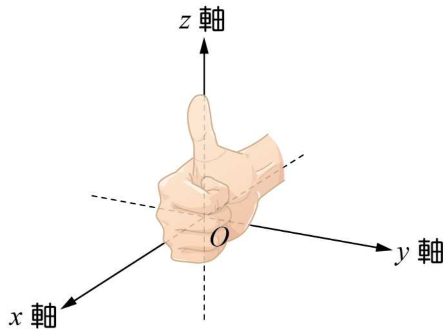
Ch 1.2 空間向量的坐標表示法　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：空間坐標系(space axes)

1.定義：在空間中任取一點 O (原點)，過 O 點作兩兩互相垂直的 x，y，z 軸三坐標軸，並採用<u>右手系</u>，建立**空間坐標系**

註：**右手系**：右手四指沿 x 軸正向彎曲至 y 軸正向的方向，則拇指指的方向就是 **z 軸的正向**



2.坐標平面與坐標軸：

空間坐標系的任兩個坐標軸都可以決定一個平面，形成坐標平面：

(1) xy 平面：由 x，y 軸所決定之平面稱為 xy 平面，即 xy 平面 $=\{(a，b，0)\mid a，b\in R\}$

(2) yz 平面：由 y，z 軸所決定之平面稱為 yz 平面，即 yz 平面 $=\{(0，b，c)\mid b，c\in R\}$

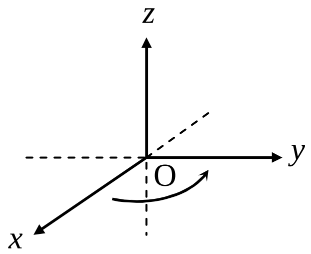
(3) xz 平面：由 x，z 軸所決定之平面稱為 xz 平面，即 xz 平面 $=\{(a，0，c)\mid a，c\in R\}$

註：xy 平面、yz 平面、xz 平面統稱為**坐標平面**

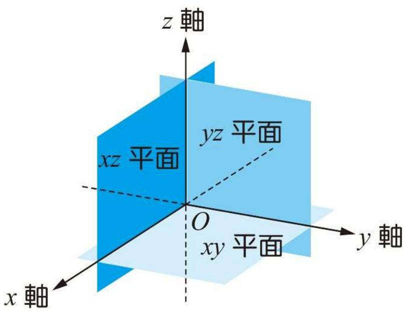
(4) x 軸：xy 平面與 xz 平面的交線，即 x 軸 $=\{(a，0，0)\mid a\in R\}$

(5) y 軸：xy 平面與 yz 平面的交線，即 y 軸 $=\{(0，b，0)\mid b\in R\}$

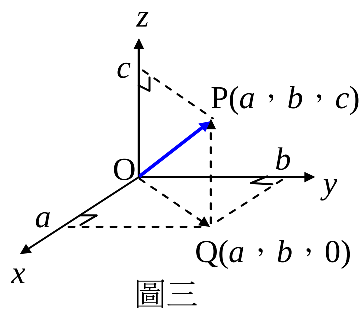
(6) z 軸：xz 平面與 yz 平面的交線，即 z 軸 $=\{(0，0，c)\mid c\in R\}$



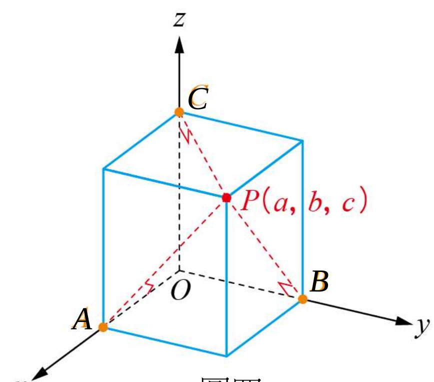
圖一



圖二



圖三



圖四

3.卦限(octant)：

三坐標平面將空間分成八個部分，每一個部分稱為一個卦限，則「八個卦限」坐標分別為：

(＋，＋，＋)，(＋，＋，－)，(＋，－，＋)，(－，＋，＋)，(＋，－，－)，(－，＋，－)，(－，－，＋)，(－，－，－)，

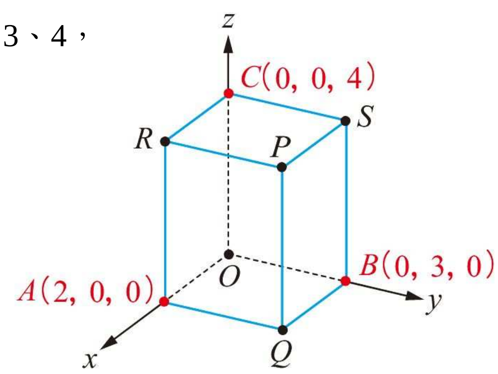
而在同一卦線中的點，其三個坐標的符號一致。

註：由三軸的正向所決定的卦限(＋，＋，＋)稱為**第一卦限**(first octant)，其餘 7 個卦限，**不規定其順序**

4.空間點的坐標：點 P(a，b，c)分別對 x，y，z 三軸作垂線得到，如上圖三、四

5.空間中點坐標：設 P(x_1，y_1，z_1)，Q(x_2，y_2，z_2)為空間中兩點，則其中點坐標為 M$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}，\dfrac{y_1+y_2}{2}，\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$

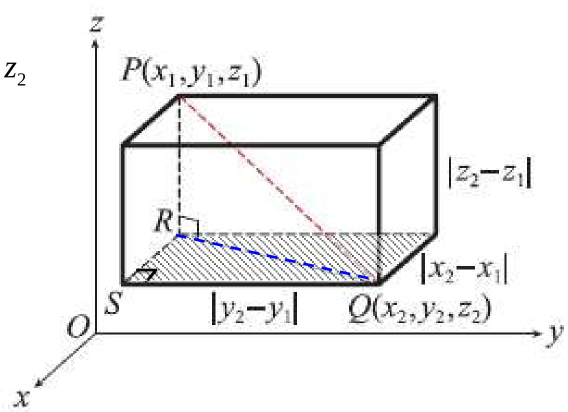
例 1.1：右圖是坐標空間中的一個長方體，已知 A、B、C 三點在三坐標軸的坐標為 2、3、4，試求 P，Q，R，S 四點的坐標



重點 2：空間坐標兩點之距離公式

1.意義：設 P(x_1,y_1,z_1)，Q(x_2,y_2,z_2)為空間中二點，$x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，$z_1\neq z_2$

則 $\overline{RS}=|x_2-x_1|$，$\overline{QS}=|y_2-y_1|$，$\overline{PR}=|z_2-z_1|$，如右圖



2.空間坐標兩點之距離公式

空間中 P(x_1,y_1,z_1)，Q(x_2,y_2,z_2)兩點的距離為

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例 2.1：已知 A(2，3，6)，B(－1，5，0)，C(4，－3，3)為空間中三點，求ΔABC 的三邊長，並說明ΔABC 為等腰直角三角形。

重點 3：點坐標表示、投影點(正射影，垂足點)與距離

1.空間中坐標軸、坐標平面上點坐標的形式：

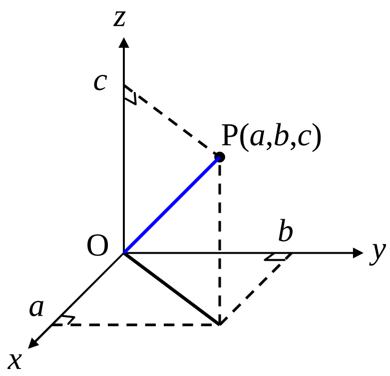
點的位置	x 軸	y 軸	z 軸	xy 平面	yz 平面	zx 平面
點(投影點)坐標	(x，0，0)	(0，y，0)	(0，0，z)	(x，y，0)	(0，y，z)	(x，0，z)

2.在三軸的投影點：(**意義**：對軸的投影點，只剩下該軸的坐標)

P(a，b，c)在 x 軸的投影點(垂足坐標)為(a，0，0)

P(a，b，c)在 y 軸的投影點(垂足坐標)為(0，b，0)

P(a，b，c)在 z 軸的投影點(垂足坐標)為(0，0，c)



3.點到三軸的距離：(**意義**：點到軸上投影點的距離)

P(a，b，c)到 x 軸的距離為＝P(a，b，c)到 x 軸投影點的距離＝$\sqrt{b^2+c^2}$

P(a，b，c)到 y 軸的距離為＝P(a，b，c)到 y 軸投影點的距離＝$\sqrt{a^2+c^2}$

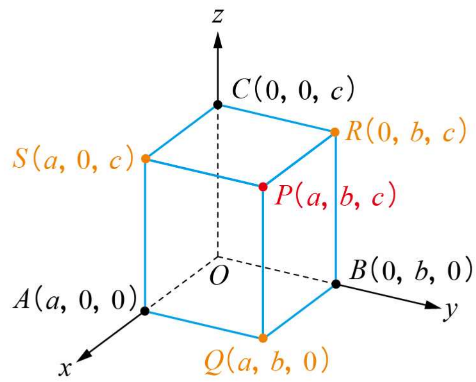
P(a，b，c)到 z 軸的距離為＝P(a，b，c)到 z 軸投影點的距離＝$\sqrt{a^2+b^2}$

4.在三平面的投影點：(**意義**：對平面的投影點，只剩下該平面的坐標)

P(a，b，c)在 xy 平面的投影點(垂足坐標)為(a，b，0)

P(a，b，c)在 yz 平面的投影點(垂足坐標)為(0，b，c)

P(a，b，c)在 zx 平面的投影點(垂足坐標)為(a，0，c)



5.點到三平面的距離：(**意義**：點到平面上投影點的距離)

P(a，b，c)到 xy 平面的距離為＝P(a，b，c)到 xy 平面投影點的距離＝$|c|$

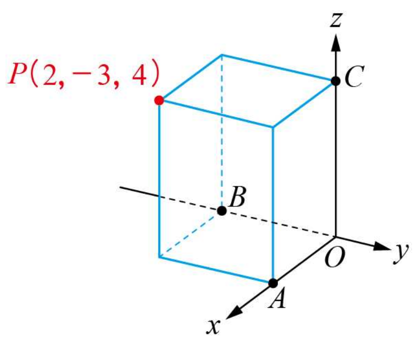
P(a，b，c)到 yz 平面的距離為＝P(a，b，c)到 yz 平面投影點的距離＝$|a|$

P(a，b，c)到 zx 平面的距離為＝P(a，b，c)到 zx 平面投影點的距離＝$|b|$

例 3.1：右圖是坐標空間中的長方體，P 點坐標為(2，－3，4)，試求：

(1) P 點在 x，y，z 軸上投影點 A，B，C 三點坐標

(2) P 點分別到 x，y，z 軸的距離



例 3.2：已知 A(5，0，0)，B(0，2，0)為坐標空間中的相異兩點，C 為 z 軸上一點。若 $\overline{AC}=2\overline{BC}$，試求 $\overline{OC}$ 長度。

重點 4：空間向量的坐標表示法

1.標準位置向量：在空間中，對於任意一個向量 $\overrightarrow{a}$ ，若將 $\overrightarrow{a}$ 平移，使其始點落在原點 O 上，稱為**標準位置向量**。

即令其終點為 A，則 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$

2.向量的坐標表示法：

若 A 點的坐標為 $(x，y，z)$，則 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$ 可以用坐標 $(x，y，z)$ 來代表，稱 $(x，y，z)$ 為向量 $\overrightarrow{a}$ 的坐標表示法

記作 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}=(x，y，z)$，其中 x，y 與 z 分別稱為向量 $\overrightarrow{a}$ 的 x 分量，y 分量與 z 分量

3.向量的長度：

設 $\overrightarrow{a}=(x，y，z)$，則 $\overrightarrow{a}$ 的長度以 $|\overrightarrow{a}|$ 表示，且 $|\overrightarrow{a}|=|(x，y，z)|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

4.空間向量的坐標表示法：

(1)若 $P(x_1，y_1，z_1)$，$Q(x_2，y_2，z_2)$ 為空間中兩點，則 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐標表示為 $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1)$

(2) $\overrightarrow{PQ}$ 的長度為 $|\overrightarrow{PQ}|$ 表示，且 $|\overrightarrow{PQ}|=|(x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1)|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

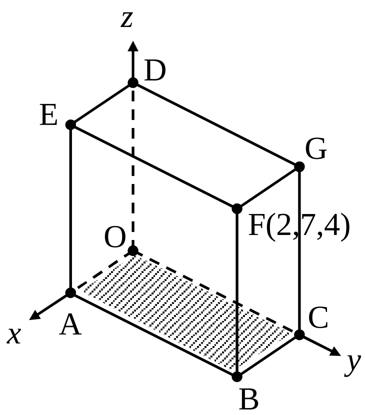
5.單位向量：長度為 1 的向量

例 4.1：右圖是坐標空間中的一個長方體，F 點的坐標為(2，7，4)，試求：

(1)空間向量 $\overrightarrow{OF}$ 的坐標表示

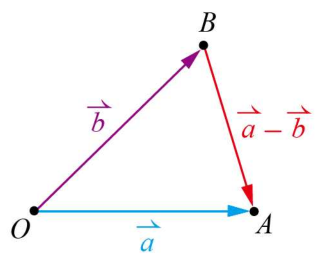
(2)G 點的位置向量 $\overrightarrow{OG}$

(3)空間向量 $\overrightarrow{AF}$ 的坐標表示



重點 5：空間向量的運算－加減法、係數積與平行

1.意義：空間向量的加、減法與係數積，其幾何意義與平面向量相同



2.運算：設 $\overrightarrow{a}=(a_1，a_2，a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1，b_2，b_3)$ 為空間中兩向量，r 為實數，則：

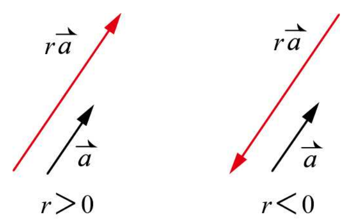
(1)加法 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3)$

(2)減法 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1，a_2-b_2，a_3-b_3)$

(3)係數積 $r\overrightarrow{a}=(ra_1，ra_2，ra_3)$，且當 $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$，$r\neq 0$ 時，$r\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{a}$

註：當 $r>0$ 時，$r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 同方向，如右圖

當 $r<0$ 時，$r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 反方向，如右圖



3.向量平行

意義：當一個非零向量 $\overrightarrow{a}$ ，可以寫成另一個非零向量 $\overrightarrow{b}$ 的係數積時，則稱 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行，記作 $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$

註：$\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}\Leftrightarrow$ 分量成比例

例 5.1：設向量 $\vec{a}=(2，3，1)$，$\vec{b}=(3，-1，4)$，試求：

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ 及其長度 $|\vec{a}+\vec{b}|$ (2) $3\vec{a}-2\vec{b}$ 及其長度 $|3\vec{a}-2\vec{b}|$

例 5.2：已知 A(1，1，1)，B(2，4，3)，C(5，3，3)為坐標空間中的三點，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 的坐標表示

(2)若 $ABDC$ 為平行四邊形，求 $\overrightarrow{AD}$ 的坐標表示及 D 點的坐標

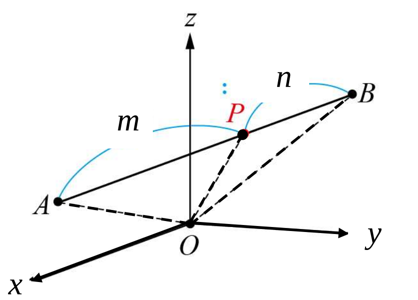
重點 6：向量的內分點公式

意義：如圖，設 O 為原點，A(x_1，y_1，z_1)，B(x_2，y_2，z_2)空間坐標中相異兩點，

若 P(x，y，z)是 $\overline{AB}$ 上一點，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

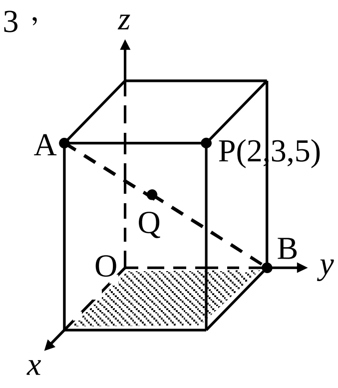
用坐標表示為 $(x，y，z)=\dfrac{n}{m+n}(x_1，y_1，z_1)+\dfrac{m}{m+n}(x_2，y_2，z_2)$

$=\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}，\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}，\dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$



註：若 P 為中點時，則 P 點的坐標為$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}，\dfrac{y_1+y_2}{2}，\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$，即為 $\overline{AB}$ 的「中點坐標」

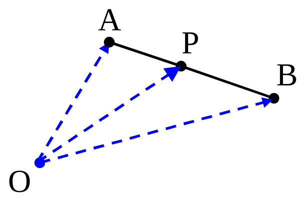
例 6.1：如右圖的長方體中，P 點坐標為(2，3，5)，Q 點位於對角線 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AQ}:\overline{QB}=2:3$，試求 Q 點坐標



重點 7：向量的線性組合

1.意義：在同一平面上可以將一向量$\overrightarrow{OP}$表成兩給定不平行向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$的**線性組合**

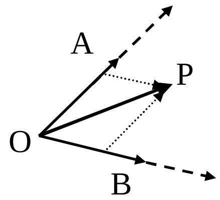
即形如$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$x$，$y$ 為實數，稱$\overrightarrow{OP}$為$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$的線性組合



2.空間中的線段：

如圖，在$\overline{AB}$上的任何一點 P，滿足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$，$0\le t\le 1$

3.空間中的平行四邊形區域：



如圖，平行四邊形區域上的每一個點 P 都滿足$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$0\le s\le 1$，$0\le t\le 1$

4.設$\overrightarrow{OA}=(1，0，0)$，$\overrightarrow{OB}=(0，1，0)$，$\overrightarrow{OC}=(0，0，1)$分別為 x 軸、y 軸、z 軸正向的**單位向量**

則空間坐標上任一點可以表為**單位向量**的線性組合，即 $P(a，b，c)=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$

例 7.1：在坐標空間中，已知$\overrightarrow{OA}=(1，2，3)$，$\overrightarrow{OB}=(0，-1，1)$，若$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，其中 $0\le s\le 1$，$0\le t\le 2$，試問所有 P 點所形成的圖形為何？

例 7.2：如圖，假設空間中有個靜止不動的質點，突然間爆炸分裂成四個質點往外飛，這四個質點所擁有的動量以向量表示分別為$\overrightarrow{a}=(1，1，1)$，$\overrightarrow{b}=(-3，5，5)$，$\overrightarrow{c}=(-1，-1，-9)$，$\overrightarrow{d}$，若$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$，試求向量$\overrightarrow{d}$