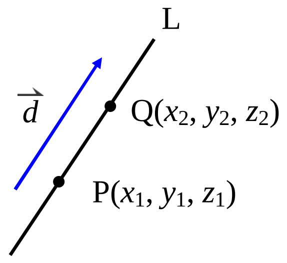
Ch2.2 空間中的直線　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：直線的方向向量 $\overrightarrow{d}$ (directional vector)



1.意義：空間中，非零向量 $\overrightarrow{d}$ 與直線 L 平行時，稱 $\overrightarrow{d}$ 為直線 L 的一個**方向向量**

即空間坐標中，設直線 L 上有兩相異點 P(x_1，y_1，z_1)，Q(x_2，y_2，z_2)，如右圖

則 $\overrightarrow{PQ}$ 為 L 的一個「方向向量」，以符號 $\overrightarrow{d}$ 表示，即 $\overrightarrow{d}\ //\ \overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1)$

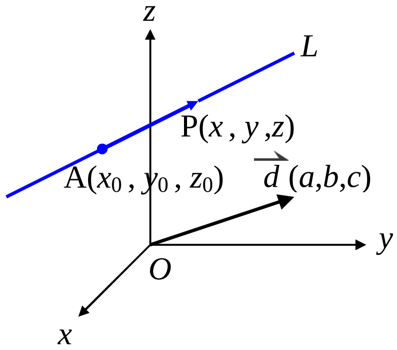
2.直線 L 的方向向量的性質：

(1)方向向量並不是唯一的，且這些方向向量都互相平行。$(x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1)$稱為直線 PQ 的一組「**方向數**」

(2)方向向量與直線 L 上的所有向量皆平行

例 1.1：設 A(2，5，－1)，B(4，0，3)，試求直線 AB 的一個方向向量

重點 2：直線方程式－參數式 (parametric equation)



意義：設直線 L 通過點 A(x_0，y_0，z_0)，且 P(x，y，z)為直線 L 上任一點，如右圖

若 $\overrightarrow{d}=(a，b，c)$平行 $\overrightarrow{AP}=(x-x_0，y-y_0，z-z_0)$為直線 L 的一方向向量

則 $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$，($t\in$R 稱為參數)稱為直線 L 的**參數式方程式**，簡稱為**參數式**

註：(1)直線的參數式並**不是唯一的**

(2)直線的參數式有動態的概念，即當參數 t 在變動時，P 點在直線 L 上隨之滑動

例 2.1：(1)求通過 P(2，－3，4)，且與 $\overrightarrow{v}=(4，2，-1)$平行之直線的參數式

(2)已知空間中兩點 P(－1，2，3)，Q(4，5，－6)，試求直線 PQ 的參數式。

重點 3：直線方程式－對稱比例式、對稱式(symmetric form)、比例式(proportional form)

意義：設直線 L 通過點 A(x_0，y_0，z_0)，且 P(x，y，z)為直線 L 上任一點，

若 $\overrightarrow{d}=(a，b，c)$為直線 L 的一方向向量且 $a\cdot b\cdot c\neq 0$ (a，b，c 皆不為 0)，

則 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ 稱為直線 L 的**對稱比例式** (或**稱對稱式**、**比例式**)

註：(1)直線的對稱式或可由參數式得到(互換)，且表示法並**不是唯一的**

(2)若 $a\cdot b\cdot c=0$ (a，b，c 有一者為 0)時，則直線 L 的對稱比例式表示法

例 3.1：設直線 L 通過 A(－1，2，3)，B(4，1，5)兩點，試求直線 L 的對稱比例式

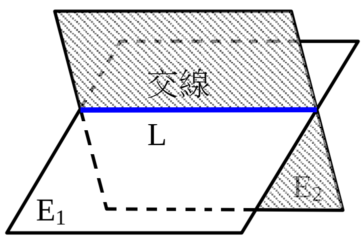
例 3.2：已知平面 E_1：$x+y+z=3$ 和 E_2：$2x+y+3z=7$ 相交於直線 L，試求直線 L 的參數式

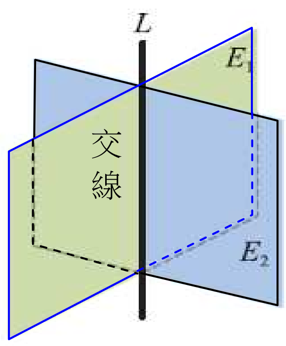
重點 4：直線方程式－二面式、兩相交平面的交線參數式

1.意義：若 E_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，E_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 是兩個**不平行**的平面，

且**交線**為直線 L，即直線 L 的圖形為聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$，如下圖

此聯立方程式稱為直線 L 的**二面式**



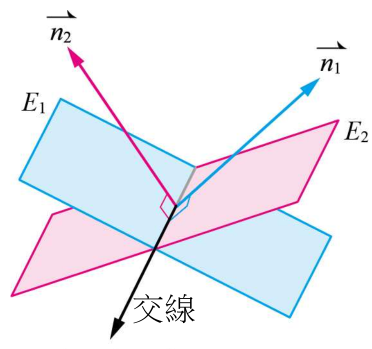


2.直線的二面式求法：

(1)利用參數式

(2)先求出直線之方向向量 $\overrightarrow{v}$ 平行兩平面法向量的外積，

再將直線上之點代入求得參數式，如右圖



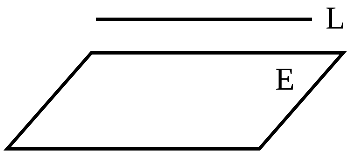
註：(1)一直線以二面式表示時，方式很多，並**不唯一**，如比例式也是一個二面式

(2)二面式中，利用聯立解、外積求得交線的方向向量

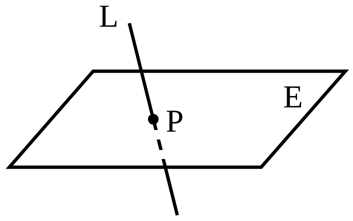
例 4.1：已知平面 E_1：$x-y+z=4$ 和 E_2：$3x+y-2z=6$ 相交於直線 L，試求直線 L 的一個方向向量

重點 5：空間中直線與平面的關係

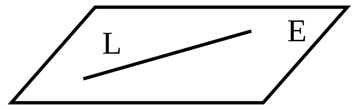
1.意義：空間中直線 L 和平面 E 的相交情形有下列三種：



L 與 E 平行



L 與 E 交於一點 P



L 落在 E 上

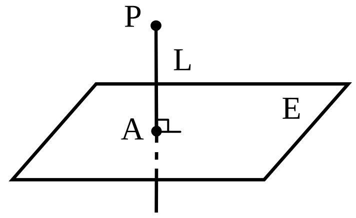
2.判斷方法：

聯立方程式$\begin{cases}\text{直線 } L \text{ 的參數式}\\ \text{平面 } E \text{ 的方程式}\end{cases}$，得到一個參數 t 的一元一次方程式，則：

(1)無實數 t 的解，表示直線 L 與平面 E 不相交，即直線 L 與平面 E 平行

(2)恰有一實數 t 的解，表示 L 與 E 交於一點

(3)有任意實數 t 的解，表示 L 落在平面 E 上



點 P 的投影點 A

3.點對平面之投影點：若通過點知直線直線 L 垂直平面 E 時，則直線 L 和平面 E 的交點稱為**投影點**

例 5.1：設平面 E 的方程式為 $3x+2y-z=2$，試討論直線 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{4}$ 與平面 E 的關係

例 5.2：已知平面 E 包含點 P(2，3，5)與直線 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2}$，試求平面 E 的方程式

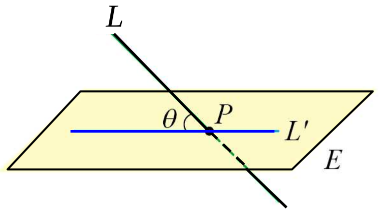
例 5.3：已知直 L_1：$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{2}$ 與 L_2：$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$ 相交於一點，試求包含直線 L_1 與 L_2 的平面方程式。

例 5.4 試求點 $P(2，3，1)$對平面 $E：3x+2y+z=-1$ 的投影點

重點 6：空間中直線與平面的夾角

意義：當空間中直線 L 與平面 E 相交於一點 P，且直線 L 對平面 E 的投影不為一個點時(即 L 與 E 不垂直)，
則直線 L 投影在平面 E 上會形成一條直線 L'，如右圖
此時直線 L 與 L'的夾角 θ，稱為直線 L 與平面 E 的夾角

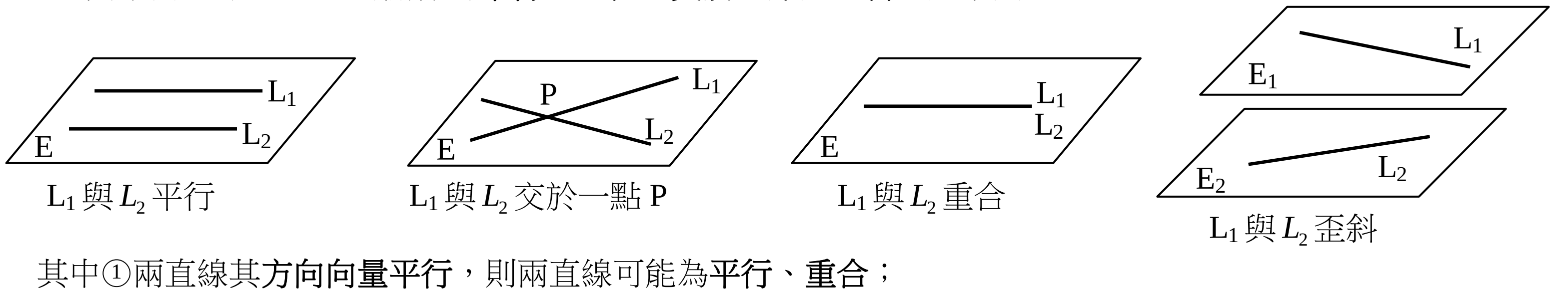
註：利用兩向量的夾角求 θ



例 6.1：在坐標空間中有一未經申請許可飛行的無人機，其位置經測得為 $A(4，4，8)$。
航警在原點 $O(0，0，0)$處，面對無人機發射電磁干擾訊號，如右圖
試求此時電磁訊號方向與 xy 平面的夾角為何？

重點 7：空間中兩直線的關係

1.意義：空間中兩直線 L_1，L_2 的關係有**平行**、**重合**、**交於一點**與**歪斜**，如下圖



其中①兩直線其**方向向量平行**，則兩直線可能為**平行**、**重合**；
②兩直線其**方向向量不平行**，則兩直線可能為**交於一點**或**歪斜**

2.判斷方法：利用參數式求交點等判斷兩直線的關係

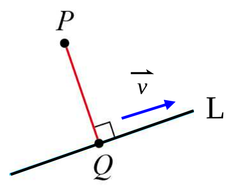
例 7.1：試判斷下列兩直線的關係：

(1) $L_1：\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ 與 $L_2：\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-6}{-2}$

(2) $L_1：\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ 與 $L_2：\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$

重點 8：空間中點到直線的距離

1.意義：空間中，直線 L 外一點 P 到直線的距離，即從點 P 作垂線 $\overline{PQ}$ 與 L 交於 Q 點，
則 d(P，L)＝ $\overline{PQ}$ 為所求，如右圖



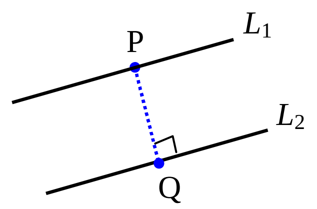
2.求法：利用向量 $\overrightarrow{PQ}$ 與 L 的方向向量 $\vec{v}$ 垂直的性質，求得 Q 點的坐標，如圖
再計算 $\overline{PQ}$ ＝d(P，L)

例 8.1：試求點 $P(1，2，3)$到直線 L：$\begin{cases} x=6+3t \\ y=-4t \\ z=6+2t \end{cases}$，$t$ 為實數，試求：

(1)由 P 點往直線 L 作垂線的垂足 Q 點坐標　　　(2) P 點到直線 L 的距離

重點 9：兩平行直線間的距離

1.意義：若兩直線 L_1，L_2 互相平行時，其中 L_1 上的任意一點到 L_2 的距離都相等，如圖
則稱此段距離為**兩平行線的距離**，記作 $d(L_1，L_2)$



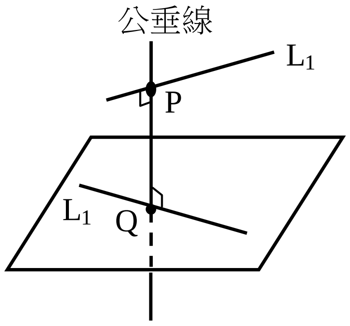
2.求法：在一直線上任取一點，求其到另一直線的距離，所得即為兩平行直線的距離

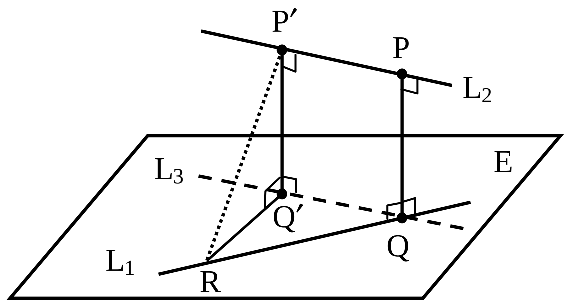
例 9.1：試求兩平行直線 L_1：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-4}{2}$ 與 L_2：$\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-8}{2}$ 的距離

重點 10：兩歪斜直線間的距離

意義：設兩條歪斜線 L_1 與 L_2，作直線 $PQ\perp L_1$，直線 $PQ\perp L_2$，稱直線 PQ 為 L_1 與 L_2 的**公垂線**

則公垂線段 $\overline{PQ}$ 的長稱為兩條歪斜線 L_1 與 L_2 的距離





例 10.1：已知直線 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 與 L_2：$\dfrac{x-8}{6}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ 互為歪斜線，試求：

(1)直線 L_1 與 L_2 的距離　　(2)公垂線 L 的對稱比例式