單元 6 矩陣的運算　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：矩陣(matrix)的定義

1.定義：設 m，n 為正整數，形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，稱為有 m 列(橫排) n 行(直排)的矩陣，簡稱為 $m\times n$ 階矩陣

(matrix of order $m\times n$)，簡記為 $A_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}$

其中 a_{ij} 為**第 i 列**與**第 j 行**交叉位置上的元素，稱為矩陣的**第(i，j)元**

$$\begin{array}{cc} & \text{第 } j \text{ 行} \\ \text{第 } i \text{ 列} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

註：(1)平面向量可以用 2×1 階的矩陣表之，而空間向量可以用 3×1 階的矩陣表之

(2)1×n 階的矩陣也稱為「**列矩陣**」，m×1 階的矩陣也稱為「**行矩陣**」

2.方陣：矩陣 $A_{m\times n}$，當 $m=n$ (列數＝行數)

形如 $A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$ 時，稱矩陣 A 為 n 階方陣

其中 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 稱為矩陣 A 的**主對角線**(main diagonal)元

◎矩陣概念

例 1.1：關於矩陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，選出正確的選項：

(1) A 有 2 列 3 行　(2) A 是 3×2 階的矩陣　(3)第(1，1)元是 5
(4)第(1，2)元是 3　(5) 1 是第(2，3)元

Ex1.1：關於矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$，選出正確的選項：

(1) A 有 2 列 3 行　(2) A 是 3×2 階的矩陣　(3)第(2，1)元是 2　(4)第(3，2)元是 6

◎矩陣表示

例 1.2：已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$，且第(i，j)元 $a_{ij}=2i-j$，試求矩陣 A

Ex1.2：已知矩陣 $B=[a_{ij}]_{2\times 2}$，且第(i，j)元 $a_{ij}=i+j$，試求矩陣 B

例 1.3：已知矩陣 A＝[a_{ij}]$_{3\times3}$，第(i，j)元 $a_{ij}=\begin{cases} i+j，若 i<j \\ 0 \quad ，若 i>j \end{cases}$，試求矩陣 A

Ex1.3：設 A＝[a_{ij}]$_{3\times3}$， $a_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 2, & i<j \\ -3, & i>j \end{cases}$ ，試求矩陣 A。【A＝$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$】

重點 2：矩陣相等

意義：當兩個矩陣 A 和 B 滿足：

(1)階數**大小相等**，即矩陣 A 的**列數**等於矩陣 B 的**列數**，矩陣 A 的**行數**等於矩陣 B 的**行數**

(2)矩陣 A 與矩陣 B 的每一個相同對應位置的**元**都**相等**

則稱矩陣 A 與 B 相等，記作 A＝B

即設 A＝[a_{ij}]$_{m\times n}$，B＝[b_{ij}]$_{m\times n}$，若 A＝B，則 $a_{ij}=b_{ij}$ ，$1\le i\le m$，$1\le j\le n$

◎矩陣相等

例 2.1：試說明下列各矩陣是否相等？

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$ 與 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}_{3\times2}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$ 與 $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$

Ex2.1：試說明下列各矩陣是否相等？

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times1}$ 與 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}_{1\times2}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$ 與 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$

例 2.2：已知 $\begin{bmatrix} 3 & b & 0 \\ a & -4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & c & d \end{bmatrix}$，求 a，b，c，d 的值

Ex2.2：已知 $\begin{bmatrix} 2a+b & c+d \\ a-b & c-d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，求 a，b，c，d 的值

例 2.3：考慮每個元(或稱元素)只能是 0 或 1 的 2×3 階矩陣，且它的第一列與第二列不相同且各列的元素不能全為零，這樣的矩陣共有_____個　(105 學測)

重點 3：零矩陣與單位方陣

1.零矩陣：若 $m\times n$ 階矩陣的每一個元素都是 0 時，此矩陣稱為 $m\times n$ 階的零矩陣，以 $O_{m\times n}$ 或 O 表示

註：若零矩陣為方陣時，稱為零方陣(n 階)，以 $O_{n\times n}$ 或 O_n 表示

如：$O_{2\times3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$O_{3\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$，$O_2=O_{2\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，$O_3=O_{3\times3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

2.單位方陣(identity matrix)：

設 n 階方陣 $A_{n\times n}$，其主對角線的元是 1，其他位置的元都是 0，稱為 n 階單位矩(方)陣，簡記為 I_n

註：當不致產生混淆時，I_n 也可簡寫為 I

如：$I_1=[1]$；$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$；$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$等

重點 4：矩陣的加法

1.意義：當兩個矩陣 A 和 B 同階時，才可以做矩陣加法運算

設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$，$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$

則 $A+B=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$

⇒即 A＋B 是將相同第$(i，j)$位置上的元相加，設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

2.矩陣加法性質：

(1)階數相同(即同階)之矩陣，才可以做加法運算

(2)A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，若 A＋B＝C，則矩陣 C 也是 $m\times n$ 階的矩陣

(3)矩陣加法具**交換性**，即 A＋B＝B＋A

(4)矩陣加法具**結合性**，即 A＋B＋C＝(A＋B)＋C＝A＋(B＋C)

(5)矩陣**加法的單位元素**為零矩陣，即 $A_{m\times n}+O_{m\times n}=A_{m\times n}$

(6)矩陣**加法反元素**，即 A＋(－A)＝(－A)＋A＝O，稱(－A)為矩陣 A 的加法反元素

註：(－A)是將矩陣 A 所有位置的元都乘以(－1)，所得到的矩陣

◎矩陣加法

例 4.1：已知 A＝$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，求：

(1)A＋B　　(2) B＋A　　(3) A＋B 與 B＋A 是否相等？

Ex4.1：已知 A＝$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$求：

(1)A＋B　　(2) B＋A　　(3) A＋B 與 B＋A 是否相等？

例 4.2：設 A＝$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$，C＝$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$，試求：

(1) (A＋B)＋C　　(2) A＋(B＋C)　　(3)檢驗(A＋B)＋C＝A＋(B＋C)

Ex4.2：設 A＝$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，C＝$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$，試求：(NBe)

(1) (A＋B)＋C　　(2) A＋(B＋C)　　(3)檢驗(A＋B)＋C＝A＋(B＋C)

例 4.3：設 A 與 B 都是 3×2 矩陣，A＝$[a_{ij}]$，B＝$[b_{ij}]$，且 $a_{ij}=i+j$，$b_{ij}=3i-2j$，試求 A＋B

Ex4.3：設 A 與 B 都是 3 階方陣，A＝$[a_{ij}]$，B＝$[b_{ij}]$，且 $a_{ij}=i+j$，$b_{ij}=3i-2j$，試求 A＋B

重點 5：矩陣的減法

1.意義：當兩個矩陣 A 和 B 同階時，才可以做矩陣減法運算

設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣 A＝$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，B＝$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

則 A－B＝$\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

⇒即將 A 中的每一個元減去 B 中相同位置上的元

⇒即 A＝$[a_{ij}]_{m\times n}$，B＝$[b_{ij}]_{m\times n}$，則 A－B＝$[a_{ij}]_{m\times n}-[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$

註：(－B)是將矩陣 B 所有位置的元都乘以(－1)，所得到的矩陣

2.矩陣減法性質：

(1)階數相同之矩陣，才可以做減法運算

(2)若 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，設 A－B＝C，則矩陣 C 也是 $m\times n$ 階的矩陣

(3)矩陣減法**不具交換性**，即 A－B ≠ B－A

(4)矩陣減法**不具結合性**，即 (A－B)－C ≠ A－(B－C)

3.矩陣的加減移項運算：

設矩陣 X，A，B 都是同階之矩陣，且滿足 X＋A＝B，則 X＝B－A

◎矩陣減法

例 5.1：已知 A＝$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，求下列各矩陣：

(1) A－B　　(2) B－A　　(3) A－B 與 B－A 是否相等？

Ex5.1：已知 A＝$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，求下列各矩陣：

(1) A－B　　(2) B－A　　(3) A－B 與 B－A 是否相等？

例 5.2：設 A＝$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，試求：

(1)A－B　　(2)B－A　　(3)判斷 A－B 和 B－A 相等嗎？

Ex5.2：設 A＝$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$，試求：

(1)A－B　　(2)B－A　　(3)判斷 A－B 和 B－A 相等嗎？

◎矩陣方程式(移項法則)

例 5.3：已知 A＝$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，且 X＋A＝B，求矩陣 X

Ex5.3：已知 X－$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$＝$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，求矩陣 X

Ex5.31：已知 X－$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$＝$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求矩陣 X

重點 6：矩陣的係數積(純量乘法)(倍數)

1.意義：若矩陣 A 連加 k 次，即 $\underbrace{A+A+\cdots+A}_{k\text{個}}=kA$，稱為矩陣 A 的**純量乘法**或**係數乘積**(scale product)

即設 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，則 $kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，$k$ 為實數

$\Rightarrow$即設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，k 為實數，則 $kA=[ka_{ij}]_{m\times n}$

註：(1)矩陣係數積是將實數 k **遍乘**矩陣 A 的每一個元，即 kA 的**每個元**都等於 A 中相同位置元的 k 倍

(2)若矩陣 A 是 $m\times n$ 階矩陣，k 為實數，則係數積 kA 也是一個 $m\times n$ 階矩陣

註：**矩陣的係數積**和**行列式的係數積**是不同的：

矩陣的係數積：$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\times 2 & 2\times 2 \\ 3\times 2 & 4\times 2 \end{bmatrix}$，　行列式的係數積：$2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1\times 2 & 2\times 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1\times 2 & 2 \\ 3\times 2 & 4 \end{vmatrix}$

2.矩陣係數積的性質：

設 A，B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，O 為零矩陣，r，s 為實數，則：

(1) $0\cdot\text{A}=\text{O}$　　$1\text{A}=\text{A}$　　$(-1)\text{A}=-\text{A}$

(2) $r(\text{A}+\text{B})=r\text{A}+r\text{B}$

(3) $(r+s)\text{A}=r\text{A}+s\text{A}$

(4) $(r\,s)\text{A}=r(s\text{A})$

(5) A－B＝A＋(－1)B，其中(－B)＝(－1)B 為矩陣 B 的加法反元素

◎矩陣係數積

例 6.1：已知矩陣 $\text{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，$\text{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$，試求下列各矩陣：(1) (－2)A　(2) 2A＋3B　(3) 3A－2B

Ex6.1：已知矩陣 $\text{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，$\text{B}=\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$，試求下列各矩陣：(1) (－2)A　(2) 3A＋2B　(3) 2A－3B

例 6.2：已知 $\text{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，$\text{B}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$，求下列各矩陣：(1) 3A＋2B　(2) 2A－3B

Ex6.2：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$，試求下列各矩陣：(1)(－3)B　(2) 2A－3B

例 6.3：已知 $3\begin{bmatrix} -2 & b \\ a & 3 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$，求實數 a，b 的值

Ex6.3：已知 $a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，求實數 a，b 的值

◎矩陣方程式(矩陣的加減移項運算)

例 6.4：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$滿足 3X－A＝2(B－X)，求矩陣 X

Ex6.4：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$滿足 2(A－X)＝X＋5B，求矩陣 X

◎聯立矩陣

例 6.5：設 A 與 B 都是 2 階方陣，且滿足 A＋2B＝$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$，－2A－3B＝$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$，試求 A 與 B

Ex6.5：設 A、B 都是 2×3 的矩陣，且滿足 A＋B＝$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，2A＋3B＝$\begin{bmatrix} -1 & -5 & 1 \\ -3 & -7 & -4 \end{bmatrix}$，試求 A 與 B

重點 7：矩陣的乘法

1.意義：兩矩陣 A、B 做乘法運算 AB 時，**條件**為矩陣 A 的**行數**＝矩陣 B 的**列數**，表示如右

乘積的階數

$A_{m\times n}\ B_{n\times p}=C_{m\times p}$

相等

2.設矩陣 $A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$，則 $A_{m\times n}\ B_{n\times p}=C_{m\times p}$

即 $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，$1\le i\le m$，$1\le j\le p$

3.矩陣乘法性質：

(1)矩陣的乘積 AB 與 BA 不一定存在；當 AB 有意義，BA 不一定有意義
　即若 AB 與 BA 皆有意義時，AB 與 BA 不一定相等

(2)矩陣的乘法不具交換性，AB≒BA

(3) A≠O，B≠O 則 AB≠O 不恆成立

(4) AB＝O，不能推得 A＝O 或 B＝O

(5)矩陣乘法不具消去律：AB＝AC≠O，不一定能推得 B＝C

(6)矩陣乘法具有結合性：(AB)C＝A(BC)＝ABC

(7)矩陣乘法具有分配性：A(B＋C)＝AB＋AC (左分配)　　(B＋C)A＝BA＋CA (右分配)
　註：矩陣的左乘與右乘不一定相等

(8)矩陣乘法對係數積的結合律：設 r，s 為常數，則 r(AB)＝(rA)B＝A(rB)　　(rA)(sB)＝rs(AB)

◎矩陣的乘積

例7.1：已知矩陣A＝$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$，判斷下列各矩陣的乘積是否有意義；若有意義，求其乘積：

(1) AB　　(2) BA

Ex7.1：已知矩陣A＝$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，判斷下列各矩陣的乘積是否有意義；若有意義，求其乘積：

(1) AB　　(2) BA

例7.2：已知矩陣A＝$\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$，判斷下列各矩陣的乘積是否有意義；若有意義，求其乘積：

(1) AB　　(2) BA　　(3) AB 與 BA 是否相等？

Ex7.2：已知矩陣A＝$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，判斷下列各矩陣的乘積是否有意義；若有意義，求其乘積：

(1) AB　　(2) BA　　(3) AB 與 BA 是否相等？

◎AB＝O，不能推得 A＝O 或 B＝O

例 7.3：設矩陣 A＝$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，試求 AB 與 BA

Ex7.3：已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{bmatrix}$，求矩陣 AB 與 BA

◎AB＝AC，不能推得 B＝C

例 7.4：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，C＝$\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$，試求：

(1)驗證 AB 與 AC 是否相等？　　(2)若 AB＝AC，則 B 與 C 是否相等？

Ex7.4：設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$，試求：

(1)*AB* 與 *AC*　　(2)若 AB＝AC，則 B 與 C 是否相等？

◎矩陣乘法的結合律

例 7.5：設矩陣 A＝$\begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，C＝$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，則：

(1)判斷$(AB)C$ 與 $A(BC)$是否相等？　(2)判斷 $A(B+C)$與 $AB+AC$ 是否相等？

Ex7.5：設矩陣 A＝$\begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，C＝$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，試判斷$(A+B)C$ 與 $AC+BC$ 是否相等？

◎係數積(遍提公因數)

例 7.6：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}65 & 91\\ 26 & 39\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}18 & -42\\ -12 & 30\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}3 & -7\\ -2 & 5\end{bmatrix}$，求：(1)實數 r，s 的值　(2) AB

Ex7.6：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}14 & 7\\ 35 & 21\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}33 & -11\\ -55 & 22\end{bmatrix}$，試求 AB

重點 8：單位方陣與方陣的 n 次方

1. n 階單位方陣：當方陣中，左上角到右下角的對角線上各位置之元都是 1，而其餘各元都是 0 時，稱為 n 階單位方陣，以 I_n 或 I 表示

例如：$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2.單位方陣的性質：

(1)若 A 為 n 階方陣，則 $A_{n\times n}I_n=I_nA_{n\times n}=A_{n\times n}$

(2)若 A 為 $m\times n$ 階矩陣，則 $A_{m\times n}\,I_n=A_{m\times n}$　$I_m\,A_{m\times n}=A_{m\times n}$

例如：$AI_2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=A$　$I_2A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=A$

3.方陣的 n 次方：若方陣 A 自乘 n 次，即 $\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n個}=A^n$，稱為方陣 A 的 n 次方

註：若矩陣 $A_{m\times n}$ (非方陣)，則 A^n 無意義

◎方陣的 n 次方

例 8.1：設矩陣 I＝$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$，則：(1)試以 I 表示 A^4　(2)試求 A^8 與 A^{10}

Ex8.1：已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$，試求 A^3 與 A^{100}

例 8.2：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$，I＝$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，選出正確的選項：

(1) AB＝BA　(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　(3) $A^2=I$　(4) $A^2B=BA^2$　(5) $(ABA)^3=AB^3A$

Ex8.2：已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\-1 & -1\end{bmatrix}$，I＝$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，試求下列各矩陣：

(1) A^2　(2) $(A-I)(A+I)$　(3) $(A+I)^2$

例 8.3：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}6 & -1\\1 & 4\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & a\end{bmatrix}$滿足$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$，求實數 a 的值

Ex8.3：已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}6 & 7\\7 & a\end{bmatrix}$滿足$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$，求實數 a 的值

例 8.4：已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$，求 $A+A^2+A^3+\ldots+A^{20}$

Ex8.4：設 n 為正整數，符號$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}^n$代表矩陣$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$自乘 n 次。令$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\c_n & d_n\end{bmatrix}$，請選出正確的選項。(102 學測 7)

(1) $a_2=1$　(2) a_1，a_2，a_3 為等比數列　(3) d_1，d_2，d_3 為等比數列

(4) b_1，b_2，b_3 為等差數列　(5) c_1，c_2，c_3 為等差數列

重點 9：二階乘法反方陣

1.定義：設 A 是一個 n 階**方陣**，若存在一個 n 階方陣 B，滿足 AB＝BA＝I_n，I_n 為單位矩陣
則稱 B 是 A 的「乘法反方陣」(簡稱反方陣)，(A 亦為 B 的反方陣)，記為 B＝A^{-1}

註：(1)方陣的主對角線元都為 1，其餘位置的元都為 0 的 n 階方陣，稱為 n 階單位方陣，記為 I_n

(2)並不是任意方陣都有乘法反方陣

(3)方陣 A 具有反方陣的**充要條件**為其行列式 det (A)＝$|A|\neq 0$，且反方陣是**唯一的**，記為 A^{-1}

(4)若一個 n 階方陣 A 具有反方陣時，則稱方陣 A 為「**可逆方陣**(invertible matrix)」

2.求法：

法 1：利用反方陣**定義**法，則：

設 A＝$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\y_1 & y_2\end{bmatrix}$，且 AB＝I＝$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，得$\begin{bmatrix}ax_1+by_1 & ax_2+by_2\\cx_1+dy_1 & cx_2+dy_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

再解方程式$\begin{cases}ax_1+by_1=1\\cx_1+dy_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}ax_2+by_2=1\\cx_2+dy_2=0\end{cases}$，求出 x_1，x_2，y_1，y_2，得 B，則 B＝A^{-1}

法 2：利用反方陣**公式**：

設 A＝$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，且 det (A)＝$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$，則 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$

註：若 det (A)＝$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=0$ 時，方陣 A 沒有反方陣

註：二階的反方陣是將「主對角線之元素**互換**」，「次對角線之元素**變號**」得之

註：三階方陣 A＝$[a_{ij}]$，且 det (A)$\neq 0$，其反方陣 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}[A_{ji}]$，$A_{ji}$ 為 A 在$(j，i)$位置的**餘因子**

法 3：利用增廣矩陣，透過列運算(高斯－喬登消去法(Gaussian－Jorden elimination))求解：

即增廣矩陣$\left[\begin{array}{cc|cc}a & b & 1 & 0\\c & d & 0 & 1\end{array}\right]\to\cdots$ 列運算$\cdots\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & e & f\\0 & 1 & g & h\end{array}\right]$，則反矩陣為$\begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix}$

3.設 A，B，X 三矩陣，滿足 AX＝B，其中 A 是不為零之方陣，且 A^{-1} 存在，則 X＝A^{-1}B

4.若 I 為單位矩陣，A 與 I 為同階方陣時，則 AI＝IA＝A

◎驗證反方陣關係

例 9.1：驗證 $B=\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$為 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\-2 & 5\end{bmatrix}$的反方陣

Ex9.1：驗證 A$=\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 7\end{bmatrix}$，B$=\begin{bmatrix}-7 & 8\\3 & -2\end{bmatrix}$是否互為反方陣？

◎利用**定義**求反方陣

例 9.2：已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$有反方陣，求 A 的反方陣

Ex9.2：已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$有反方陣，求 A 的反方陣

◎利用**公式**求反方陣

例 9.3：判斷下列二階方陣是否有反方陣？若有，求其反方陣

(1) A$=\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}$　　(2) B$=\begin{bmatrix}6 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}$

Ex9.3：判斷下列二階方陣是否有反方陣？若有，求其反方陣

(1) A$=\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}$　　(2) B$=\begin{bmatrix}2 & 6\\1 & 3\end{bmatrix}$

◎判斷乘法反方陣

例 9.4：若方陣 A＝$\begin{bmatrix} x-1 & x+3 \\ 1 & x \end{bmatrix}$沒有乘法反方陣，試求 x 之值

Ex9.4：已知二階方陣$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & x \end{bmatrix}$的反方陣不存在，試求 x 之值

例 9.5：下列哪些方陣有乘法反方陣？

(1)$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$　(2)$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$　(3)$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　(4)$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

例 9.6：設 A，B 及 C 為二階方陣，O 為二階零方陣，選出正確的選項：

(1)若 $A^2＝O$，則 A＝O　(2)若 A＝B，則 AC＝CB

(3)若 A－B＝O，則 AC＝BC　(4)若 A＋B＝O，則 $A^3＋B^3＝0$

Ex9.6：設 A，B 及 C 為二階方陣，O 為二階零方陣，I 為二階單位方陣，選出正確的選項：

(1) AB＝BA　(2)若 AB＝AC 且 A≠O，則 B＝C　(3)若 A(B＋C)＝AB，則 AC＝O

(4)$(A＋B)^2＝A^2＋2AB＋B^2$　(5)若 $A^2＝－I$，則$(ABA)^5＝－AB^5A$

Ex9.61：設 A，B 及 C 為三階方陣，O 為 3×3 階零矩陣，I 為三階單位方陣。選出正確的選項：

(1)若 A 不是零矩陣，則乘法反方陣 A^{-1} 必存在　　(2)若 $\det(A)\neq 0$，且 AB＝AC，則 B＝C

(3)若 B＝C，則 AB＝AC　　(4)若 A 有反方陣且 $A^2=B^2$，則 B 亦有反方陣

(5)若 A^{-1} 存在，則 $(ABA^{-1})^{20}=AB^{20}A^{-1}$

◎利用**增廣矩陣列運算**求反方陣

例 9.7：設 A＝$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，試求 A^{-1}

Ex9.7：已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$ 有乘法反方陣，求 A 的乘法反方陣

◎利用(方程組)增廣矩陣求反方陣

例 9.8：(1)將 $\begin{cases}3x-7y=-6\\2x-5y=-5\end{cases}$ 寫成 $AX=B$ 的形式

(2)根據(1)，試求矩陣 X

Ex9.8：設 $A=\begin{bmatrix}4&9\\3&7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}17\\13\end{bmatrix}$，且矩陣 $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 滿足 $AX=B$，試求：

(1)A 的乘法反方陣 A^{-1}　　(2)矩陣 X

◎解二元一次聯立方程式

例 9.9：使用反方陣，解聯立方程式$\begin{cases}2x-5y=9\\3x+4y=2\end{cases}$

Ex9.9：使用反方陣，解聯立方程式$\begin{cases}3x+4y=2\\2x-5y=9\end{cases}$

例 9.10：設 A＝$\begin{bmatrix}4&5\\7&9\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}4&3\\5&1\end{bmatrix}$，求滿足 AX＝B，YA＝B 的矩陣 X，Y

Ex9.10：已知$A=\begin{bmatrix}4&5\\7&9\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&3\\5&1\end{bmatrix}$，則：

(1)若 AX＝B，求矩陣 X　(2)若 XA＝B，求矩陣 X

例 9.11：已知 A 為二階方陣，且 A$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$＝$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，A$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$＝$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，試求 A

Ex9.11：設實係數的二階方陣 A 滿足 A$\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$＝$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，A$\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}$＝$\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$，若 A＝$\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，求數對($a$，$b$，$c$，$d$) (95 指甲)

Ex9.121：已知 A 為二階方陣，滿足 $A\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$，求 $A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

例 9.12：設 x，c 為實數，方陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & x\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & -2\\2 & x\end{bmatrix}$，已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍(其中 $c\neq0$)，則數對(x，c)＝_______(105 數乙)

Ex9.12：設 $A^3=\begin{bmatrix}-7 & -2\\10 & 3\end{bmatrix}$，$A^5=\begin{bmatrix}-18 & -5\\25 & 7\end{bmatrix}$，試求 A^2 與 A。

單元 6 矩陣的運算 習題　二年____班　座號：____　姓名：

觀念澄清

下列敘述對的打「✓」，錯誤的打「×」

□ (1)矩陣 $2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

□ (2)若 A，B 分別為 3×2 與 2×3 階的矩陣，則 AB 有意義

□ (3)矩陣 $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a & 2b\\ 3c & 3d\end{bmatrix}$

□ (4)二階方陣 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

□ (5)二階方陣 $\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ 沒有反方陣

一、基礎題

1.已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$，且第(i，j)元 $a_{ij}=\begin{cases}1，當 i<j 時\\ 2，當 i=j 時\\ -3，當 i>j 時\end{cases}$，求 A

2.已知 $\begin{bmatrix}a+b & c\\ d & a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$，求 a，b，c，d 的值

3.已知矩陣 A＝$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$，B＝$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$，求下列各矩陣：(1) A＋B　(2) A－B

4.已知 $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$－X＝$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{bmatrix}$，求 X