Ch 1 (B1)數與式、指數、對數 三年____班 座號：____ 姓名：

重點 1：有理數與無理數

1.有理數：一般形如$\dfrac{q}{p}$，其中 p，q 為整數，且 $q\neq 0$ 的數稱為「**有理數**」，以符號 Q 表示所有「**有理數**」的集合

無理數：無法表示成$\dfrac{q}{p}$形式的數稱為「**無理數**」，以符號 Q′表示所有「**無理數**」的集合

註：「**有理數**」、「**無理數**」將數線填滿

2.有理數的稠密性：

對任何兩個有理數 r 與 s，其中 $r<s$，有無窮多個有理數 t，滿足 $r<t<s$

3.實數：

(1)能在數線上找到對應點位置的數皆為實數

(2)因為有理數在數線上是非常密集的(有理數的稠密性)，但仍然有很多點沒有有理數可以跟其對應，這些點所對應的數稱為無理數，而由有理數與無理數所成的集合稱為實數

4.運算性質：設 a，b，c 是任意實數，則：

(1)交換律：加法：$a+b=b+a$ 乘法：$a\times b=b\times a$

(2)結合律：加法：$a+(b+c)=(a+b)+c$ 乘法：$a\times(b\times c)=a\times b)\times c$

(3)乘法對加法的分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

(4)消去律：加法(移項)：若 $a+c=b+c$，則 $a=b$ 乘法(約分)：若 $c\neq 0$，$a\times c=b\times c$，則 $a=b$

(5)單位元素：加法：$a+0=0+a=a$ 乘法：$a\times 1=1\times a=a$

5.實數的大小(次序)關係：

A.任意兩實數可以比較大小，即在數線愈右邊的點，所對應的實數愈大

B.實數大小關係的性質：設 a，b，c 是任意實數，則：

(1)三一律：對於任何兩個實數 a，b，有 $a<b$，$a=b$，$a>b$ 三種大小關係，而恰只有一個成立

(2)遞移律：

(i)若 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$ (ii)若 $a=b$ 且 $b=c$，則 $a=c$ (iii)若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$

(3)不等式的加法性質：若 $a>b$，則 $a+c>b+c$

(4)不等式的乘法性質：(i)若 $a>b$ 且 $c>0$，則 $ac>bc$ (ii)若 $a>b$ 且 $c<0$，則 $ac<bc$

(5)對於任何一個實數 a，則 $a^2\geq 0$ 恆成立

若 $a^2>b^2$ 且 a，b 皆為正實數，則 $a>b$

例 1.1：下列敘述哪些是正確的？(多選)

(1)若 a，b 為有理數，則 $a+b$ 與 ab 也是有理數 (2)若 a，b 為無理數，則 $a+b$ 不一定是無理數

(3)若 a，b 為無理數，則 ab 也是無理數 (4)若 a 是有理數，則$\sqrt{a}$是無理數

(5)若 a 是無理數，則 a^2 是有理數

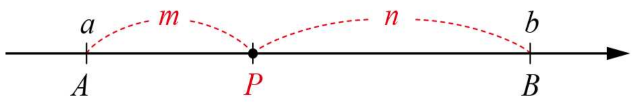
重點 2：距離、內分點公式

1.距離公式：設兩點 A 與 B 的坐標分別為 a 與 b，即 $A(a)$，$B(b)$，則 $\overline{AB}=|a-b|$ 就是 A 與 B 兩點的距離

2.內分點公式：

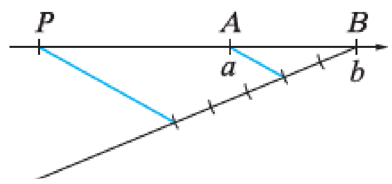
設數線上兩點 $A(a)$，$B(b)$，且 $a<b$，點 $P(x)$ 介於 A，B 兩點之間，且 $\overline{AP}$ ：$\overline{BP}=m$：n，如下圖

則 P 點的坐標為 $x=\dfrac{na+mb}{m+n}$



註：若 m：$n=1$：1，則點 P 是 $\overline{AB}$ 的中點，得到 $\overline{AB}$ 的中點坐標公式為 $\dfrac{a+b}{2}$，即 $P(\dfrac{a+b}{2})$

例 2.1：如右圖，數線上 A 點坐標為 a，B 點坐標為 b，小安以「線段等分方式」作圖，若尺規作圖的過程都正確，則 P 點坐標為下列何者？(單選)

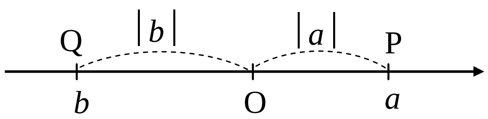


(1) $\dfrac{2a+3b}{5}$　(2) $\dfrac{3a+2b}{5}$　(3) $\dfrac{-3a+5b}{2}$　(4) $\dfrac{5a-3b}{2}$　(5) $\dfrac{2a-3b}{-1}$

重點 3：實數的絕對值與不等式

1.絕對值的定義：在數線上，實數點 a 與原點 O 之距離，記作 $|a|$，讀作 a 的絕對值(或絕對值 a)

對實數 a，則 $|a|=\begin{cases}當\ a\geq 0\ ,則\ |a|=a\\ 當\ a<0\ ,則\ |a|=-a\end{cases}$

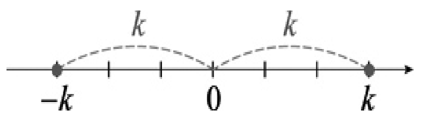


註：$|a|$ 表示數線上點 $P(a)$ 與原點的距離

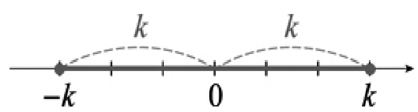
$|a-b|$ 就是數線上 $P(a)$ 與 $Q(b)$ 兩點的距離

2.一次方程式與不等式的解：設 k 是正實數

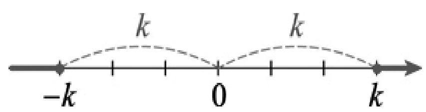
(1)若 $|x|=k$，則 $x=k$ 或 $x=-k$



(2)若 $|x|\leq k$，則 $-k\leq x\leq k$



(3)若 $|x|\geq k$，則 $x\geq k$ 或 $x\leq -k$



例 3.1：解下列各方程式：

(1) $|x-3|=4$　　(2) $|x-3|=2x$

例 3.2：設 a，b 為實數，若 $|ax+5|>b$ 之解為 $x<-1$ 或 $x>7$，則數對 $(a，b)=$______

重點 4：式的運算

A.常用之乘法公式(都是恆等式)：

1.完全平方：

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　(3) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

註：$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$　或 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

2.分配律：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

3.平方差：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

4.完全立方：

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a^3+b^3)+3ab(a+b)$

(2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a^3-b^3)-3ab(a-b)$

註：$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

5.立方和：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$

6.立方差：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a-b)$

7.展開式公式：

(1) $(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

(2) $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma$

重點 4：式的運算

B.利用乘法公式求值：

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

2. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$

3. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a-b)$

4. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

5.應用：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})^3-3(x+\dfrac{1}{x})$

(3) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=(x-\dfrac{1}{x})^3+3(x-\dfrac{1}{x})$

例 4.1：求值 $(99+2)(99^2-2\times99+4)-(99-2)(99^2+2\times99+4)=$_____

重點 5：雙重根號

1.意義：設 a，$b\geq 0$，且 $a\geq b$，則型如 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 或 $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ 等，稱為**雙重根號**

2.雙重根式運算公式：設 x， y 為正整數，則：

(1)若 x，$y\geq 0$，則 $\sqrt{(x+y)+2\sqrt{xy}}=\sqrt{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

(2)若 $x\geq y\geq 0$，則 $\sqrt{(x+y)-2\sqrt{xy}}=\sqrt{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}=\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

例 5.1：將 $\sqrt{11+2\sqrt{18}}$ 化簡後，其小數部分為 $\sqrt{a}-b$，其中 a，b 為整數，則 $a-b=$______

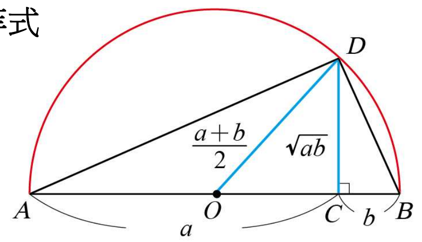
重點 6：算幾不等式

1.定義：設兩數 $a\geq 0$，$b\geq 0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ，且當 $a=b$ 時，等號才成立，稱為**算幾不等式**

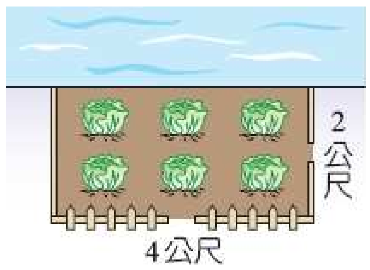
其中 $\dfrac{a+b}{2}$ 為 a，b 兩數的**算術平均數**(等差中項)，

$\sqrt{ab}$ 為 a，b 兩數的**幾何平均數**(等比中項)

即**算幾不等式**就是**算術平均數 ≥ 幾何平均數**



例 6.1：小萱想用竹籬沿著河邊圍出面積為 288 平方公尺的長方形菜圃，並在其中一邊留下 4 公尺的入口，另外一邊留下 2 公尺的出口(相鄰河的一邊不圍竹籬，僅圍三個邊)，如右圖所示，則小萱最少可用_____公尺的竹籬就能夠完成目標。



重點 7：指數、指數律與科學記號

1.意義：當 n 為正整數時，對於每一個實數 a，我們以記號「a^n」表示 a 自乘 n 次的乘積，即 $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ 個}}$

a^n 讀做「a 的 n 次方」，其中 a 稱為**底數**，n 稱為**指數**(或次數、次方)

註：a^2 與 a^3 又分別讀做「a 的平方」與「a 的立方」

2.指數律：

設 a，b，m，n 為實數，則：

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$　(2) $(a^m)^n=a^{mn}$　(3) $a^n\times b^n=(ab)^n$

註：設 $a\neq 0$，$m>n$，$a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

3.指數性質：

(1) $a\neq 0$，$a^0=1$

(2)負整數指數 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，$a\neq 0$

(3)有理數指數 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$，$a\neq 0$，$n>0$，$m$，$n$ 為整數

4.科學記號：

可以方便表示很大與很小的數，定義如下：

任意正實數 A 都可以用 A$=k\times 10^n$，$1\leq k<10$，n 是整數，稱 k 為**係數**，n 為**指數**，稱為 A 的**科學記號**表示法

例 7.1：試求 $(0.125)^{-\frac{2}{3}}\times(\frac{4}{25})^{\frac{1}{2}}\times(\frac{5}{2})^2=$______

例 7.2：設 $a>0$，若 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，試求下列各式之值：

(1) $a+a^{-1}=$_____　(2) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=$_____

例 7.3：放射性物質的質量會隨時間逐漸衰減，且無論從何時算起，質量衰減為原來的一半所經過的時間皆相同，稱為該物質的半衰期，設某種放射性物質的半衰期是半年，且其質量目前是 1536 克。試問經過 5 年後，該放射性物質剩下的質量為______克

例 7.4：以科學記號表示 $(1.3\times10^{8})+(2.8\times10^{4})\div(7.0\times10^{-6})=$______ (係數部分四捨五入至小數點後第一位)

重點 8：常用對數

1.意義：對於每個正數 a，都有唯一實數 x，滿足 $a=10^{x}$，實數 x 記為 $x=\log a$，其中 a 稱為「真數」，$\log a$ 稱為 a 的**常用對數**，讀作「a 的常用對數」

即若 $a=10^{x}$，則 $x=\log a$，$\Rightarrow a=10^{x}=10^{\log a}$

如：$10^{x}=0.5$，則 $x=\log 0.5$，$\Rightarrow 0.5=10^{x}=10^{\log 0.5}$

註：以 pH 值為例：

當氫離子莫耳濃度 $[H^{+}]=x=10^{-p}$ 時，$-p=\log x$，則酸鹼程度 pH 值 $=-p=\log x$

2.性質：

(1)常用對數值增加 1，相當於原始數據乘上 10 倍

常用對數值減少 1，相當於原始數據乘上 $\frac{1}{10}$ 倍

(2)當 $n\geq 0$，且 $n\leq \log A<n+1$ 時，則 A 為 10^{n} 量級，即表示 A 的**整數部分為 $(n+1)$ 位數**

當 $n<0$，且 $n<\log A\leq n+1$ 時，則 A 為 10^{n} 量級，即表示 A 在小數點後**第 $|n|$ 位開始出現不為 0 的數字**

例 8.1：已知 $x=\log 5$，試求下列各數的值：

(1) $1000^{x}=$______　　(2) $100^{x}+10^{-b}=$______

例 8.2：國際上使用芮氏規模來表示地震的強度，設 E(單位：爾格)為地震芮氏規模 M 時所釋放出來的能量，其中 M 與 E 的關係為 $\log E=11.8+1.5M$，若芮氏規模為 a 之地震所釋放出來的能量是芮氏規模為 b 之 106 倍時，則 $a-b=$______