Ch 1.4 外積、體積與行列式 二年____班 座號：____ 姓名：

重點 1：空間向量的外積(cross product)

1.定義：坐標空間中任意兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1，a_2，a_3)$與 $\overrightarrow{b}=(b_1，b_2，b_3)$的外積，定義為：

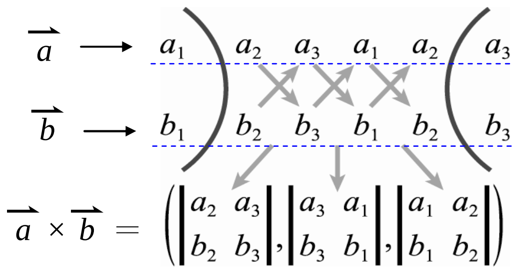
$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$=(a_2b_3-a_3b_2，a_3b_1-a_1b_3，a_1b_2-a_2b_1)$是一個**向量**

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 讀作：$\overrightarrow{a}$ 外積 $\overrightarrow{b}$ 或 $\overrightarrow{a}$ cross $\overrightarrow{b}$

註 1：外積是空間向量特有的，平面向量沒有外積的概念

註 2：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 簡便求法，如右圖



2.向量外積的性質：

(1)外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ 的方向相反，即 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a})$，如右圖

註：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 的方向由 $\overrightarrow{a}$ 到 $\overrightarrow{b}$ 的右手法則而定

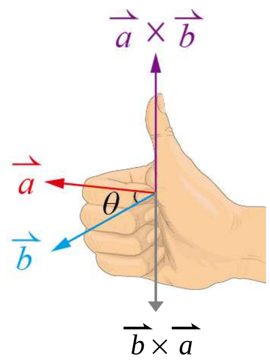
(2) $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$＝由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積

註：θ 為 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的夾角

(3) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$，$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，如右圖

(4) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行時，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$

(5)若 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$



例 1.1：已知 $\overrightarrow{a}=(2，1，0)$，$\overrightarrow{b}=(1，2，0)$，試求：

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ (2) $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ (3) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 是否與 $\overrightarrow{a}$ 或 $\overrightarrow{b}$ 垂直

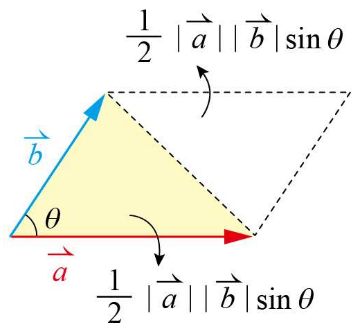
例 1.2：設坐標空間中三點 $A(1，2，1)$，$B(0，6，4)$，$C(3，5，6)$，試求一單位向量 $\overrightarrow{u}$，使其同時與 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 垂直。

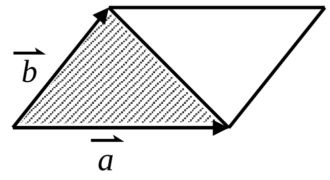
例 1.3：設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 是空間中兩個向量，選出正確的選項：

(1) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$ (2) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$

(3) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp(2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b})$ (4)若 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{n}\perp(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

重點 2：空間中三角形的面積





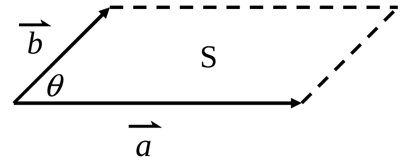
1.意義：設 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ 為空間中兩個非零向量，則：

(1)由 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ 所張出之**平行四邊形的面積**為 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$

(2)由 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ 所張出之**三角形的面積**為 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$

註：若 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 為空間中不平行的兩非零向量，其夾角為 θ，

且由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 S ，如右圖



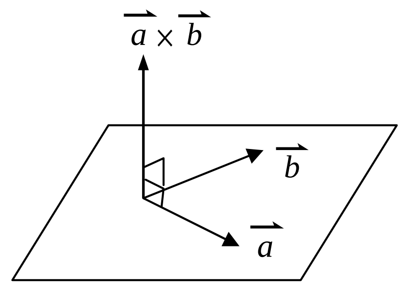
由平行四邊形面積公式 $S=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\cos^2\theta}$$

$$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$$

$$=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}$$



2.設**坐標平面上**不共線的三點 A(a_1，a_2)，B(b_1，b_2)，C(c_1，c_2)，則：

(1)利用 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1，b_2-a_2)$，$\overrightarrow{AC}=(c_1-a_1，c_2-a_2)$，則△ABC 的面積為 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c_1-a_1 & c_2-a_2\end{vmatrix}\right|$

(2)利用三階行列式，則△ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ c_1 & c_2 & 1\end{vmatrix}\right|$

例 2.1：已知空間中△ABC 的三頂點坐標分別為 A(0，1，2)，B(－2，3，5)，C(1，4，－1)，試求△ABC 的面積。

法 1：

例 2.2：已知向量 $\overrightarrow{a}=(1，1，2)$，$\overrightarrow{b}=(1，-2，-1)$，試求：

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$　　　(2)由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出之平行四邊形的面積

重點 3：三階行列式(determimant)

1.二階行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

2.三階行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$

$$\begin{array}{r|ccc|} & \text{第一行} & \text{第二行} & \text{第三行} \\ \text{第一列} \rightarrow & a_1 & a_2 & a_3 \\ \text{第二列} \rightarrow & b_1 & b_2 & b_3 \\ \text{第三列} \rightarrow & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

註：三階行列式的展開式的方法有：(1)**直接展開法**、(2)**降階展開法**

(1)直接展開法：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$

(2)降階展開法：三階行列式可依**某一行(列)展開**成二階行列式的組合，稱為降階展開法

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{(依第一行展開)}$$

$$= -b_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{(依第二列展開)}$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

位置符號

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & \boxed{\begin{matrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{matrix}} \\ c_1 & & \end{vmatrix}$$

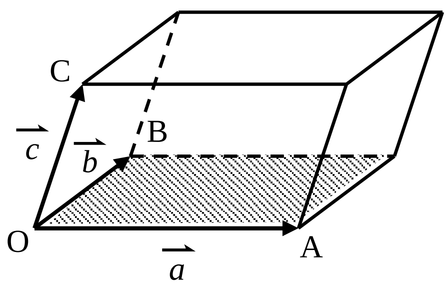
降階取法

例 3.1：試求下列三階行列式的值：(1)$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ (2)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

重點 4：空間中平行六面體的體積

1.意義：空間中三個非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 平移，使其不落在同一個平面上(不共平面)，如圖

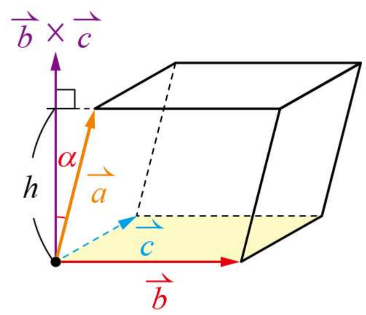
則三向量張出之平行六面體的體積＝(底面積)×(高)＝$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$



註：體積 V＝$\boxed{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}$＝$|(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}|$＝$|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}|$＝$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$

2.設 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1，a_2，a_3)$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1，b_2，b_3)$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}=(c_1，c_2，c_3)$

則由 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 所張之平行六面體之體積＝$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$



說明：底面積 A 即為 $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 所張成的平行四邊形面積，故 $A=|\vec{b}\times\vec{c}|$，如右圖

向量 $\vec{b}\times\vec{c}$ 與 $\vec{b}$, $\vec{c}$ 所張成的平面垂直，高 h 是 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}\times\vec{c}$ 上的正射影長

設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}\times\vec{c}$ 的夾角為 α，平行六面體的高 $h=\big||\vec{a}|\cos\alpha\big|$

平行六面體的體積 V 為 $Ah=|\vec{b}\times\vec{c}|\cdot\big||\vec{a}|\cos\alpha\big|$

$=\big||\vec{b}\times\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cos\alpha\big|=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$

重點 4：空間中平行六面體的體積

3.四面體 O－ABC 之體積(三角錐)$=\frac{1}{6}$(平行六面體之體積)$=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}\right|$

註：四面體底面積只有平行六面體底面積的一半，而高相同

4.若空間中三個非零向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 平移後，落在同一個**平面上(即共平面)**，則 V＝0，或 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=0$

註：設坐標平面上不共線的三點 A(a_1，a_2)，B(b_1，b_2)，C(c_1，c_2)，則：

(1)利用 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1，b_2-a_2)$，$\overrightarrow{AC}=(c_1-a_1，c_2-a_2)$，則△ABC 的面積為$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c_1-a_1 & c_2-a_2\end{vmatrix}\right|$

(2)利用三階行列式，則△ABC 的面積為$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ c_1 & c_2 & 1\end{vmatrix}\right|$

5.三線共點：

設 $L_1：a_1x+b_1y+c_1=0$，$L_2：a_2x+b_2y+c_2=0$，$L_3：a_3x+b_3y+c_3=0$ 是兩兩不平行的三條相異直線

則 L_1，L_2，L_3 三線共點的充要條件為$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$

例 4.1：設 $\overrightarrow{a}=(2，1，3)$，$\overrightarrow{b}=(1，2，1)$，$\overrightarrow{c}=(-1，3，2)$，試求 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 三向量所張出的平行六面體體積。

例 4.2：已知 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 三向量所張平行六面體體積為 5，則 $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 三向量所張出的平行六面體體積為何？(85 學測)

例 4.3：設 A(1，1，1)，B(3，2，4)，C(－1，2，5)，D(5，3，2)，試求四面體 ABCD 的體積

例 4.4：已知坐標空間中四點 $A(1，1，1)$，$B(1，2，-7)$，$C(3，4，5)$，$D(4，5，-7)$，試求：

(1)以 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AD}$ 所張出的平行六面體體積

(2)四面體 $ABCD$ 的體積

例 4.5：設 O(0，0，0)，A(1，2，3)，B(1，3，5)，C(a，2，1)四點共平面，試求 a 之值

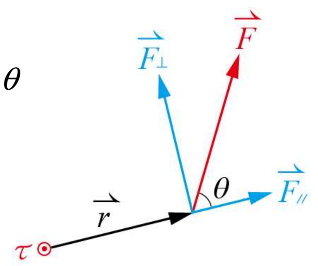
例 4.6：已知 A(1，2)，B(3，4)，C(－5，8)三點，試求△ABC 的面積

重點 5：物理學上的應用

力矩：力矩為使物體沿一固定軸轉動所需的物理量，此物理量具有大小與方向

力矩的大小與方向決定於三個要素：施力、施力點的位置向量(力臂向量)與兩者的夾角 θ

如圖，離槓桿支點 $\overrightarrow{r}$ 處施以 $\overrightarrow{F}$ 的力，由物理學可知道所造成的力矩是 $\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{F}$



說明：物理學中定義力矩 $\overrightarrow{\tau}$ 為 $\overrightarrow{\tau}=\overrightarrow{F}\times\overrightarrow{r}$ ，稱 $\overrightarrow{\tau}$ 為力矩向量， $\overrightarrow{F}$ 稱為施力向量，

$\overrightarrow{r}$ 稱為力臂向量(始動為轉軸，終點為施力點)

力矩向量 $\overrightarrow{\tau}$ 即為施力向量 $\overrightarrow{F}$ 與力臂向量 $\overrightarrow{r}$ 的外積 $\overrightarrow{F}\times\overrightarrow{r}$ ，其大小為 $\left|\overrightarrow{r}\right|\left|\overrightarrow{F}\right|\sin\theta$

例 5.1：小芬利用起釘器將釘子拔起，如圖所示，她在離起釘器的支點 $\overrightarrow{r}$ 處施以 $\overrightarrow{F}$ 的力，

已知 $\overrightarrow{r}$ 與 $\overrightarrow{F}$ 的夾角為 150°，且 $\overrightarrow{r}$ 的大小為 0.8 米， $\overrightarrow{F}$ 的大小為 10 牛頓，

試求小芬所造成的力矩大小