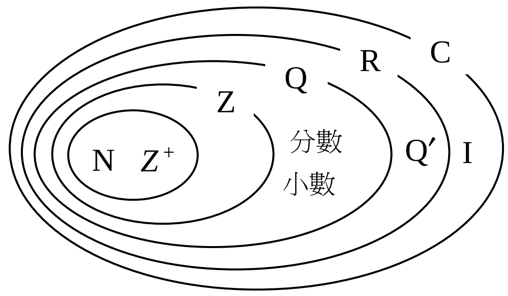
Ch 1.1 實數　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：數系

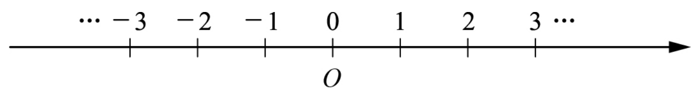
1.數系：

- 複數(C)
  - 實數(R)
    - 有理數(Q)
      - 整數(Z)
        - 正整數(Z^+)
        - 零
        - 負整數(Z^-)
      - 分數
      - 小數
    - 無理數(Q')
  - 虛數(I)



註：自然數(N)又稱為正整數(Z^+)

2.數線：平面上取一點為原點 O，坐標為 0，令一單位長度為 1，規定原點右方為正，左方為負，形成數線，如圖



註：(1)數線三元素為：**原點、方向、單位長**

(2)數線上的每個點都代表一個**實數**

重點 2：實數－有理數與無理數

1.有理數：凡是可以表示成分數$\dfrac{n}{m}$形式的數(m，n 為整數，且 $m\neq 0$)，稱為**有理數**(以 Q 表示)，否則稱為**無理數**

$\Rightarrow$有理數包含：$\begin{cases}\text{整數(正整數、零、負整數)}\\ \text{分數(真分數、假分數、帶分數)}\\ \text{小數(純小數 、混小數)}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\text{整數(正整數、零、負整數)}\\ \text{有限小數}\\ \text{循環的無限小數}\end{cases}$

2.有理數性質：

(1)有理數都可以化成有限小數或循環的無限小數等

(2)有理數的表示法**不唯一**，如$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{6}=\cdots$等。常化簡為**最簡分數**(分子，分母為整數且互質)

(3)具**封閉性**：任意兩個有理數作加、減、乘、除(除數不可以為 0)的運算後，仍然為有理數，稱為**封閉性**

註：兩個整數相加、相減、相乘，得到的結果還是整數，但兩個整數相除不一定是整數
即整數對加、減、乘法具有封閉性，但是除法不具有封閉性

(4)有理數相等：當兩有理數$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$時，$bd\neq 0$，則 $ad=bc$

例 2.1：試判斷下列何者是正整數、整數、有理數、無理數、實數，並填入空格中

(A) 2355　(B)-80.0　(C)-3.75　(D) $15\sqrt{2}$　(E)$\dfrac{5}{8}$　(F)$-\dfrac{11}{7}$　(G)圓周率π　(H)$\sqrt{\dfrac{25}{16}}$

解：(1)正整數有：_______　(2)整數有：_________

(3)有理數有：_______________　(4)無理數有：___________

(5)實數有：_________________

例 2.2：設 a，b 皆為整數，則下列哪些敘述是正確的？

(1) $a+b$ 為整數　(2) $a-b$ 為整數　(3) ab 為整數　(4)$\dfrac{a}{b}$為整數

例 2.3：若兩個有理數 $\frac{45}{99}$ ，$\frac{x}{2x+1}$ 相等，試求整數 x 之值

重點 3：有理數與有限小數、循環小數

1.有理數必可化為**有限小數**(除得盡)或**循環的無限小數**(除不盡)

2.有限小數：最簡分數中，分母只含 2 或 5 的質因數，則此最簡分數可化為有限小數

3.循環的無限小數：重複出現的同一串數字，稱為「**循環節**」，其個數稱為「**循環節數**」

4.有限小數或循環小數都可以化為分數，故循環小數為有理數

例 3.1：將下列分數化為有小數？若為循環小數時，指出其循環節？

(1) $\frac{7}{25}$　(2) $\frac{5}{32}$　(3) $\frac{3}{48}$　(4) $\frac{35}{11}$

例 3.2：若將 $\frac{3}{7}$ 化為小數，則小數點以下第 99 位數字為何？

例 3.3：試將下列小數化為最簡分數：

(1) 0.36　(2) $0.\overline{32}$　(3) $0.8\overline{32}$　(4) $3.\overline{18}$

重點 4：有理數的稠密性(denseness)

1.有理數的稠密性定義：

任意兩個有理數之間至少有一個有理數存在。即相異兩有理數之間有無限多個有理數，故有理數在數線上是非常稠密的，稱此性質為有理數在數線上具有**稠密性**

註：在數線上，兩個整數之間不一定有整數，但它們的中點為**有理數**最佳代表點

即設 a，b 是兩有理數，且 $a<b$，則中點 $\dfrac{a+b}{2}$ 是介於 a，b 之間的有理數 (因為 $a<\dfrac{a+b}{2}<b$)

$\Rightarrow$任意兩個有理數之間有**無限多個有理數**。因此有理數在數線上是非常稠密的，稱為有理數在數線上有**稠密性**

2.整數的**離散性**：若 x，$y\in Z$，$x\neq y$，則 $|x-y|\geq 1$

3.實數的三一律：數線上的數都是實數，比較實數的大小，滿足三一律

$\Rightarrow$若 a，b 皆為實數，則 $a<b$、$a=b$、$a>b$ 三種情形，只有一種會發生，稱為三一律

例 4.1：下列哪些數是有理數？

(1)0.75　　(2)$-0.5\overline{7}$　　(3)$\dfrac{2}{3}$　　(4) 0　　(5)-3

例 4.2：試在 $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{3}{8}$ 之間找出三個有理數，並說明可找到多少個有理數？

重點 5：無理數

1.意義：凡是無法表示成分數 $\dfrac{n}{m}$ 形式的數(m，n 為整數，且 $m\neq 0$)，或「不是有理數的數」，稱為**無理數**

一般以 Q'表示無理數，無理數也稱為「**不循環的無限小數**」

註：常見的無理數有 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，π(圓周率)…

2.性質：

(1)數線上不是有理數之點，稱為**無理數**，故數線上的數(稱為實數，數線又稱實數線)是由有理數、無理數所組成

(2)設 a，b 為有理數，若 $a+b\sqrt{2}=0$，則 $a=b=0$

3.無理數的近似值求法：

(1)電子計算機　　(2)查表法　　(3)十分逼近法　　(4)直式開方法

4.無理數在數線上的表示法：如右圖

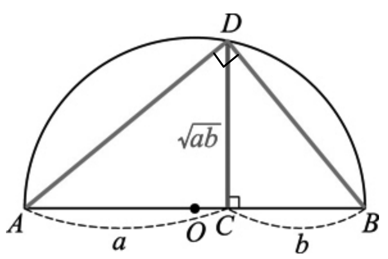
(1)利用平方根的尺規作圖

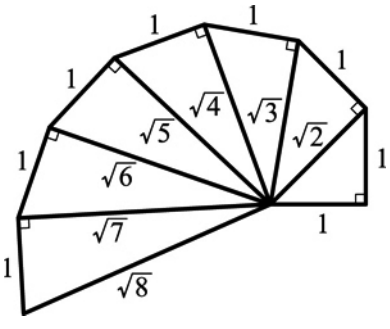
(2)利用母子相似三角形的比例性質

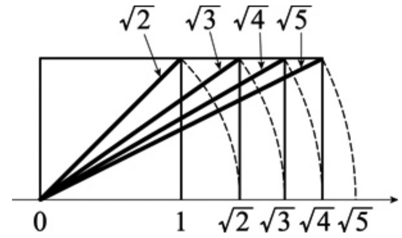
5.可以利用尺規作圖，將數表示在數線上的數有：

(1)所有的有理數

(2)無理數型如 $\sqrt[n]{a}$，其中 $a>0$，$n=2^k$，k 為整數







例 5.1：試在數線上畫出$\sqrt{2}$，並證明$\sqrt{2}$是無理數。(提示：利用兩邊長為$\sqrt{2}$和 1 的直角三角形)

例 5.2：已知 a，b 是有理數，且$(2-\sqrt{2})a+5\sqrt{2}\,b=4+3\sqrt{2}$，求 a，b 的值

例 5.3：利用計算機、直式開方法，求$\sqrt{10}$的近似值。(以無條件捨去法求至小數第一位)

例 5.4：下列的敘述哪些是正確的？(多選)

(1)無理數加無理數也是無理數　(2)無理數乘無理數也是無理數

(3)不為零的有理數乘上無理數是無理數　(4)有理數減無理數必是無理數

(5)無理數除以無理數也是無理數

重點6：實數的絕對值

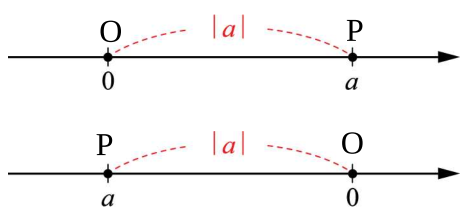
1.定義：實數 x 的絕對值，記為$|x|$，讀做 x 的絕對值，定義為$|x|=\begin{cases} x\,,\text{當 } x\geq 0 \\ -x\,,\text{當 } x<0 \end{cases}$

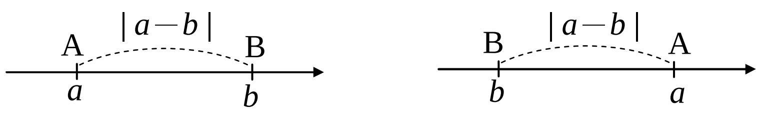
2.幾何意義：

(1)對任意實數 x，則$|x|\geq 0$

(2)若數線上 P 點坐標是 a，則$|a|=|a-0|$表示 P 點與原點的距離

(3)數線上兩相異點 A(a)，B(b)的距離$\overline{AB}=|a-b|$也是 a 與 b 的距離





3.絕對值的性質：

(1) $|0|=0$，若 $a\neq 0$，則$|a|>0$　(2) $|a|=|-a|$　(3) $|ab|=|a||b|$

(4)$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$，$b\neq 0$　(5) $|a-b|=\begin{cases} a-b\text{，當 } a\geq b \\ b-a\text{，當 } a\leq b \end{cases}$

例 6.1：試說明下列各式的幾何意義，並求出其 x 之值：

(1) $|x|=3$ (2) $|x-1|=3$

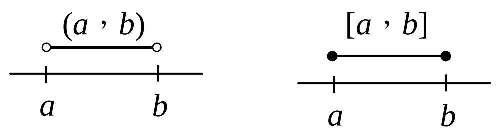
例 6.2：設 a，b 都是實數，若方程式 $|x-a|=b$ 之解為 $x=-1$ 或 $x=7$，試求 a，b 之值

重點 7：區間的表示法與絕對值不等式

1.意義：設 a，b 為實數，a，b 為端點且 $a<b$，規定：

(1)開區間：$(a，b)=\{x\,|\,a<x<b，x\in R\}$

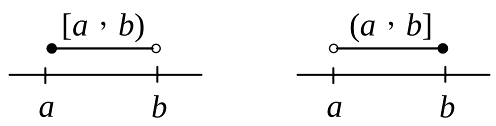
(2)閉區間：$[a，b]=\{x\,|\,a\le x\le b，x\in R\}$



(3)半閉區間(半開區間)：

$[a，b)=\{x\,|\,a\le x<b，x\in R\}$

$(a，b]=\{x\,|\,a<x\le b，x\in R\}$



(4)只有一端點 a 之區間表示：

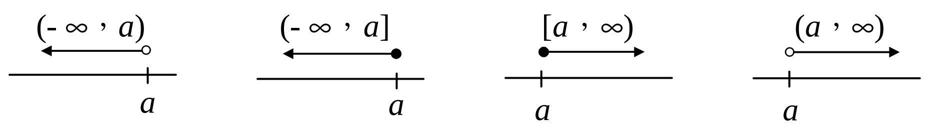
$(-\infty，a)=\{x\,|\,x<a，x\in R\}$

$(-\infty，a]=\{x\,|\,x\le a，x\in R\}$

$(a，\infty)=\{x\,|\,x>a，x\in R\}$

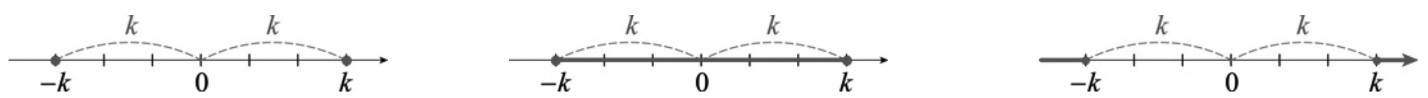
$[a，\infty)=\{x\,|\,x\ge a，x\in R\}$

$(-\infty，\infty)=\{x\,|\,x\in R\}$

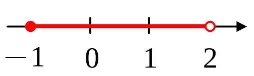


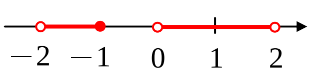
2.解的範圍：設 k 是正實數

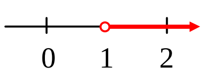
(1)若 $|x|=k$，則 $x=k$ 或 $x=-k$ (2)若 $|x|\le k$，則 $-k\le x\le k$ (3)若 $|x|\ge k$，則 $x\ge k$ 或 $x\le -k$

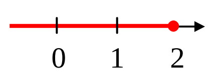


例 7.1：試以區間表示下列各範圍涵蓋的數：

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

(5) $92\le x<107$ (6) $x\ge 2017$

例 7.2：試求下列各不等式中 x 的範圍，並在數線上標示其解

(1) $|x-1|<3$　(2) $|x+3|>2$　(3) $|x-2|\geq 3$

例 7.3：解不等式 $|2x-1|<3$，並在數線上標示其解

例 7.4：某鳳梨酥包裝標示重量為 50g ± 5g，若假設商品實際重量為 x 公克，試求 a，b 滿足 $|x-a|\leq b$