi-r\sin\theta\sin\phi\\ r\sin\theta\cos\phi+r\cos\theta\sin\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\cos\phi\\ r\sin\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

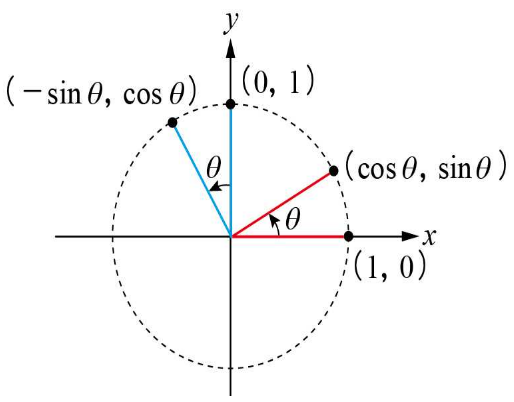
$\Rightarrow$稱其為以**原點 O 為中心逆時針旋轉 θ 角**的線性變換，而矩陣$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$稱為**旋轉矩陣**

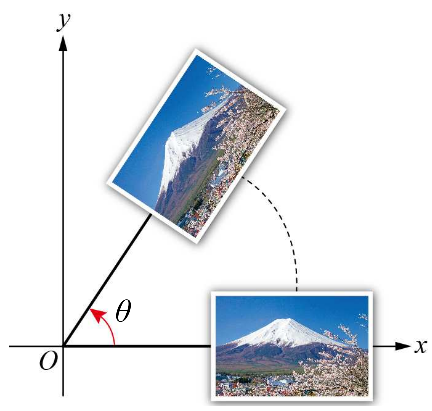
註：利用(1，0)，(0，1)繞著原點 O 逆時針旋轉 θ 角後分別在單位圓上 θ 及 $90°+\theta$ 的位置

即$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\cos(90°+\theta)\\ \sin(90°+\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$

可得到**旋轉矩陣**為$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$





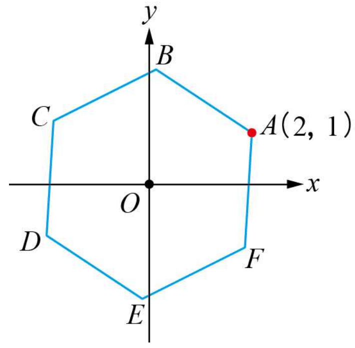
3.性質：

(1)旋轉矩陣的行列式值 $\det(\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix})=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1$，所以旋轉變換後的面積不變

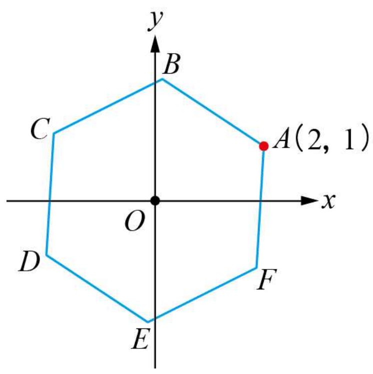
(2)若旋轉矩陣 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，則 $A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

◎旋轉變換

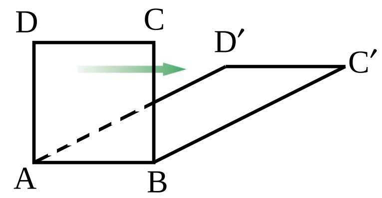
例 6.1：如圖，有一個正六邊形 *ABCDEF* 以原點 *O* 為中心，*A*(2，1)為其中一個頂點，
試求此正六邊形頂點 *B* 的坐標



Ex6.1：如圖，有一個正六邊形 *ABCDEF* 以原點 *O* 為中心，*A*(2，1)為其中一個頂點，試求：
(1)此正六邊形頂點 *C* 的坐標
(2)將 A 點逆時針旋轉 60°六次，頂點坐標為何？



重點 7：推移矩陣，推移變換



1.意義：如圖，矩形 ABCD 中，若 $\overline{AB}$ 固定不動，將 $\overline{CD}$ 向右平行移動(設 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 是具有伸縮彈性的線)得平行四邊形 $ABC'D'$，即為推移的概念

2.代數意義：

坐標平面上，若點 $P(x，y)$的縱坐標(y 方向)保持不變，而將橫坐標(x 方向)增加縱坐標的 k 倍(k 是一個常數)得點 $P'(x', y')$，即 $\begin{cases} x'=x+ky \\ y'=y \end{cases}$，利用矩陣表示為 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，表示**沿 x 軸推移 y 坐標 k 倍**的線性變換

3.常見的推移變換：

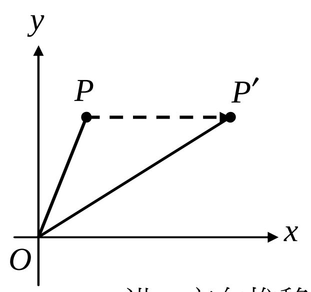
設 k 為實數，則：

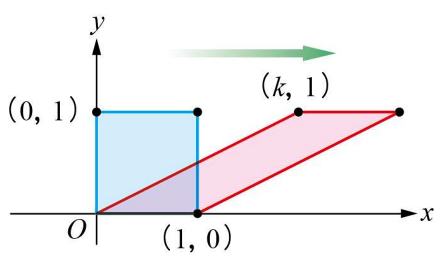
(1)二階矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 稱為沿 x 方向推移 y 坐標 k 倍的**推移矩陣**。其所定義的線性變換稱為 **x 方向的推移變換**

說明：$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$，$\Rightarrow$沿 x 方向推移 y 坐標 k 倍的推移矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

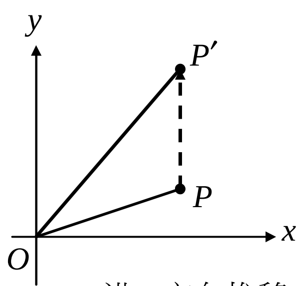
(2)二階矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ 稱為沿 y 方向推移 x 坐標 k 倍的**推移矩陣**。其所定義的線性變換稱為 **y 方向的推移變換**

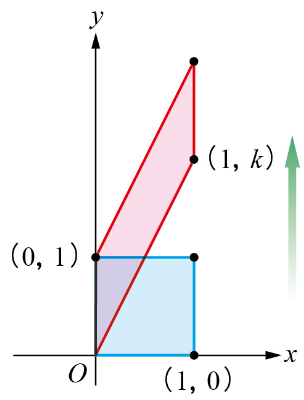
說明：$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\Rightarrow$沿 y 方向推移 x 坐標 k 倍的推移矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$





沿 x 方向推移





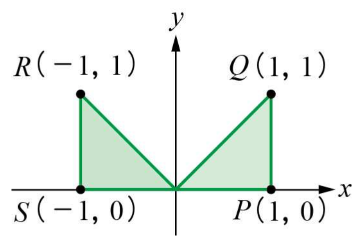
沿 y 方向推移

4.性質：

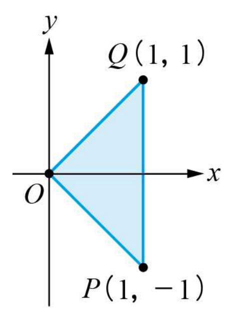
因為 $\det(\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix})=1$，$\det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix})=1$，所以推移變換後的區域**面積不變**

◎推移變換

例 7.1：右圖為某公司的商標，經由推移矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的作用後會變成什麼圖案？



Ex7.1：右圖經由推移矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的作用後會變成什麼圖案？



重點 8：變換的合成

意義：以上各種變換可以像函數一樣，合成這些基本的變換(伸縮、推移、旋轉、鏡射等)

例如：對$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$先逆時針旋轉 90°，再往 x 方向推移 y 坐標的 2 倍，即為 $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{再推移}}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)}_{\text{先旋轉}}$

註：①先旋轉，再推移：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

②先推移，再旋轉：$\begin{bmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$「先旋轉再推移」與「先推移再旋轉」並不相同

◎變換的合成

例 8.1：已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，試描述矩陣 A 線性變換的作用

Ex8.1：在坐標平面上，先以原點 O 為中心逆時針旋轉 90°，再對 x 軸作鏡射的矩陣可表示為何？

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$