Ch 3.3 三次函數　　　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：三次單項式與平移

1.三次單項函數形如 $f(x)=ax^3$，$a\neq 0$ 稱為三次函數的基本型

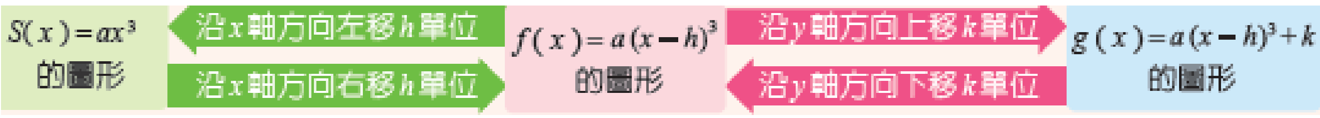
2.性質：

(1) $f(x)=ax^3$ 與 $g(x)=-ax^3$ 的圖形對稱於 x 軸

(2)當 $a>0$ 時，$f(x)=ax^3$ 的圖形愈往右邊的點，會愈往上攀升，呈現左下右上的趨勢

當 $a<0$ 時，$f(x)=ax^3$ 的圖形愈往右邊的點，會愈往下降低，呈現左上右下的趨勢

3.圖形的平移：



4.圖形的對稱：

圖形上點 $(x，y)$ 關於 x 軸的對稱點為 $(x，-y)$

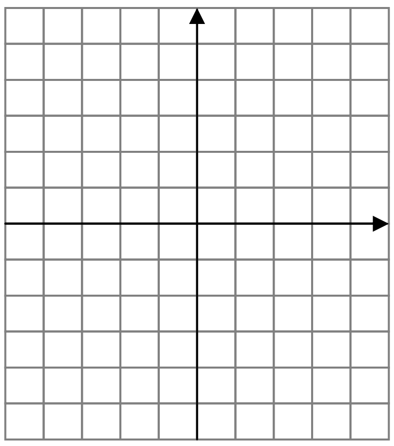
關於 y 軸的對稱點為 $(-x，y)$

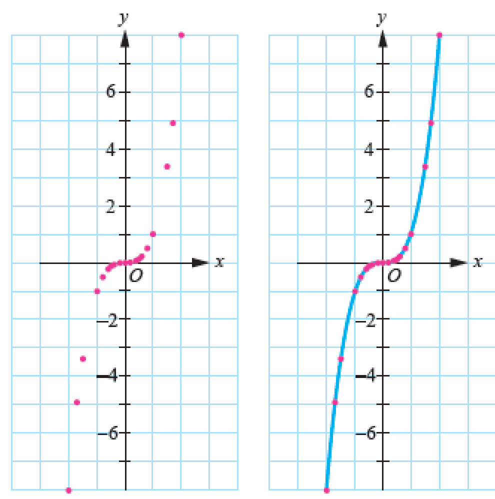
關於原點 O 的對稱點為 $(-x，-y)$

例 1.1：利用描點法，畫出三次函數 $f(x)=x^3$ 的圖形。

解：

x								
$f(x)$								

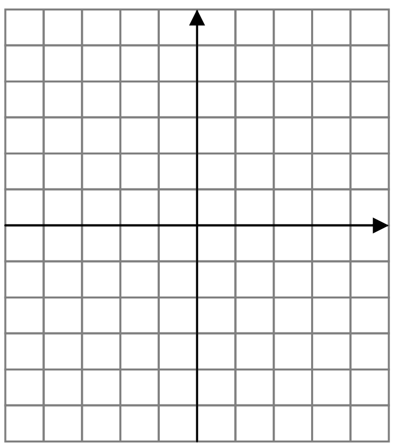


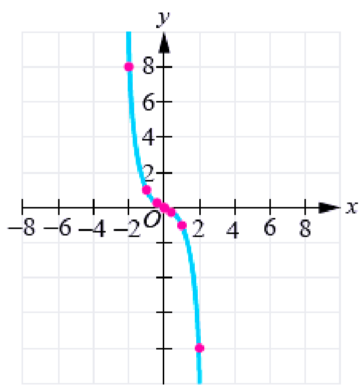


Ex1.1：利用描點法，畫出三次函數 $f(x)=-x^3$ 的圖形

解：

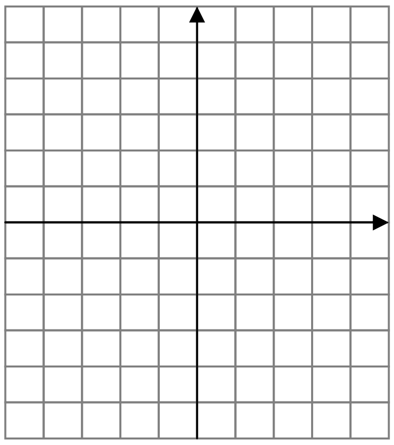
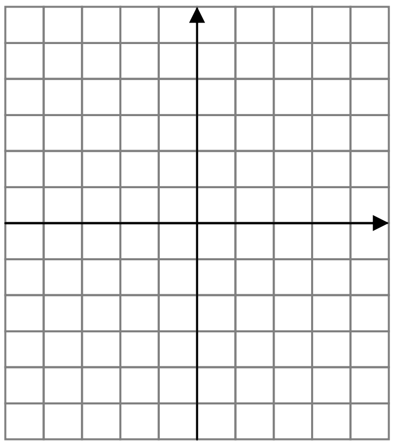
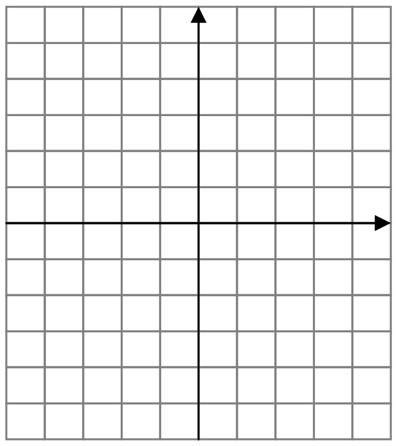
x								
$f(x)$								



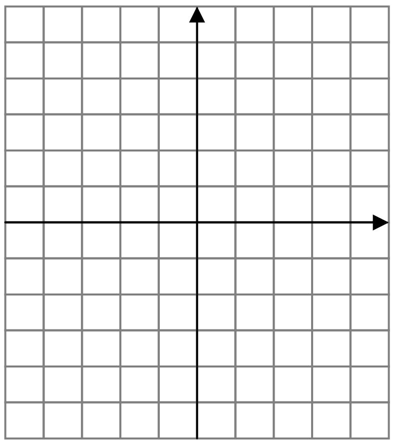


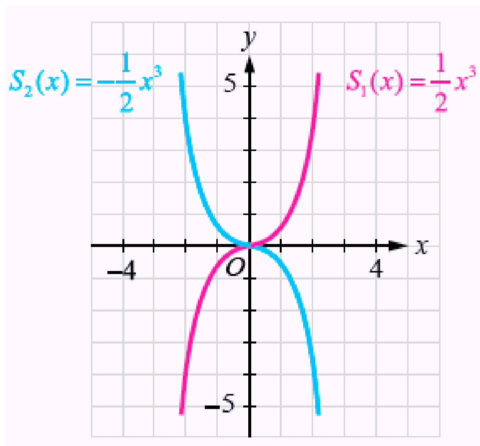
例 1.2：設 $A(x)=x^3$，試在同一坐標上描繪下列各組的圖形，並比較其差異為何？

(1) $A(x)$與 $f(x)=-x^3$　(2) $A(x)$與 $g(x)=2x^3$　(3) $A(x)$與 $h(x)=-2x^3$

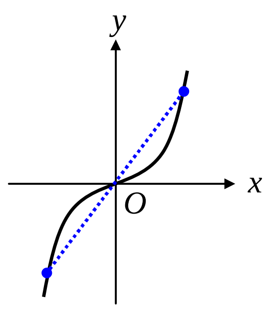
Ex1.2：試在同一坐標上描繪 $f(x)=\frac{1}{2}x^3$ 與 $g(x)=-\frac{1}{2}x^3$ 的圖形，並比較其差異為何？





例 1.3：設 $P(3,k)$為 $f(x)=5x^3$ 圖形上一點，試求：

(1) k 值　(2)以原點為中心的對稱點坐標為何？



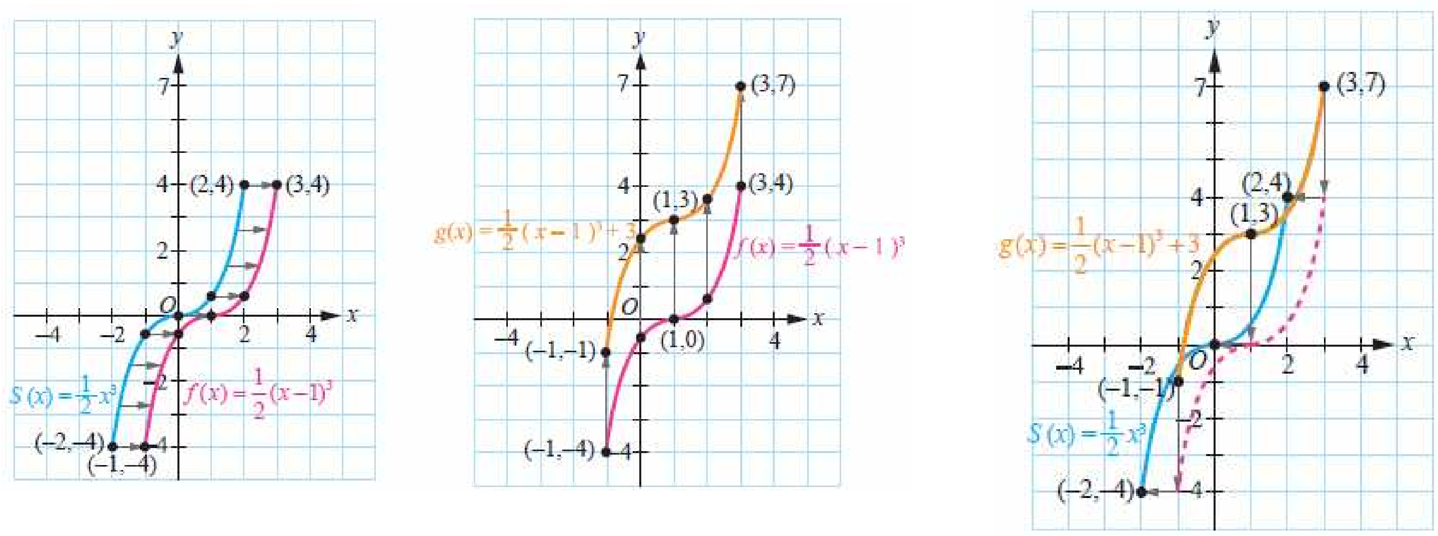
Ex1.3：設 $f(x)=-8x^3$ 的圖形與 $g(x)=ax^3$ 的圖形對稱於 x 軸，求 a 之值＝_____

例 1.4：若 $S(x)=\dfrac{1}{2}x^3$，$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^3$，$g(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^3+3$，則：

(1) $f(x)$與 $g(x)$的圖形是否可由 $S(x)$的圖形平移得到？

(2) $g(x)$的圖形如何平移到 $S(x)$？

(3) $g(x)$是否為點對稱圖形？若是，其對稱中心為何？



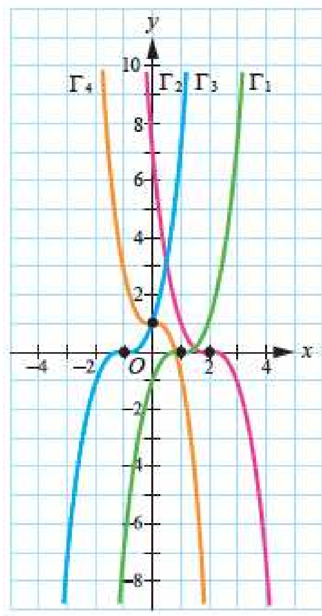
Ex1.4：如右圖，試將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上：

$y=-(x-2)^3$ •　　　　• Γ_1

$y=(x+1)^3$ •　　　　• Γ_2

$y=-2x^3+1$ •　　　　• Γ_3

$y=(x-1)^3$ •　　　　• Γ_4



例 1.5：若 $f(x)$的圖形式由 $S(x)=4x^3$，沿 x 軸方向左移 3 單位，再沿 y 軸方向下移 2 單位而得，則 $f(x)=$？

Ex1.5：若 $f(x)=2(x+1)^3+5$，則 $f(x)$的圖形可如何平移至某個單項三次函數 $S(x)$？求 $S(x)=$？

重點 2：三次函數的圖形

1.意義：任意給定三次函數 $f(x)$，可將 $f(x)$表為 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式，此表示法稱為**三次函數的標準式**

2.特殊的標準式：$f(x)=ax^3+px$

性質：(1) $f(0)=0$，即圖形通過原點(0，0)

(2)當 $f(x)=ax^3+px$ 時，則 $f(-x)=a(-x)^3+p(-x)=-f(x)$，即 $f(x)$的圖形是以原點為對稱中心的點對稱圖形

3.圖形的平移：

任意三次標準式 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，可經由平移得 $g(x)=ax^3+px$

4. $f(x)=ax^3+px$ 之特性：

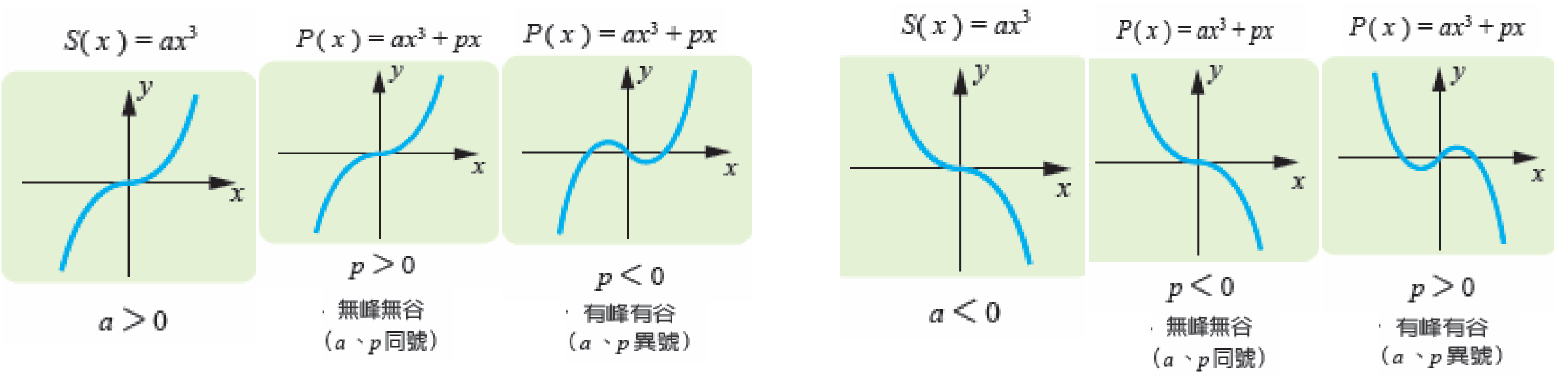
(1)若 ax^3 與 px 的值同號時，相加有加成效果；異號時，相加有抵銷效果

(2)當$|x|$很大時，ax^3 對 $f(x)$值的大小之影響遠大於 px 對 $f(x)$的影響；

當 $a>0$ 時，$f(x)>0$；當 $a<0$ 時，$f(x)<0$

當$|x|$很小時，px 對 $f(x)$值的大小之影響遠大於 ax^3 對 $f(x)$的影響；

當 $a>0$ 時，$f(x)<0$；當 $a<0$ 時，$f(x)>0$

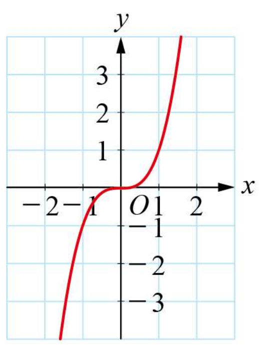


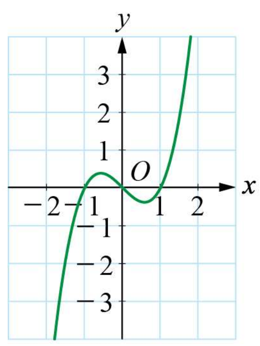
註：(1)三次函數 → 標準式 → 平移 → 得到形如 $P(x)=ax^3+px$ 的圖形

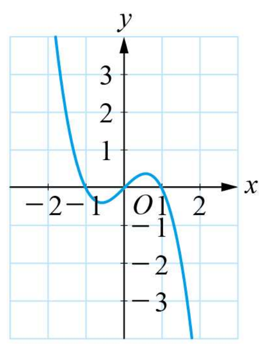
(2)因 $P(x)$是以原點為對稱中心的點對稱圖形，所以所有三次函數都是**點對稱圖形**

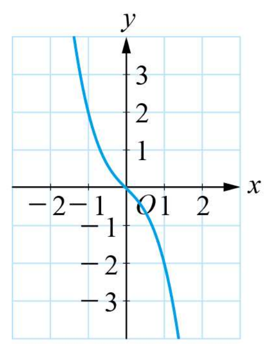
例 2.1：三次函數 $y=ax^3+px$ ， $p\neq 0$ 圖形的特徵：

(1) $y=x^3+x$　(2) $y=x^3-x$　(3) $y=-x^3+x$　(4) $y=-x^3-x$









Ex2.1：試將下列三次函數的圖形作適當配對：

(1) $y=x^3+2x$　(2) $y=2x^3-3x$　(3) $y=-x^3+2x$　(4) $y=-2x^3-3x$

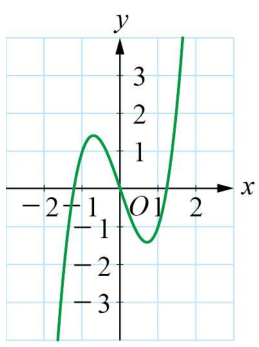


圖 A

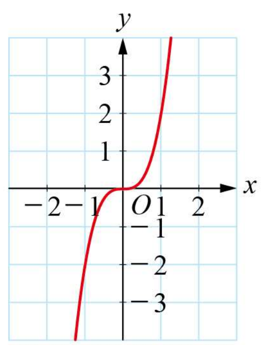


圖 B

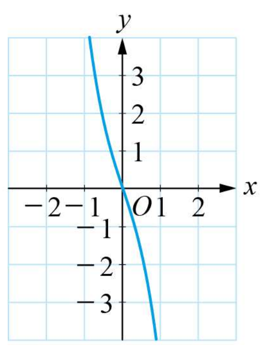


圖 C

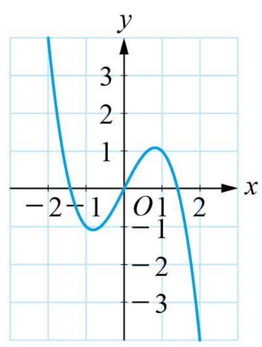


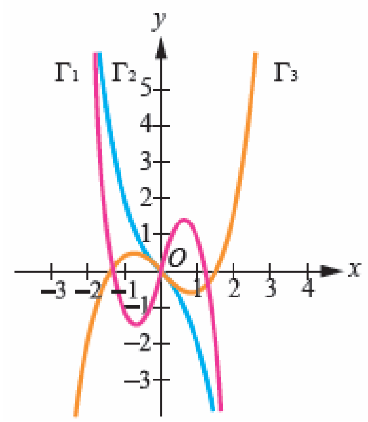
圖 D

Ex2.11：請將下列函數連到所對應的函數圖形之代號上：

$y=-2x^3+3x$ •　　　• Γ_1

$y=\dfrac{1}{2}x^3-x$ •　　　• Γ_2

$y=-x^3-x$ •　　　• Γ_3



重點 3：三次函數 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的標準式

1.三次函數一般式 $f(x)=y=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$ 都可以經由配三次方化成 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的標準形式

註：立方公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

說明：$y=ax^3+bx^2+cx+d=a(x^3+\dfrac{b}{a}x^2)+cx+d=a(x+\dfrac{b}{3a})^3-\dfrac{b^2}{3a}x-\dfrac{b^3}{27a^2}+cx+d$

$$=a(x+\frac{b}{3a})^3+(c-\frac{b^2}{3a})(x+\frac{b}{3a})+(-\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{bc}{3a}+d)$$

$$=a(x-h)^3+p(x-h)+k$$

其中(公式) $\boldsymbol{h=}-\dfrac{b}{3a}$　$\boldsymbol{p=}c-\dfrac{b^2}{3a}=c+bh$　$\boldsymbol{k=}-\dfrac{b^3}{27a^2}+\dfrac{b^3}{9a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d=f(-\dfrac{b}{3a})$

註：求出 $\boldsymbol{h}$ 值，利用泰勒展式，將 $f(x)$表為以 $x-h$ 為因式的多項式

2.三次函數 $f(x)=y=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的圖形皆可由 $y=ax^3+px$ 的圖形**平移(h，k)**得到

且點**(h，k)**$=(-\dfrac{b}{3a}$，$f(-\dfrac{b}{3a}))$為圖形的**對稱中心**，圖形是一條點對稱的曲線，既**沒有最高點也沒有最低點**

例 3.1：請將下列三次函數表為其標準式 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^3+3$　(2) $f(x)=x^3+3x^2-2$　(3) $f(x)=2x^3-6x^2+3x+2$

Ex3.1：請將下列三次函數表為其標準式 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式：

(1) $f(x)=-x^3+3x^2+1$ (2) $g(x)=2x^3+12x^2-31$

例 3.2：設 $f(x)=-x^3+3x^2-x+2$，$g(x)=-x^3+2x$，則：

(1)試將 $f(x)$化為標準式

(2) $f(x)$的圖形是否經過平移成為 $g(x)$？若是？如何平移的？

(3) $f(x)$是否為點對稱圖形，若是？求其其對稱中心坐標為何？

Ex3.2：設 $f(x)=(x-1)^3+3(x-1)+2$，$g(x)=x^3+3x$，試求：

(2) $f(x)$的圖形是如何平移成為 $g(x)$？

(3) $f(x)$的對稱中心坐標為何？

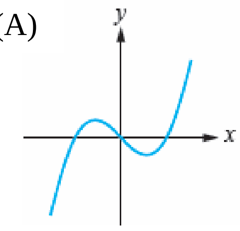
例 3.3：設 $f(x)=x^3-3x^2+2x-2$，則：

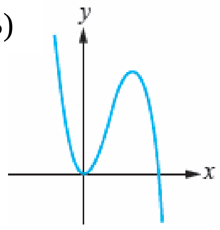
(1) $f(x)$可由哪一個形如 $P(x)=ax^3+px$ 的函數平移後得到？

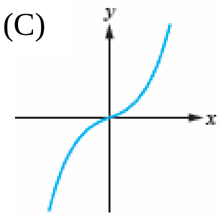
(2)藉由 $P(x)$的圖形，畫出 $f(x)$的圖形並標出對稱中心

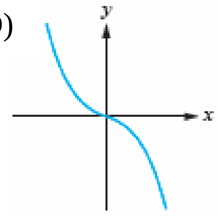
Ex3.3：已知 $f(x)=-x^3+6x^2=-(x-2)^3+12(x-2)+16$，則：

(1)下面哪一個圖形可能是 $f(x)$的圖形？

(A)


(B)


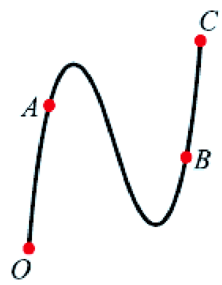
(C)


(D)


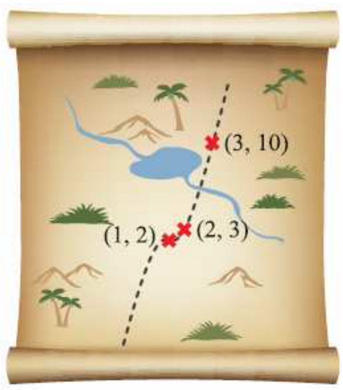
(2) $f(x)$的點對稱中心為何？

例 3.4：主辦單位在平面坐標上，設計一個三次函數的圖形作為路跑的路線。已知起跑點為原點 O，終點為 $C(9，s)$，路線上的兩點 $A(1，25)$，$B(7，7)$為補給站，且兩補給站對稱於圖形的對稱中心，求：

(1)圖形的對稱中心　(2)此三次函數　(3)實數 s 的值



Ex3.4：數學夏令營設計一個尋寶活動，內容是：在活動區域設定一個平面坐標，並將十件珠寶埋藏在一個三次函數圖形上的十個點；對學員只提示第一件珠寶埋在圖形的對稱中心(1，2)處，第二件埋在點(2，3)處，第三件埋在點(3，10)處，而不告訴其餘七件珠寶的埋藏處。請你幫忙找出此三次函數，還原藏寶路線圖



重點 4：三次函數的局部

1.意義：任給三次函數 $f(x)$上一點$(d，r)$，可利用連續的綜合除法將 $f(x)$表為$(x-d)$的多項式，

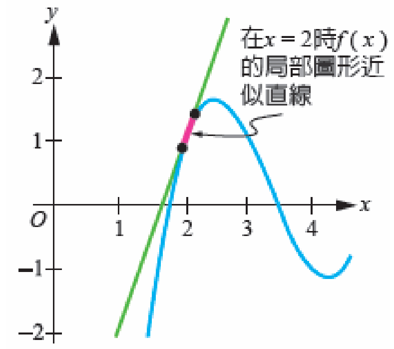
如 $f(x)=a(x-d)^3+b(x-d)^2+c(x-d)+r$，則在 $x=d$ 附近 $f(x)$的局部圖形會近似於 $l(x)=c(x-d)+r$ 的圖形

例如：設 $f(x)=x^3-10x^2+31x-29=(x-2)^3-4(x-2)^2+3(x-2)+1$，$f(x)$上一點$(2，1)$

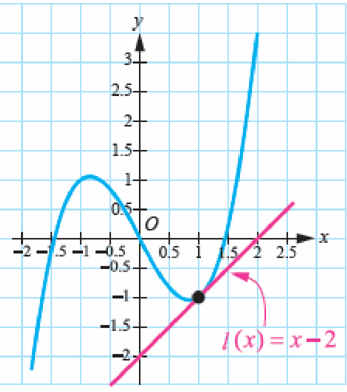
在 x 與 2 距離$=|x-2|\le 0.001$ 時，$(x-2)^3$ 與$(x-2)^2$ 的值非常接近 0，

而一次式 $3(x-2)$和常數項 1，對 $f(x)$的值影響較多，

得知 $f(x)$的圖形在 $x=2$ 附近會近似一條直線，即 $y=3(x-2)+1$



例 4.1：請問 $f(x)=x^3-2x$ 在 $x=1$ 時，附近的圖形會近似於哪一個一次函數？



Ex4.1：請問下列三次函數在給定的 x 值時，附近的圖形會近似於哪一個一次函數？

(1) $f(x)=x^3-2x+1$，在 $x=1$

(2) $g(x)=-2x^3+3x$，在 $x=-2$

(3) $h(x)=\frac{1}{2}x^3-x$，在 $x=0$