Ch 4.3 組合 (combination)　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：完全相異物之組合(combination)

1.意義：將物件選出來而**不用排列**，此種選取物件(不必考慮順序)稱為**組合**，所有組合的總數稱為**組合數**

2.完全相異物之組合數表示法：

用 C_k^n **(讀作 C，n 取 k)**，表示從 n 個**不同的物件**中取出 k 個**物件**的組合數$(0\le k\le n)$，

則 $C_k^n=\dfrac{P_k^n}{k!}=\dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3.組合數 C_k^n 的性質：

(1) $C_0^n=1$，$C_n^n=1$

(2)當 $0\le k\le n$ 時，$C_k^n=C_{n-k}^n$。即從 n 個之中挑 k 個的方法數，相當於挑 $n-k$ 個不要的方法數

或解釋為「從 n 個人中選出 k 人為一組時，必也相對的留下 $n-k$ 人為一組，兩者的選法數是一樣的」

(3)從 n 個不同的事物中取出 k 個的**排列數** P_k^n 是**組合數** C_k^n 的 $k!$ 倍，即 $C_k^n\times k!=P_k^n$

例 1.1：(1)在 a，b，c，d 之中挑出三個物品來排列，則有多少種方法？

(2)在 a，b，c，d 之中挑出三個物品出來不用排列(稱為組合)，則有多少種方法？

例 1.2：試計算下列的組合數：

(1) C_2^{10}　(2) C_8^{10}　(3) C_{10}^{10}　(4) C_0^{10}

例 1.3：設 $C_{r+1}^{43}=C_{2r}^{43}$，試求 r 之值

重點 2：組合數的應用

意義：實際生活中或應用上，排列與組合經常交錯在一起，是分不開的。窮舉、樹狀圖以及利用基本原理的思考方式可利用加法、乘法、排容(取捨)原理等計算其方法數，才是排列組合的根本

註：分堆問題，有相同個數的分堆時，方法數 $=\dfrac{\text{分給人的方法數}}{\text{等堆數階乘}}$

例 2.1：某地舉行議員選舉，甲、乙、丙、丁、戊 5 人要選出 3 人。試問：

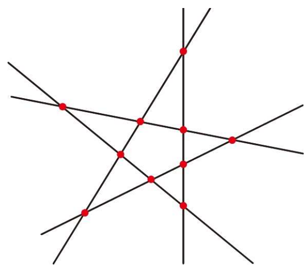
(1)當選人的組合有幾種可能？並寫出所有可能的組合

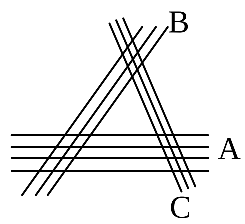
(2)落選人的組合有幾種可能？並寫出所有可能的組合

例 2.2：(1)平面上有 5 條相異直線，最多會有多少個交點？試畫畫看！

(2)如圖，有三組平行線，A 組 4 條，B 組 3 條，C 組 3 條，

則這 10 條直線可決定多少個三角形？





例 2.3：將 x，x，x，x，x，x，x，y，y，y 排成一列有多少種方法？

例 2.4：某籃球隊共 10 名選手，每場比賽都要挑選其中的 5 名擔任先發球員。但是先發陣容中唯一的控球後衛只有甲或乙可勝任，而且這兩人不能同時上場。試問共有多少種先發陣容？

例 2.5：將 6 件不同的物品分成 3 組，試求下列的分法：

(1)一組 3 件，一組 2 件，另一組 1 件

(2)每一組各 2 件

(3)一組 4 件，另兩組各 1 件

重點 3：二項式定理與乘法公式

1.二項式定理：對於正整數 n，則：

$$(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 + C_2^n x^{n-2} y^2 + \cdots + C_k^n x^{n-k} y^k + \cdots + C_1^n x^1 y^{n-1} + C_n^n x^0 y^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \quad (依\ x\ 降冪排列)$$

$$= C_0^n x^0 y^n + C_1^n x^1 y^{n-1} + C_2^n x^2 y^{n-2} + \cdots + C_k^n x^k y^{n-k} + \cdots + C_1^n x^{n-1} y^1 + C_n^n x^n y^0 = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k} \quad (依\ y\ 降冪排列)$$

註：(1) C_k^n 稱為二項式係數

(2)二項式定理的 x，y 可以代換為其他變數或式子

2.完全平方 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

完全立方 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

3.二項式定理常見公式：

(1) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

(2) $C_0^n - C_1^n + C_2^n - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

(3) $C_0^n + C_2^n + \cdots = C_1^n + C_3^n + \cdots = 2^{n-1}$

例 3.1：(1)說明 $(x+y)^3$ 展開後的 xy^2 項係數為什麼是 3？

(2)說明 $(x+y)^3$ 展開後的 x^3 項係數為什麼是 1？

(3)說明 $(x+y)^3$ 展開後為什麼沒有 x^2y^3 這一項？

例 3.2：試利用二項式定理展開下列各式：(1) $(x+y)^4$　　(2) $(x-y)^4$

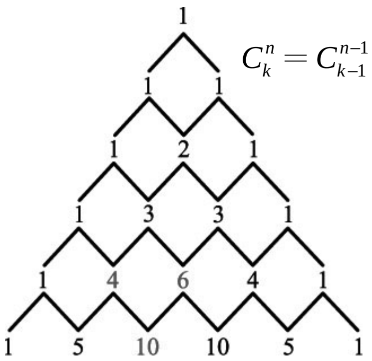
例 3.3：試求 $(a+2b)^4$ 的展開式

Ex3.3：試求 $(1+x)^5$ 的展開式

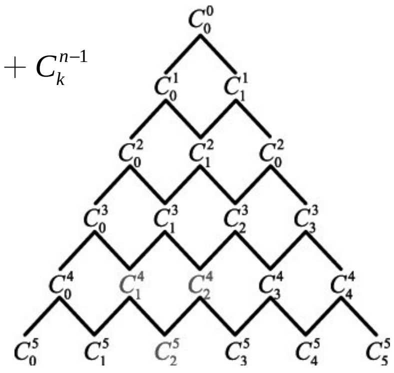
重點 4：巴斯卡三角形(或楊輝三角形)

1.意義：二項式定理展開 $(x+y)^n$，$n=0$，1，2，3，⋯，並將係數排列成如下三角形：

1	$n=0$	C_0^0
1　1	$n=1$	$C_0^1\ C_1^1$
1　2　1	$n=2$	$C_0^2\ C_1^2\ C_2^2$
1　3　3　1	$n=3$	$C_0^3\ C_1^3\ C_2^3\ C_3^3$
1　4　6　4　1	$n=4$	$C_0^4\ C_1^4\ C_2^4\ C_3^4\ C_4^4$
1　5　10　10　5　1	$n=5$	$C_0^5\ C_1^5\ C_2^5\ C_3^5\ C_4^5\ C_5^5$
1　6　15　20　15　6　1	$n=6$	$C_0^6\ C_1^6\ C_2^6\ C_3^6\ C_4^6\ C_5^6\ C_6^6$



$C_k^n=C_{k-1}^{n-1}+C_k^{n-1}$



2.巴斯卡定理：當$1\le k\le n-1$時，$C_k^n=C_k^{n-1}+C_{k-1}^{n-1}$

註：設甲為這 n 個人中的其中一人，則自此 n 個人中選出 k 人為一組時，可以分成下列兩種情形：

(1)「甲被選中」：則須由剩下的 $n-1$ 人中選出 $k-1$ 人與甲合成一組，選法有C_{k-1}^{n-1}種

(2)「甲未被選中」：則須由甲以外的 $n-1$ 人中選出 k 人，選法有C_k^{n-1}種

⇒組合數$C_k^n=C_k^{n-1}+C_{k-1}^{n-1}$

3.巴斯卡定理性質：

(1)$C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n$

(2)$C_0^n-C_1^n+C_2^n-\cdots+(-1)^n C_n^n=0$

1	$1=2^0$	
1　1	$1+1=2^1$	$1-1=0$
1　2　1	$1+2+1=2^2$	$1-2+1=0$
1　3　3　1	$1+3+3+1=2^3$	$1-3+3-1=0$
1　4　6　4　1	$1+4+6+4+1=2^4$	$1-4+6-4+1=0$
1　5　10　10　5　1	$1+5+10+10+5+1=2^5$	$1-5+10-10+5-1=0$
1　6　15　20　15　6　1	$1+6+15+20+15+6+1=2^6$	$1-6+15-20+15-6+1=0$
1　7　21　35　35　21　7　1	$1+7+21+35+35+21+7+1=2^7$	$1-7+21-35+35-21+7-1=0$

例 4.1：下圖為巴斯卡三角形的一部分，請在空格□中填入適當的數字

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1
1　□　□　□　□　□　□　1

例 4.2：試求$C_3^3+C_3^4+C_3^5+C_3^6+C_3^7$的值