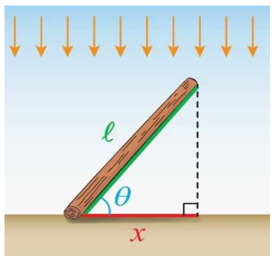
Ch 1.3 面積公式與正餘弦定理　　一年____班　座號：____　姓名：

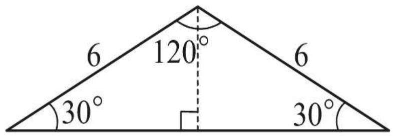
重點 1：正射影長

意義：如圖，一根長度為 ℓ 的木棍，與地面夾銳角 θ，若太陽從正上方直射，
設木棍的影長為 x，則 $x=\ell\cos\theta$ 稱為木棍在地面上的**正射影長**

說明：由三角比的定義知 $\cos\theta=\dfrac{x}{\ell}$，得知 $x=\ell\cos\theta$

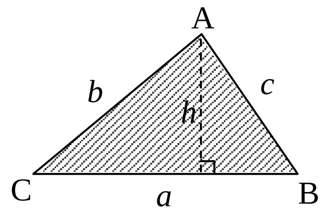


例 1.1：等腰三角形頂角為 120°，腰長為 6，試求底邊的長度



重點 2：三角形面積公式

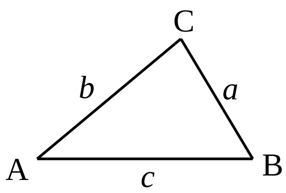
1.公式 1：三角形(銳角、直角、鈍角)面積$=\dfrac{1}{2}$(底×高)



2.公式 2：(兩邊夾一角)

設△ABC 中，三內角∠A，∠B 和∠C 的對邊長分別為 a，b 與 c，如右圖

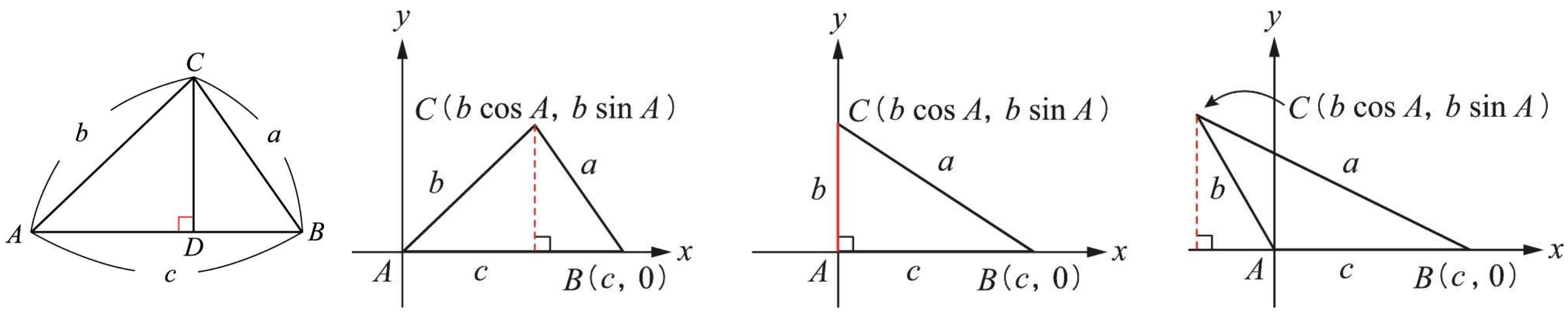
則 $\boxed{\triangle ABC\text{ 面積}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B}$



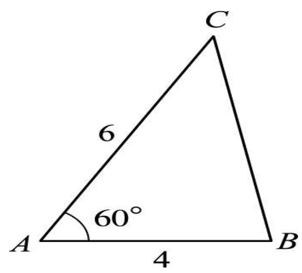
說明：如下圖，C($b\cos A$，$b\sin A$)

$\Rightarrow\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times c\times b\sin A=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

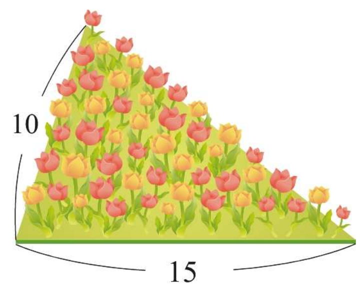
同理△ABC 面積$=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$



例 2.1：在△ABC 中，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=6$ 且∠A＝60°，試求△ABC 的面積



例 2.2：一個三角形花圃如圖，兩邊長分別為 10 公尺及 15 公尺，這兩邊的夾角為 72°，
請問此花圃的面積約為多少平方公尺？(四捨五入取到整數位)

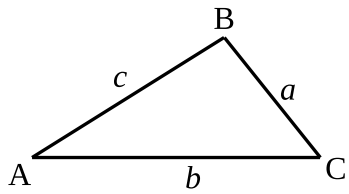


重點 3：正弦定理 (角多，ASA、AAS、AAA 型)

前言：**正弦定理**與**餘弦定理**是在三角形中，大角對大邊、直角三角形有畢氏定理等性質的延伸，是處理三角形邊角關係及三角測量應用的重要工具

1.定理：若 a，b 和 c 分別表示△ABC 三內角∠A，∠B 和∠C 的對邊長，又△ABC 的外接圓半徑為 R，

則 $\boxed{\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R}$，稱為**正弦定理**



說明：由三角形面積公式：面積$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

同除以$\dfrac{1}{2}abc$ 可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

2.性質：

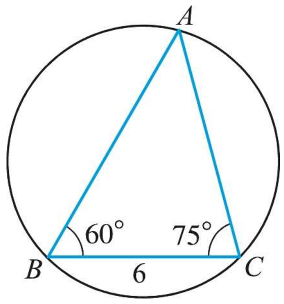
(1)$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R=\dfrac{abc}{2\Delta}$，Δ表示ΔABC 的面積，R 表示ΔABC 的外接圓半徑

(2) a：b：c＝sinA：sinB：sinC

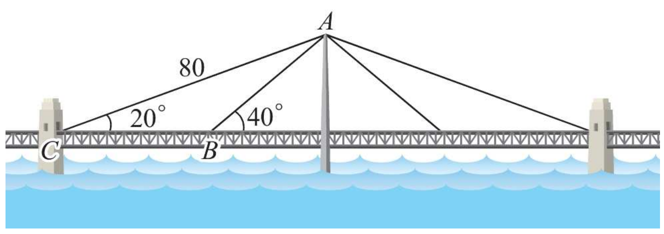
(3)設 h_a，h_b，h_c 分別表示ΔABC 三邊 a，b，c 的高，則 a：b：c＝$\dfrac{1}{h_a}:\dfrac{1}{h_b}:\dfrac{1}{h_c}$ 或 $h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$

例 3.1：在△ABC 中，若∠B＝60°，∠C＝75°，且 $\overline{BC}=6$，試求：

(1) $\overline{AC}$ 的長度　　(2) △ABC 的外接圓半徑



例 3.2：設有一座鐵橋如圖，鋼索 $\overline{AC}$ 長 80 公尺，且與橋面呈 20°角；而另一條鋼索 $\overline{AB}$ 與橋面呈 40°角。試求 $\overline{AB}$ 的長度。(四捨五入取到小數點後第二位) (已知 sin20°≈0.3420，sin140°≈0.6428)

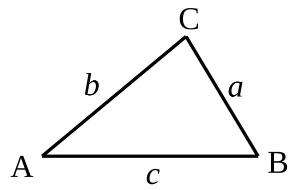


例 3.3：在△ABC 中，已知 ∠A：∠B：∠C＝1：4：1，求 a：b：c

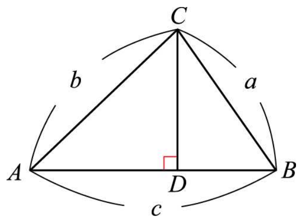
例 3.4：設h_a，h_b，h_c分別表示ΔABC 三邊 a，b，c 的高，且h_a：h_b：h_c＝1：2：3，試求 sinA：sinB：sinC

重點 4：餘弦定理 (邊多，SSS、SAS 型)

1.定理：若 a，b 和 c 分別表△ABC 三內角∠A，∠B 和∠C 的對邊長，如右圖



則 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$，或移項整理 $\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$，統稱為**餘弦定理**



說明：1.△ABC 中，sin A＝$\dfrac{\overline{CD}}{b}$，cos A＝$\dfrac{\overline{AD}}{b}$，∴$\overline{CD}$＝b sin A，$\overline{AD}$＝b cos A

$\Rightarrow \overline{BD}=c-\overline{AD}=c-b\cos A$

直角三角形 BCD 中，$a^2=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2=b^2\sin^2 A+(c-b\cos A)^2$

$=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A$

$=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\cos A$

2.同理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$　及　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

2.性質：餘弦定理為畢氏定理的推廣(或 畢氏定理為餘弦定理的特例)

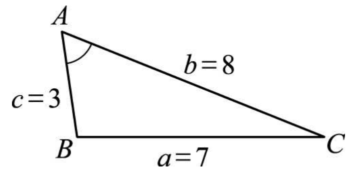
當∠A 是**銳角**時，則 cos A＞0，$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A<b^2+c^2$，**得知** $a^2<b^2+c^2$

當∠A 是**直角**時，則 cos A＝0，$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2$，**得知** $a^2=b^2+c^2$

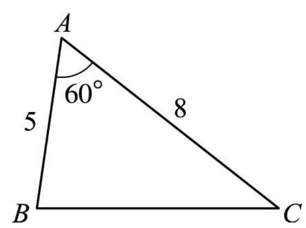
當∠A 是**鈍角**時，則 cos A＜0，$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A>b^2+c^2$，**得知** $a^2>b^2+c^2$

※SSS

例 4.1 在△ABC 中，已知$\overline{AB}$＝3，$\overline{BC}$＝7，$\overline{AC}$＝8，試求 ∠A 的角度



例 4.2：在△ABC 中，已知$\overline{AB}$＝5，$\overline{AC}$＝8，∠A＝60°，求$\overline{BC}$的長度

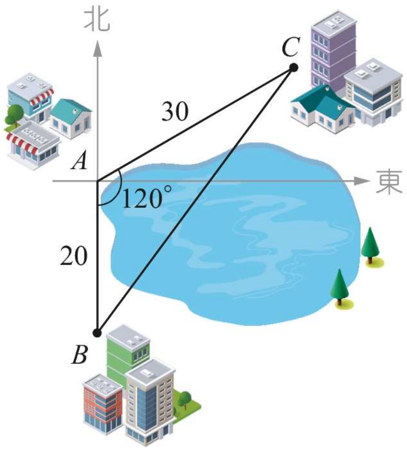


例 4.3：試判斷下列三角形是銳角三角形、直角三角形，還是鈍角三角形？

(1)三邊長分別為 6，7，8　　　(2)三邊長分別為 3，4，6

※應用測量

例 4.4：城市 B 與 C 中間隔了一個湖泊，小珊測出兩城市 B 與 C 分別在城市 A 的正南方與東 30°北方向(即由東方往北轉 30°的方向)，若已知 A，B 兩城市的距離是 20 公里 A，C 兩城市的距離是 30 公里，試求 B，C 兩城市的距離



例 4.5：如圖，一塔高 $\overline{CD}=150$ 公尺，在塔的正東方和正北方各有一觀測站 A 和 B，測出塔頂 C 的仰角分別為 45°和 60°，試求觀測站 A 和 B 之間的距離