

**重點 1：對數的首數與尾數**

1. 意義：任意正實數  $a$  都可以用  $a = k \times 10^n$ ， $1 \leq k < 10$ ， $n$  是整數的形式來表示，稱為**科學記號**表示法

2. 首數與尾數：

將正實數  $a$  表為**科學記號**  $a = k \times 10^n$ ， $1 \leq k < 10$  後，再取對數： $\log a = n + \log b$ ，其中  $n$  為整數， $0 \leq \log b < 1$ ，則整數  $n$  稱為  $\log a$  的**首數**， $\log b$  稱為  $\log a$  的**尾數**

3. 性質：

(1) 當正實數  $a \geq 1$  時，其首數為  $n \geq 0$ ，則：

表示  $a$  的整數部分為  $(n+1)$  位數；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

(2) 當正實數  $0 < a < 1$ ，其首數  $n < 0$ ，則：

表示  $A$  在小數點後第  $n$  位開始出現不為 0 的數字；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

例 1.1：已知  $\log 1.68 \approx 0.2253$ ，則：

(1) 利用科學記號表示 16800，並求  $\log 16800$  的首數及尾數

(2) 利用科學記號表示 0.00168，並求  $\log 0.00168$  的首數及尾數

例 1.2：試求  $2^{100}$  是幾位數？最高位數字是多少？

例 1.3：試將  $2^{-100}$  寫成小數後，求其小數點後第幾位數字才開始不為 0？開始不為 0 的數字是多少？

例 1.4：將  $\frac{5^{50}}{9^{100}}$  表為純小數時，試問小數點後第幾位才開始出現不為 0 的數字？

例 1.5：2017 年日本的一家出版社發行了一本書 2017 年最大の素數。這本書全書內容只印了一個數字  $2^{77232917} - 1$

即當時人類已知的最大質數。該書供不應求，榮登數學類暢銷書的第一名。請問：

(1) 這個數是幾位數？

(2) 展開後最高位數字是多少？

### 重點 2：金融上的應用

1. 單利與複利：設本金是  $P$ ，年利率是  $r$ ，每年計息一次，則：

(1) 若以單利計算：每年固定增加利息  $Pr$ ， $n$  年後的本利和  $= P(1 + nr)$

(2) 若以複利計息：則每年的本利和是前一年的  $(1+r)$  倍，故  $n$  年後的本利和  $P(1+r)^n$

2. 零存整付：指的是每期存入(或買入)一筆定額的錢，在複利計算下到了某個時間點一次贖回的行為

若每期購入  $a$  萬元，在固定報酬率  $r\%$  的複利計算下， $n$  期後可以領回的本利和(利用等比級數計算)

$$= a(1+r\%)^n + a(1+r\%)^{n-1} + \cdots + a(1+r\%)^2 + a(1+r\%) = a(1+r\%) \times \frac{(1+r\%)^n - 1}{r\%}$$

3. 尤拉數  $e$

當  $n \rightarrow \infty$  時， $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e = 2.718281828 \cdots$  是一個無理數

註：以  $e$  為底的對數  $\log_e x$ ，記為  $\ln x$ ，稱為自然對數

例 2.1：有一保險公司銷售一種儲蓄險，存入 100 萬元，每年有 20000 元的紅利，期滿 20 年可取回本利和。另有銀行提供 100 萬元，年利率 2%，每年複利計息一次的 20 年定存，試問那一個方案的獲利方式較佳？

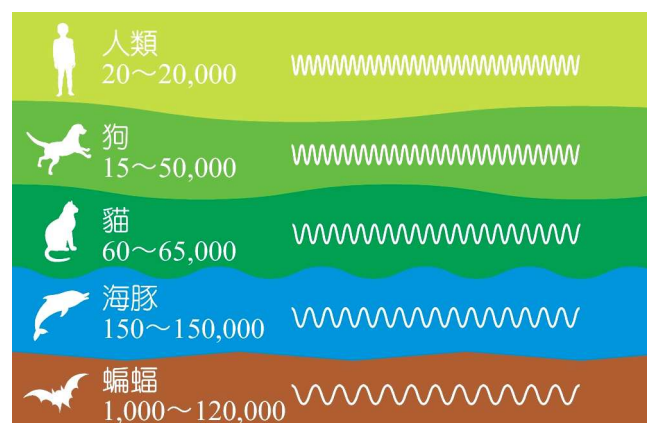
例 2.2：小明每年固定購買某證券 10 萬元，在年報酬率 8% 的情況下，他至少需要多少年，才可以累積到人生的第一桶金 100 萬元？(四捨五入至整數位)

例 2.3：當  $n \rightarrow \infty$  時， $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e = 2.718281828 \dots$  是一個無理數，稱為尤拉數。試利用計算機估計  $(1 + \frac{1}{12})^{12}$  與  $(1 + \frac{1}{365})^{365}$  至小數點以下第四位

### 重點 3：指數與對數在科學上的應用

指對數在科技上的應用不可勝數，因為科學上有許多量大小差異相當之大，此時用指數或對數來處理會方便許多

例 3.1：右圖表示人、狗、貓、海豚、蝙蝠等動物所能聽到的聲音頻率範圍(單位：赫茲 Hz)。請問在這些動物中，有哪幾種可以聽到頻率範圍在  $10^{2.5}$  到  $10^{4.5}$  赫茲的所有聲音？



例 3.2：地震的芮氏規模  $m$  和地震放出的能量  $r$  (單位：焦耳)的關係是  $\log r = 1.5m + 4.8$ 。試問西元 2011 年芮氏規模 8.9 的日本東北大地震，其釋放出來的能量是西元 2018 年花蓮芮氏規模 6.2 的地震放出能量的多少倍？(四捨五入至整數位)

例 3.3：晴朗無光害的夜空中。我們仰頭會看見許多星星，有些較亮有些較暗，事實上因為距離遠近的關係，星星真正的發光強度(絕對星等  $M$ )與我們在地球上觀測到的亮度(視星等  $m$ )並不相同，科學家在兩者間建立了以下公式：

$$m = M + 5 \log \frac{d}{32.616}$$

，其中  $d$  為所觀測恆星與地球的距離(單位：光年)。根據 SAO 星表可知織女星與地球的距離

約為 25 光年，絕對星等為 0.58，若測得北極星絕對星等為  $-3.6052$ ，而其視星等比織女星多 2。試求北極星與地球距離為多少光年？(四捨五入至整數光年)

例 3.4：西元 1947 年，死海西北方的一個少年為了追羊，朝山洞裡丟石頭，意外打破瓦罐而發現“死海古卷。”這在歷史學、考古學、宗教學上是極重要的發現。假如專家在 1950 年測量古卷上碳-14 的含量，發現是正常含量的 78%。已知碳-14 的半衰期約為 5700 年。試問古卷應該是何時的古物？(四捨五入至整數年)