Ch 1.2 式子的運算　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：恆等式與乘法公式

A.恆等式：當一個式子用任何數代入，等號兩邊的結果都相等，稱這樣的等式為「**恆等式**」

B.常用之乘法公式(都是恆等式)：

1.完全平方：

(1)$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　(2)$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　(3)$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

註：$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$　或$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

2.分配律：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

3.平方差：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

4.完全立方：

(1)$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2)$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

5.立方和：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

6.立方差：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

7.展開式公式：

(1)$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

(2)$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma$

例 1.1：利用乘法公式展開下列各式：

(1) $(x+3)^2$　(2) $(2x-1)^2$　(3) $(3x-2)(3x+2)$

例 1.2：完成展開 $(a+b)^3=(a+b)^2\,(a+b)=$________

例 1.3：利用完全立方和，展開 $(a-b)^3=[a+(-b)]^3=$________

例 1.4：下列各式皆不為恆等式，試說明為何不是恆等式？

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

(2) $a^3-3a=2a-6$

重點 2：求值

利用乘法公式求值：

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
2. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
3. $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$
4. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$
5. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a-b)$

例 2.1：設實數 a，b 滿足 $a+b=4$，$ab=2$，試求下列各值：(1) a^2+b^2 (2) a^3+b^3

例 2.2：試將下列各式因式分解：(1) x^3-27 (2) $27x^3+8$ (3) $27x^3-27x^2+9x-1$

重點 3：分式的運算及求值

1.意義：將分數中的分母、分子分別利用多項式取代，形成一分式，其化簡方式與分數類似

2.分式求值：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})^3-3(x+\dfrac{1}{x})$

(3) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=(x-\dfrac{1}{x})^3+3(x-\dfrac{1}{x})$

例3.1：化簡下列各分式：(1) $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ (2) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x}{x+1}$ (3) $\dfrac{\frac{2n+1}{n+1}}{2+\frac{1}{n}}$

例 3.2：已知 $x+\dfrac{1}{x}=5$，試求下列各式之值：(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ (2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

重點 4：根式的運算

1.意義：一般稱含有「根號」的式子稱為**根式**

2.平方根：若實數 x 滿足 $x^2=a\geq 0$，稱 x 是 a 的平方根，記為 $x=\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$，其中 $\sqrt{a}$ 讀作(二次)根號 a，
一個正數的平方根有 2 個，且互為相反數

3.實數根式運算性質：

(1)當 a，$b\geq 0$ 時，$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$；$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，$b\neq 0$

(2)對任意實數 x，則 $\sqrt{x^2}=|x|$

(3)利用因式分解作根式化簡

4.根式的有理化：將分母化為沒有根號的過程稱為**有理化分母**，即分子、分母同時乘上分母之**有理化因子**

例 4.1：化簡下列各式：(1) $\sqrt{108}$　(2) $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$　(3) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

重點 5：雙重根號

1.意義：設 A，B≥ 0，且 $A\geq\sqrt{B}$，則型如 $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ 或 $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ 等，稱為**雙重根號**

2.(標準)雙重根式運算公式：設 x，y 為正整數，則：

(1)若 x，$y\geq 0$，則 $\sqrt{(x+y)+2\sqrt{xy}}=\sqrt{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

(2)若 $x\geq y\geq 0$，則 $\sqrt{(x+y)-2\sqrt{xy}}=\sqrt{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}=\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

例 5.1：化簡下列各雙重根式：

(1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$　(2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$　(3) $\sqrt{6+\sqrt{20}}$　(4) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$　(5) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$

例 5.2：已知$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$的整數部分為 a，小數部分為 b，求 $a+\dfrac{1}{b}$的值

重點 6：算幾不等式

1.定義：設兩數 $a\geq 0$，$b\geq 0$，則$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ，且當 $a=b$ 時，等號才成立，稱為**算幾不等式**

其中$\dfrac{a+b}{2}$為 a，b 兩數的**算術平均數**(等差中項)，$\sqrt{ab}$ 為 a，b 兩數的**幾何平均數**(等比中項)

即**算幾不等式**就是**算術平均數 ≥ 幾何平均數**

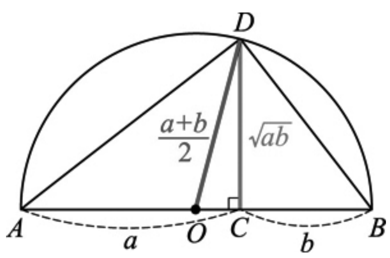
說明 1：$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$

(1)當 $a=b$ 時，$\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}=0$，即$\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

(2)當 $a\neq b$ 時，$\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}>0$，即$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

說明 2：右圖中$\overline{CD}=\sqrt{ab}$ ，半徑$\overline{OD}=\dfrac{a+b}{2}$ ，即$\overline{OD}\geq\overline{CD}$，所以$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

當 $a=b$ 時，$\overline{OD}$與$\overline{CD}$重合，此時$\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$



例 6.1：設矩形長度為 a，寬度為 b，則面積為 36 的所有矩形中，哪一種矩形的周長最短？最短周長為多少？

例 6.2：設 a，b 皆為正數，且 $3a+b=8$，試求：

(1)當 a，b 各為多少時，ab 有最大值？　　(2) ab 最大值為何？