

重點 1：直圓錐面概論

1.圓錐幾何圖形：



冰淇淋甜筒



聖誕裝置



花束包裝紙



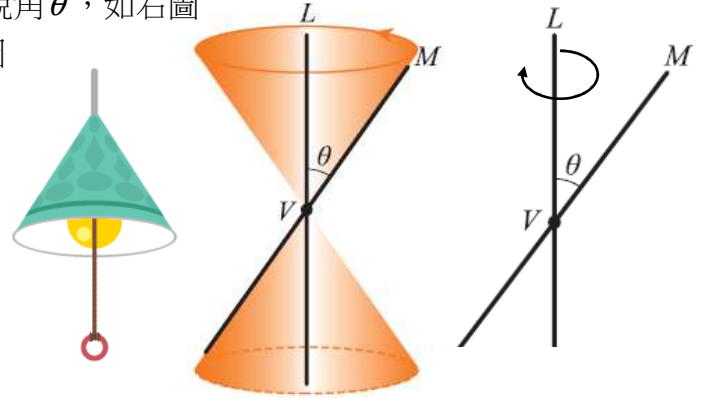
德國藝術展覽館



荷蘭台夫特理工大學圖書

2.定義：在空間中，設  $L$  與  $M$  為兩條相交於  $V$  點的直線，且交角為銳角  $\theta$ ，如右圖以直線  $L$  為軸，將直線  $M$  維持角  $\theta$  繞軸  $L$  旋轉一圈，如右圖如此所形成的曲面稱為直圓錐面，而直線  $M$  為直圓錐面的一條母線， $V$  稱為頂點

例如：懸掛的吊燈，其燈罩就是以拉線為軸的直圓錐面之一部分

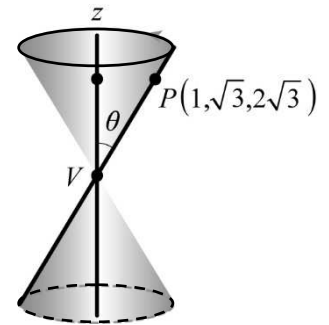


◎直圓錐面

例 1.1：右圖為坐標空間中的一直圓錐面，其頂點  $V$  為原點  $(0, 0, 0)$ ，直圓錐面的軸為  $z$  軸。

已知  $P(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$  在直圓錐面上，求：

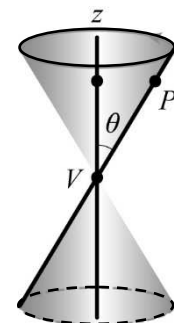
- (1)  $P$  點在  $z$  軸上的投影點  $Q$
- (2) 此直圓錐面通過  $P$  點的母線與  $z$  軸的銳夾角  $\theta$



Ex1.1：右圖為坐標空間中的一直圓錐面，其頂點  $V$  為原點  $(0, 0, 0)$ ，直圓錐面的軸為  $z$  軸。

已知  $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$  在直圓錐面上，求：

- (1)  $P$  點在  $z$  軸上的投影點  $Q$
- (2) 此直圓錐面通過  $P$  點的母線與  $z$  軸的銳夾角  $\theta$



例 1.2：常見的生日帽是一個直圓錐面的一部分，如下圖所示，選出正確的選項：

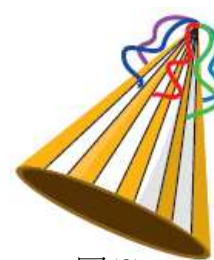
- (1) 深紅色與淺紅色交接的黑線都是該生日帽的母線
- (2) 綠色與白色交接的黑線都是該生日帽的母線
- (3) 黃色與白色交接的黑線都是該生日帽的母線



圖(1)



圖(2)



圖(3)

Ex1.2：在坐標空間中，將  $x$  軸繞  $z$  軸旋轉一圈，選出旋轉出來的圖形為何？

- (1) 直圓錐面
- (2) 平面
- (3) 圓柱
- (4) 球

重點 2.1：圓錐截痕—圓

1. 定義：一個平面  $E$  與直圓錐面  $\Omega$  相交的圖形，稱為平面  $E$  與直圓錐面  $\Omega$  的截痕

2. 截痕：設  $E$  為不通過直圓錐面頂點的平面

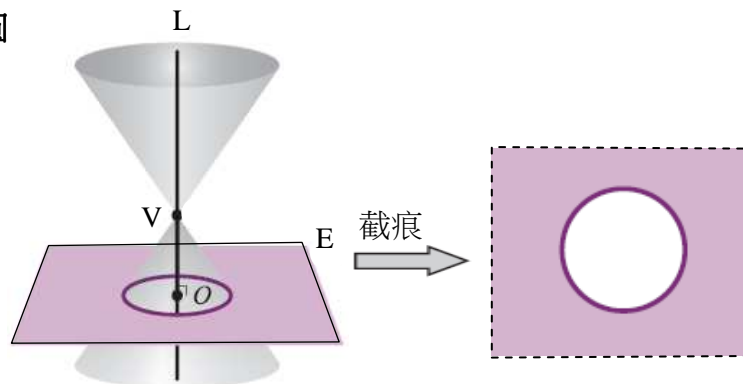
(1) 當平面  $E$  與「軸  $L$  垂直」時，平面  $E$  與直圓錐面的截痕為圓

◎性質：

(i) 直圓錐面的頂點  $V$  與截痕的圓心  $O$  之距離  $\overline{VO}$ ，恰為頂點  $V$  與平面  $E$  的距離

(ii) 圓上的任意一點到頂點  $V$  的距離皆相等

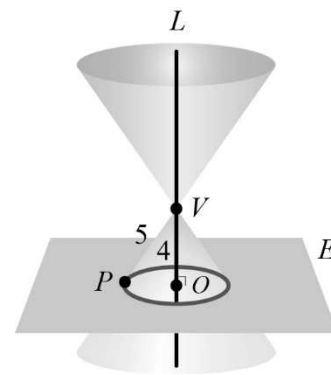
(2) 見重點 2.2



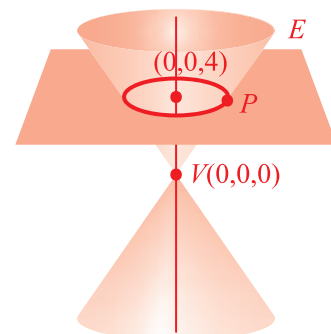
◎圓錐截痕

例 2.1：空間中一直圓錐面以直線  $L$  為軸，頂點為  $V$ 。今平面  $E$  與直圓錐面的截痕為一圓，其圓心為  $O$ 。已知  $P$  為圓上任一點，選出正確的選項：

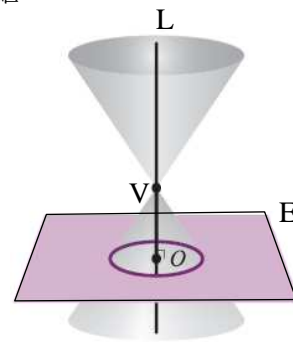
- (1) 平面  $E$  可能通過  $V$  點
- (2) 軸  $L$  與平面  $E$  垂直
- (3) 軸  $L$  與直線  $VO$  重合
- (4) 若  $\overline{PV} = 5$ ，且  $V$  點與平面  $E$  的距離為 4，則圓半徑為 3



Ex2.1：坐標空間中一直圓錐面，頂點  $V$  為原點  $(0, 0, 0)$ ，軸為  $z$  軸。今平面  $E$  與直圓錐面的截痕為一圓，其圓心為  $(0, 0, 4)$ 、半徑為 3。已知  $P$  為圓上任意一點，求  $\overline{PV}$  的長度

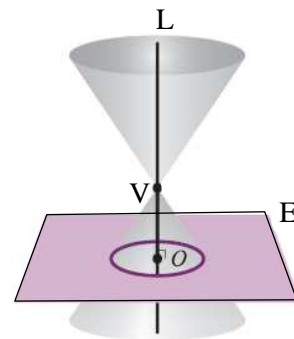


例 2.2：已知空間中一平面  $E$  與直圓錐面截出半徑為 5 的圓，且圓上任意一點與直圓錐面頂點  $V$  的距離為 13，求  $V$  點與平面  $E$  的距離



Ex2.2：已知空間中一平面  $E$  與直圓錐面截出半徑為 1 的圓，此直圓錐的任意一條母線與軸  $L$  的銳夾角為  $45^\circ$ ，求：

- (1)圓上任意一點與直圓錐面頂點  $V$  的距離
- (2)直圓錐面頂點  $V$  與平面  $E$  的距離



**重點 2.2：圓錐截痕－橢圓**

(2)當平面  $E$  稍作傾斜使其「不垂直軸  $L$ ，不與任何一條母線平行，且只與其中一個錐面相交」，此時平面  $E$  與直圓錐面的截痕為**橢圓**

◎性質：橢圓上任意一點到頂點  $V$  之距離不全相等

設橢圓上距離頂點  $V$  最近的點為  $A$ ，最遠的點為  $B$ ，則：

①直線  $AB$  稱為橢圓的長軸，其長度為  $\overline{AB}$ ，

即橢圓的長軸長 =  $\overline{AB}$

②  $A, B$  兩點的中點  $O$  為橢圓的中心

③  $\overline{VO}$  為  $\triangle AVB$  在  $\overline{AB}$  邊上的中線

但直線  $VO$  與平面  $E$  並不垂直

④若直圓錐面母線與軸的夾角為  $\theta$ ，

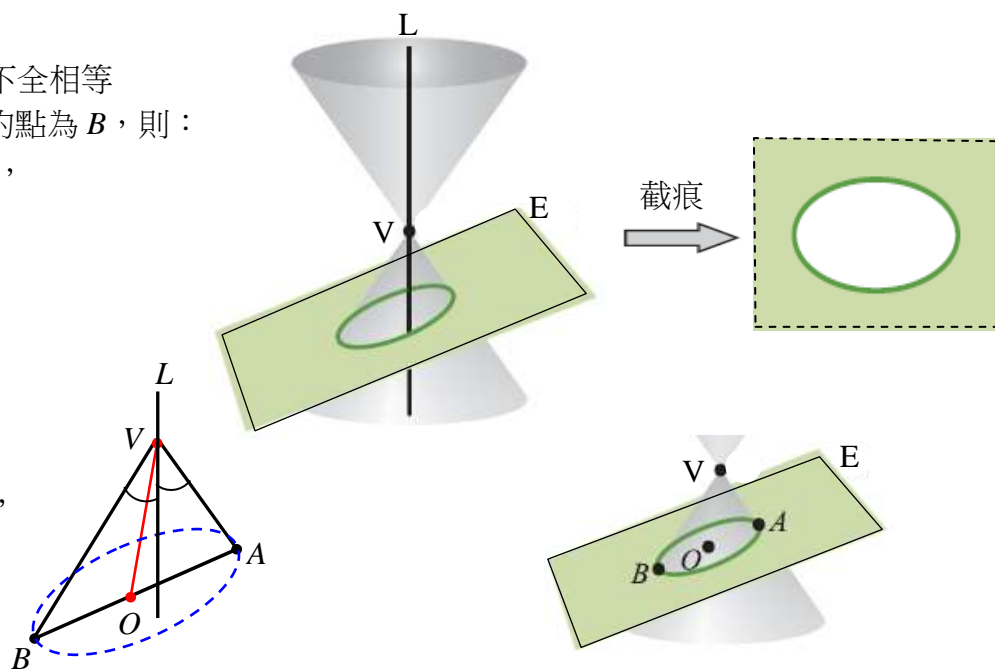
則  $\angle AVB = 2\theta$

因為  $\overline{VO}$  為  $\triangle AVB$  的中線，且  $\overline{AV} \neq \overline{BV}$ ，

$\therefore \angle AVO \neq \angle BVO$

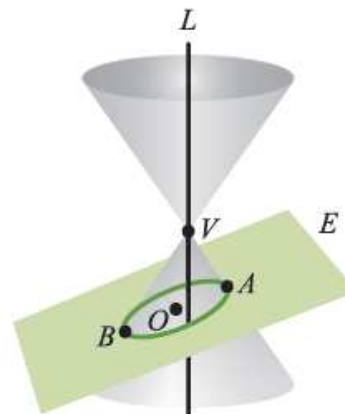
註： $\overline{VO}$  不是  $\angle AVB$  的角平分線

(3)見重點 2.3



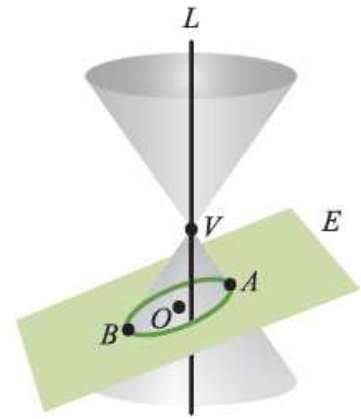
例 2.3：空間中一直圓錐面以直線  $L$  為軸，頂點為  $V$ 。今平面  $E$  與直圓錐面的截痕為一橢圓，令橢圓的中心為  $O$ ，且橢圓上距離頂點  $V$  最近的點為  $A$ ，最遠的點為  $B$ ，選出正確的選項：

- (1)平面  $E$  不通過  $V$  點
- (2)軸  $L$  通過  $O$  點
- (3) $\overline{VO}$  為  $\triangle AVB$  的角平分線
- (4)若  $\overline{AV} = 5$ ， $\overline{BV} = 8$ ， $\angle AVB = 60^\circ$ ，則橢圓的長軸長為 7

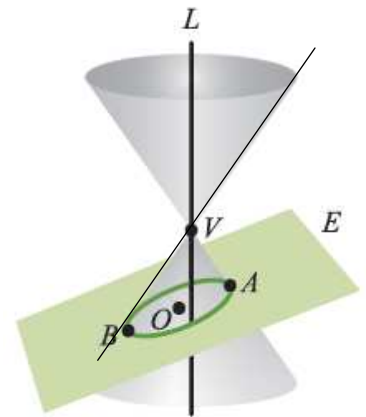


Ex2.3：空間中一直圓錐面以直線  $L$  為軸，頂點為  $V$ 。今平面  $E$  與直圓錐面的截痕為一橢圓，令橢圓的中心為  $O$ ，且橢圓上距離頂點  $V$  最近的點為  $A$ ，最遠的點為  $B$ ，已知  $\overline{AV} = 3$ ， $\overline{BV} = 5$ ， $\angle AVB = 120^\circ$ ，試求：

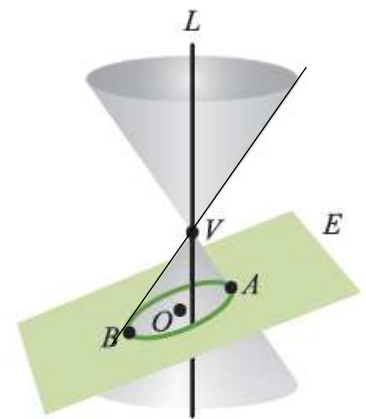
- (1) 橢圓的長軸長  $\overline{AB}$  的長度
- (2)  $\overline{VO}$  的長度



例 2.4：已知空間中一平面  $E$  與直圓錐面截出長軸長為 7 的橢圓，且橢圓上的點與直圓錐面頂點最近的距離為 3，最遠的距離為 8，求直圓錐面母線與軸的夾角



Ex2.4：已知空間中一平面  $E$  與直圓錐面截出長軸長為 13 的橢圓，且橢圓上的點與直圓錐面頂點最近的距離為 7，最遠的距離為 8，求直圓錐面母線與軸的夾角



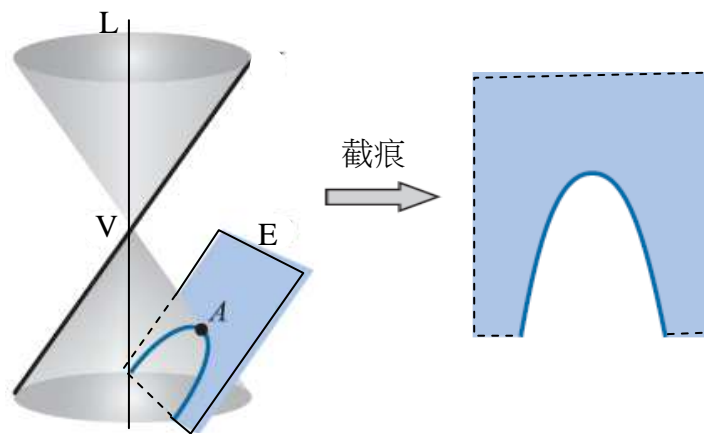
重點 2.3：圓錐截痕－拋物線、雙曲線

(3)當平面  $E$  傾斜使其與「某條母線  $M$  平行」，此時平面  $E$  與直圓錐面的截痕為拋物線  
因為平面  $E$  平行某條母線  $M$ ，即平面  $E$  與母線  $M$  不會有交點

◎性質：

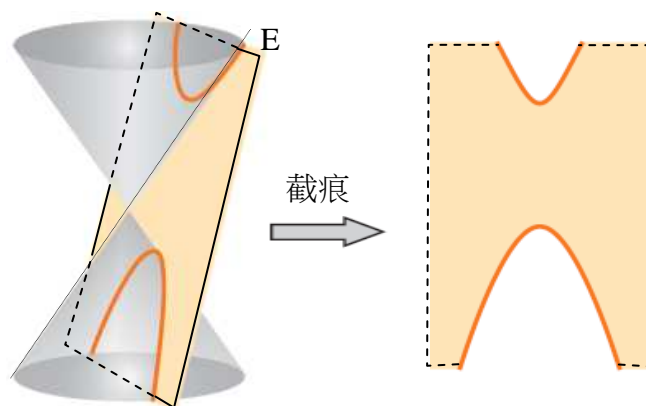
設拋物線上距離頂點  $V$  最近的點為  $A$ ，如右圖，則：

- ①平面  $E$  只與其中一個錐面相交
- ②平面  $E$  與直圓錐面所截出的截痕不會是封閉的曲線
- ③  $A$  點為拋物線的頂點



(4)當平面  $E$  傾斜使其與「上下兩個錐面均相交」，此時平面  $E$  與直圓錐面的截痕為雙曲線

註：若平面  $E$  與直圓錐面的軸  $L$  平行，則平面  $E$  一定與直圓錐面的兩個錐面均相交，此時平面  $E$  與直圓錐面的截痕必定為雙曲線



重點 2.4：圓錐截痕概論

1.圓錐曲線：圓錐截痕有圓、橢圓、拋物線與雙曲線，都是平面與直圓錐面相交所形成的圖形，統稱為圓錐曲線

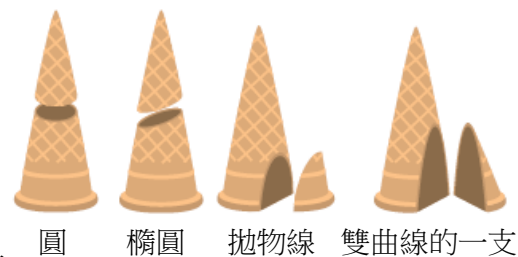
例如：冰淇淋筒形狀像個圓錐，如果用不同的角度切它，可以得到如下圖的各種情形

註：圓錐曲線退化圖形有點、一直線、相交二直線、無圖形

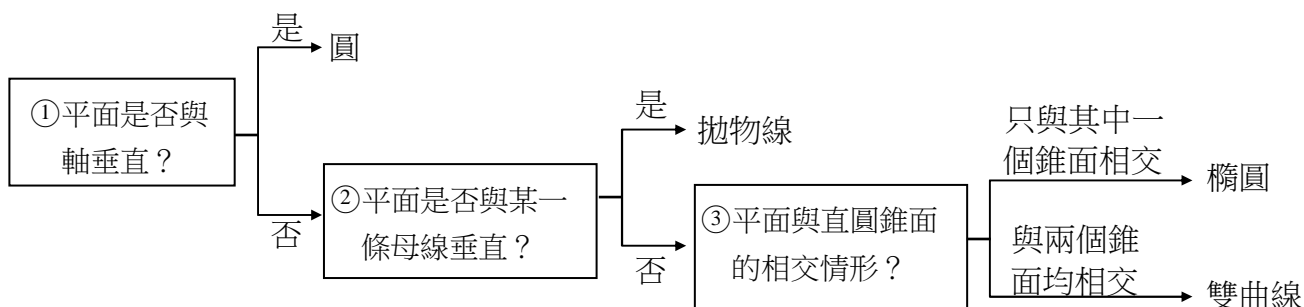
2.直圓錐面截痕概論：

設  $E$  為不通過直圓錐面頂點的平面，它與直圓錐面的截痕有以下四種情形：

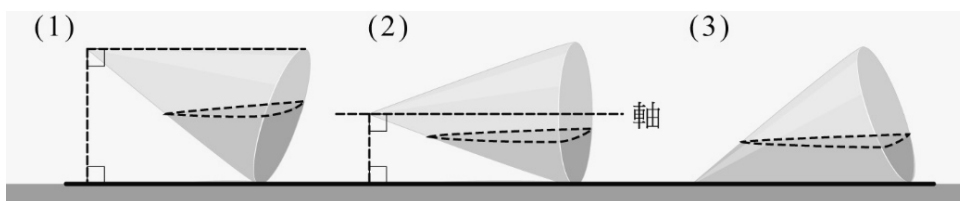
- (1)圓：平面  $E$  與軸垂直
- (2)拋物線：平面  $E$  與某條母線平行
- (3)橢圓：平面  $E$  不垂直軸，不與任何一條母線平行，且只與其中一個錐面相交
- (4)雙曲線：平面  $E$  與兩個錐面均相交



3.判斷方法：



例 2.5：一密閉圓錐形容器內裝有少於一半的水，今將容器放置如下列各圖。試問水平面與容器截痕中的曲線是哪個圓錐曲線的一部分？





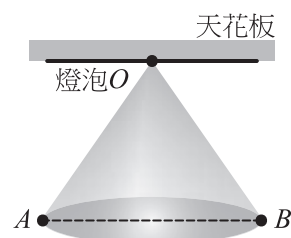
Ex2.5：右圖是一盞天花板的吊燈，已知其照射的燈光形成直圓錐狀，其直圓錐的軸與地板垂直且與牆壁平行，求燈光在時鐘所在的牆面上照亮區域所形成的邊界是哪個圓錐曲線的一部分？

- (1)圓 (2)拋物線 (3)橢圓 (4)雙曲線



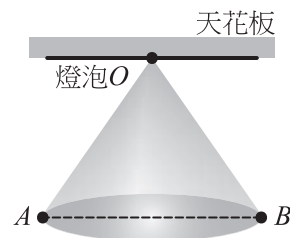
例 2.6：一燈泡  $O$  裝在離地 4 公尺的天花板上，其照射的燈光形成直圓錐狀，且直圓錐的軸與地板垂直，如右圖所示。

- (1)試問燈光在地面上照亮的區域為哪個圓錐曲線？  
 (2)其中  $A, B$  為照亮的區域中，其中一組距離最遠的兩個點，且  $\overline{AB} = 6$ ，求  $\cos \angle AOB$  的值



Ex2.6：一燈泡  $O$  裝在離地 4 公尺的天花板上，今將一塊垂直地板的海報板放置於燈光照射的區域內，但不在燈泡  $O$  的正下方，試問：燈光在海報板上照亮區域所形成的邊界是哪個圓錐曲線的一部分？

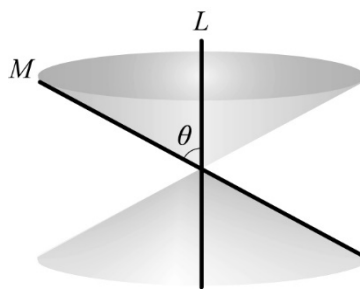
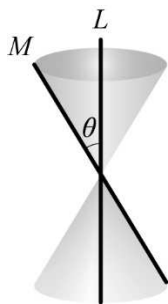
- (1)圓 (2)拋物線 (3)橢圓 (4)雙曲線



例 2.7：設一直圓錐面的軸為  $L$ ，某一條母線為  $M$ ，且  $L$  與  $M$  的銳夾角為  $\theta$ ，則：

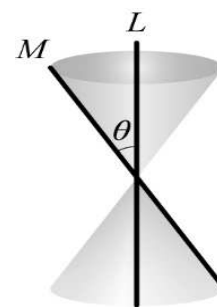
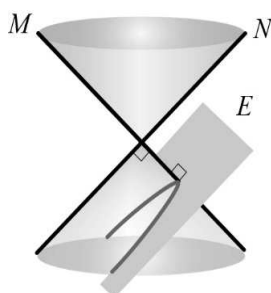
已知平面  $E$  不通過直圓錐面的頂點且與母線  $M$  垂直，試判斷：

- (1)當  $0^\circ < \theta < 45^\circ$  時，其圖形如下，求平面  $E$  與直圓錐面的截痕  
 (2)當  $\theta > 45^\circ$  時，其圖形如下，求平面  $E$  與直圓錐面的截痕

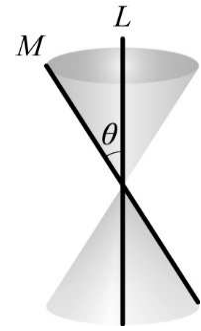


Ex2.7：設一直圓錐面的軸為  $L$ ，某一條母線為  $M$ ，且  $L$  與  $M$  的銳夾角為  $\theta = 45^\circ$  時，如圖判斷平面  $E$  與直圓錐面的截痕為何？

- (1)圓 (2)拋物線 (3)橢圓 (4)雙曲線

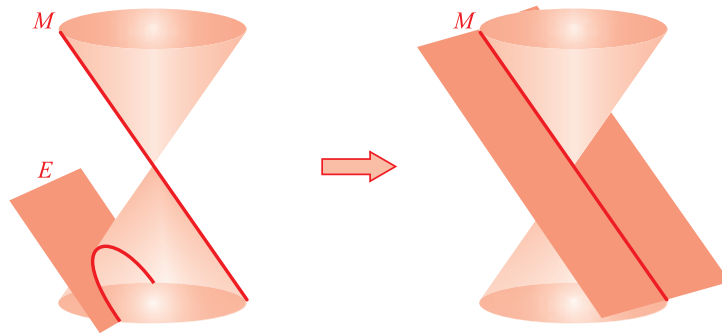


Ex2.71：設一直圓錐面的軸為  $L$ ，某一條母線為  $M$ ，且  $L$  與  $M$  的銳夾角為  $\theta=60^\circ$  時，如圖

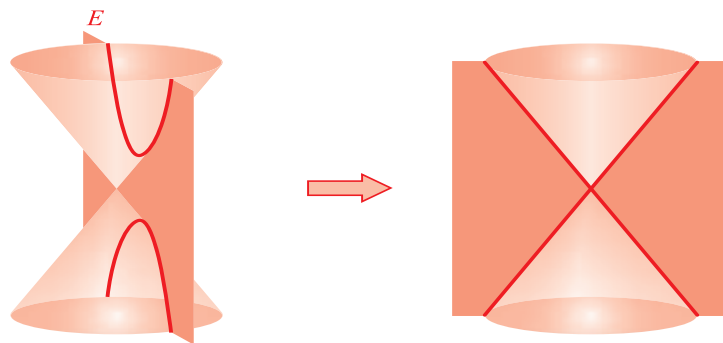


- (1)圓 (2)拋物線 (3)橢圓 (4)雙曲線

例 2.8：設平面  $E$  與直圓錐面的截痕為拋物線，今將平面  $E$  平移至通過直圓錐面的頂點，則此時平面與直圓錐面的截痕為何？(1)圓 (2)拋物線 (3)橢圓 (4)雙曲線 (5)一直線

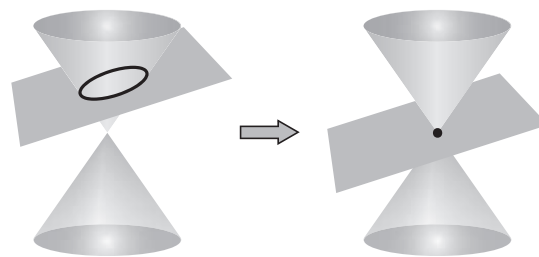


Ex2.8：設平面  $E$  與直圓錐面的截痕為雙曲線，今將平面  $E$  平移至通過直圓錐面的頂點，則此時平面與直圓錐面的截痕為何？(1)拋物線 (2)橢圓 (3)雙曲線 (4)一直線 (5)兩相交直線



Ex2.81：設平面  $E$  與直圓錐面的截痕為橢圓，今將平面  $E$  平移至通過直圓錐面的頂點，則此時平面與直圓錐面的截痕為何？

- (1)拋物線 (2)橢圓 (3)點 (4)一直線 (5)兩相交直線



◎觀念題：

1.關於直圓錐面的敘述，選出所有正確的選項：

- (1)直圓錐面的頂點只有一個      (2)直圓錐面的母線只有一條      (3)直圓錐面的軸只有一條

2.坐標空間中的一直圓錐面，其頂點為原點，直圓錐面的軸為  $z$  軸。已知平面  $E$  不過原點，且與  $z$  軸平行，選出平面  $E$  與直圓錐面的截痕？

- (1)圓      (2)橢圓      (3)拋物線      (4)雙曲線

3.分別調整各舞臺聚光燈的角度，如圖所示，已知每個聚光燈照射的燈光形成直圓錐狀，且地板與天花板平行。選出聚光燈所有可能在地板上照亮區域邊界的圖形

- (1)圓      (2)橢圓      (3)拋物線      (4)雙曲線





附錄：

1.圓錐曲線的痕跡為**拋物線**的建築



美國加州比克斯比溪大

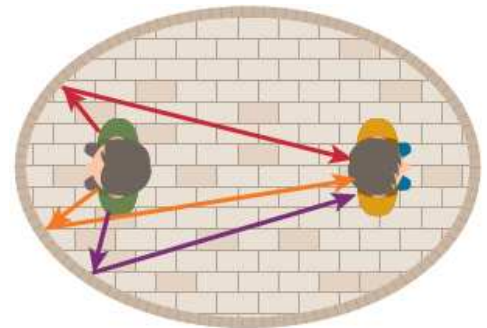


澳洲普拉瑟潘聖保羅聖公會教堂的屋頂

2.圓錐曲線的痕跡為**橢圓**的建築



利用了橢圓形聚焦的原理，當在橢圓其中一個焦點處發出聲音時，反射後所有聲音會匯集通過另一焦點，因此，只要兩人各站在橢圓建築的兩焦點，即使室內吵雜兩人依然可以清晰對話



3.圓錐曲線的痕跡為**雙曲線**的建築



雙曲線結構的曲面建築能穩定承受外來側面的力量(如風力或水的壓力)，因此常用於高層或垂直類型的建築，例如冷卻塔或水庫

